

Mechanika Klasyczna 2019/2020
6. seria zadań domowych, 19.11.2019

Zad. 1

W polu grawitacyjnym $\vec{g}$ na równi pochyłej o kącie nachylenia θ i masie M umieszczona jest cegła o masie m . Nie ma tarcia między równią a podłożem (równia może przesuwać się w poziomie), ani między cegłą a równią. Wyznaczyć wartość przyspieszenia cegły w inercjalnym układzie odniesienia.

Dla chętnych: Rozwiązać to zadanie na dwa sposoby – rozpisując równania Eulera Lagrange’a, a także rozpisując siły działające na oba ciała.

Rozwiązanie (Wojciech Przybylski):

Niech $v = \dot{x}$ prędkość równi (pozioma), a $u = \dot{q}$ prędkość cegły względem równi (pochyła). Wtedy energia kinetyczna

$$T = Mv^2/2 + m(v^2 + 2vu \cos \theta + u^2)/2$$

Potencjał $V = mgq \sin \theta$, $L = T - V$, $\partial L / \partial u = m(u + v \cos \theta)$,

$$\frac{\partial L}{\partial v} = Mv + m(v + u \cos \theta),$$

$\partial L / \partial x = 0$ daje stałą ruchu $(M+m)\dot{x} + m\dot{q} \cos \theta$ czyli $(1+\xi)x = -q \cos \theta$, dla $\xi = M/m$. Drugie równanie z $\partial L / \partial q = -mg \sin \theta$ daje $\ddot{q} + \ddot{x} \cos \theta = -2g \sin \theta$ czyli $(1 - \cos^2 \theta / (1+\xi))\ddot{q} = -g \sin \theta$ czyli

$$q = -\frac{gt^2(1+\xi) \sin \theta}{2(\xi + \sin^2 \theta)}, \quad x = \frac{gt^2 \sin \theta \cos \theta}{2(\xi + \sin^2 \theta)}$$

Zad. 2

Dane są dwa pierścienie o promieniach r , umieszczone równoległe do siebie w odległości $2L$. Między pierścieniami rozpięta jest bańka mydlana. Napisać równanie na kształt bańki, korzystając z faktu, że minimalizuje on jej powierzchnię (zaniedbać efekty grawitacji). Przedyskutować liczbę rozwiązań otrzymanego równania dla $r \gg L$ i $r \ll L$.

Powierzchnia bańki

$$dS = 2\pi r \sqrt{1 + (dr/dh)^2} dh$$

czyli $L = (r, u = r', h) = 2\pi r \sqrt{1 + u^2}$ nie zależy od h więc jest stała energia

$$u \partial_u L - L = -\frac{2\pi r}{\sqrt{1 + u^2}} = -2\pi E$$

Stąd $(r/E)^2 = 1 + (r')^2$ oraz

$$r' = \sqrt{r^2/E^2 - 1}$$

co daje

$$h = \int \frac{dr}{\sqrt{r^2/E^2 - 1}}$$

Podstawiając $r/E = s$

$$h/E = \int \frac{ds}{s^2 - 1} = \operatorname{arcosh} s$$

czyli $r = E \cosh(h/E)$

Zad. 3

Punkt materialny o masie m i ładunku q porusza się w polu indukcji magnetycznej $\vec{B} = (0, 0, B)$. Dodatkowo na punkt działa siła harmoniczna $\vec{F} = -k\vec{r}$. Znaleźć małe drgania masy m wokół punktu równowagi.

Wskazówki: Potencjał uogólniony siły Lorentza $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$ ma postać $U_L = -q\vec{v} \cdot \vec{A}$, gdzie $\vec{A}$ potencjał wektorowy pola indukcji magnetycznej ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$). Sprawdzić, że dla pola $\vec{B} = (0, 0, B)$ można przyjąć $\vec{A} = (0, xB, 0)$.

$m\ddot{z} = -kz$ daje oscylację $\omega^2 = k/m$. Siła Lorentza $m\ddot{x} = q\dot{y}B - kx$, $m\ddot{y} = -q\dot{x}B - ky$ albo, dla $w = x + iy$, $m\ddot{w} = -iq\dot{w}B - kw$. Dla $w = e^{i\omega t}$ mamy $m\omega^2 = q\omega B - k$ czyli $2m\omega = qB \pm \sqrt{(qB)^2 + 4km}$

Serię przygotował Wojciech Górecki