

Mechanika Klasyczna 2019/2020

5. seria zadań domowych

Zad. 1

Znaleźć ruch cząstki o masie m i energii całkowitej E w jednym wymiarze w potencjale $V(x) = A/\cos^2(ax)$, $A = \text{const} > 0$, $a = \text{const} > 0$. Przyjąć warunek początkowy $x(t = 0) = 0$. Wskazówka: zastosować podstawienie $y = \sin(ax)$

$$E = T + V = m\dot{x}^2/2 + A/\cos^2(ax)$$

$$\sqrt{2/mt} = \int dx/\sqrt{E - A/\cos^2(ax)} =$$

$$\int dy/(a\sqrt{E - A - Ey^2}) = \sqrt{1/Ea^2} \arcsin(y\sqrt{E/(E - A)})$$

czyli $y = \sqrt{(E - A)/E} \sin(t\sqrt{2a^2E/m})$

Zad. 2

Masa M może poruszać się bez tarcia po poziomej szynie. Do tej masy przyczepiono wahadło matematyczne o masie m i długości l . Wahadło może poruszać się tylko w płaszczyźnie równoległej do szyny. Znaleźć równania ruchu. Podać ich rozwiązanie w granicy małych wychyleń.

Masa M ma położenie x a wahadło wychyla się o kąt ϕ

$$T = M\dot{x}^2/2 + m(\dot{x} + \dot{\phi}l \cos \phi)^2/2 + m(\dot{\phi} \sin \phi)^2/2, V = -mgl \cos \phi$$

Małe drgania $T \simeq M\dot{x}^2/2 + m(\dot{x} + l\dot{\phi})^2/2$, $V \simeq mgl\phi^2/2$ Równania pełne

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + \ddot{\phi}l \cos \phi - l\dot{\phi}^2 \sin \phi) = 0$$

$$m\ddot{\phi} \cos^2 \phi - m\dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + m\ddot{x}l \cos \phi - m\dot{x}\dot{\phi} \sin \phi = -mgl \sin \phi$$

i przybliżone

$$(M + m)\ddot{x} + m\ddot{\phi} = 0, ml(l\ddot{\phi} + \ddot{x}) = -mgl\phi$$

dają rozwiązanie o stałej prędkości tj. $x = vt + x_0$, $\phi = 0$ i drganie $(M + m)x = -ml\phi$ dające $-Ml\ddot{x} = (M + m)gx$ z $\omega = \sqrt{(g/l)(1 + m/M)}$

Zad. 3

Dwa jednakowe wahadła matematyczne o długości l i masach m zaczepione są na tym samym poziomie w odległości b od siebie. Masy m połączone są nieważką, sztywną sprężyną o długości swobodnej b i współczynnikiem sprężystości k . Znaleźć małe drgania układu w płaszczyźnie pionowej zawierającej oba wahadła.

$$T = ml^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)/2,$$

$$V = -mgl(\cos \alpha + \cos \beta) + k(\sqrt{(b + l(\sin \alpha - \sin \beta))^2 + l^2(\cos \alpha - \cos \beta)^2} - b)^2/2$$

W przybliżeniu

$$V = mgl(\alpha^2 + \beta^2) + kl^2(\alpha - \beta)^2/2$$

Możliwe drgania zgodne $\alpha = \beta$ z $\omega = \sqrt{g/l}$ i przeciwne $\alpha = -\beta$, $\omega = \sqrt{g/l + 2k/m}$

Zad. 3

Dwa jednakowe wahadła matematyczne o długości l i masach m zaczepione są na tym samym poziomie w odległości b od siebie. Masy m połączone są nieważką, sztywną sprężyną o długości swobodnej b i współczynnikiem sprężystości k . Znaleźć małe drgania układu w płaszczyźnie pionowej zawierającej oba wahadła.

$$T = ml^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)/2,$$

$$V = -mgl(\cos \alpha + \cos \beta) + k(\sqrt{(b + l(\sin \alpha - \sin \beta))^2 + l^2(\cos \alpha - \cos \beta)^2} - b)^2/2$$

W przybliżeniu

$$V = mgl(\alpha^2 + \beta^2) + kl^2(\alpha - \beta)^2/2$$

Możliwe drgania zgodne $\alpha = \beta$ z $\omega = \sqrt{g/l}$ i przeciwne $\alpha = -\beta$, $\omega = \sqrt{g/l + 2k/m}$

Zad. 4

Punkt materialny o masie M porusza się bez tarcia po cykloidzie o równaniu $x = a(\Theta - \sin \Theta)$, $y = a \cos \Theta$, ($0 \leq \Theta \leq 2\pi$), przy czym oś y skierowana jest pionowo. Znaleźć lagranżjan oraz równania ruchu punktu. Pokazać, że wielkość $u(t) = \cos(\frac{\Theta}{2})$ spełnia równanie oscylatora harmonicznego i podać jego częstość.

Metoda I: $T = ma^2(1 - \cos \Theta)\dot{\Theta}^2$, $V = mga \cos \Theta$, $L = T - V$ Równanie ruchu $p_\Theta \partial L / \partial \dot{\Theta} = 2ma^2(1 - \cos \Theta)\dot{\Theta}$

$$\dot{p}_\Theta = 2ma^2(1 - \cos \Theta)\ddot{\Theta} + 2ma^2\dot{\Theta}^2 \sin \Theta = \frac{\partial L}{\partial \Theta} = ma^2\dot{\Theta}^2 \sin \Theta + mga \sin \Theta$$

Korzystając w tożsamości $1 - \cos \Theta = 2 \cos^2 \Theta/2$ i $\sin \theta = 2 \sin \Theta/2 \cos \Theta/2$ po podzieleniu przez $2 \sin \Theta/2$ równanie przybiera postać

$$2ma^2\ddot{\Theta} \sin \Theta/2 + ma^2\dot{\Theta}^2 \cos \Theta/2 = mga \cos \Theta/2$$

po podstawieniu $u = \cos \Theta/2$ mamy $\dot{u} = -(\dot{\Theta}/2) \sin \Theta/2$ i $\ddot{u} = -(\ddot{\Theta}/2) \sin \Theta/2 - (\dot{\Theta}/2)^2 \cos \Theta/2$. Dostaniemy $-4ma^2\ddot{u} = mga u$, co daje częstość $\omega = \sqrt{g/a}/2$.

Metoda II: całka ruchu $E = T + V$ daje

$$E = 8ma^2\dot{u}^2 + mga(2u^2 - 1)$$

Metoda III: Bezpośrednie podstawienie $x = a(\arccos u - 2u\sqrt{1 - u^2})$, $y = a(2u^2 - 1)$, daje $T = 8ma^2\dot{u}^2$, $V = mga(2u^2 - 1)$

Serię przygotował Adam Bednorz