

Mechanika Klasyczna 2019/2020

4. seria zadań domowych

Zad. 1

Wahadło Foucaulta. Punkt o masie m porusza się na płaszczyźnie poziomej pod wpływem siły $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$. Znaleźć precesję (szybkość obrotu) wahań uwzględniając obracanie się Ziemi i siłę Coriolisa. Siły pionowe są znoszone przez reakcję.

Wersja trudniejsza dla chętnych: rozwiązać prawdziwe wahadło Foucaulta, tj. masę zawieszoną na nierozciągliwej nici. Można np. napisać Lagrangian, uwzględniając ruch Ziemi w energii kinetycznej, i przybliżyć przez małe drgania.

$$m\ddot{x} = -kx + 2m\omega \cos\theta \dot{y}, \quad m\ddot{y} = -ky - 2m\omega \theta \dot{x}$$

albo $m\ddot{w} = -kw - 2im\omega \cos\theta \dot{w}$ dla $w = x + iy$ Podstawiając $w = \exp i\Omega t$ mamy $m\Omega^2 = k + 2\Omega m\omega \cos\theta$ czyli $(\Omega - \omega \cos\theta)^2 = k/m + \omega^2 \cos^2\theta$ co oznacza oscylacje z precesją $\omega \cos\theta$

Zad. 2

Armageddon. W kierunku Ziemi leci rój asteroid z prędkością 20km/s. Jaki jest całkowity przekrój czynny na zderzenie? Promień Ziemi $R = 6000\text{km}$, przyspieszenie na powierzchni $g = 10\text{m/s}^2$.

$$E = mv^2/2 = J^2/2mR^2 - mgR = mv^2b^2/2R^2 - mgR$$

bo $J = mvb$. Stąd $2gR/v^2 + 1 = (b/R)^2$ czyli $b = R\sqrt{1 + 2gR/v^2}$ i $\sigma = \pi b^2 = \pi R^2(1 + 2gR/v^2)$

Zad. 3

Znaleźć różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie pod wpływem siły $\mathbf{F} = \beta \mathbf{e}_r/r^3$ dla $\beta > 0$.

Ze wzoru Bineta $w'' + w = -\beta w m/J^2$ czyli $w = A \cos(\omega\phi)$ dla $\omega^2 = 1 + \beta m/J^2$, $-A\omega \sin(\omega\phi_{\pm}) = w'(\phi_{\pm}) = 1/b$, $J = mbv$, $w(\phi_{\pm}) = 0$ czyli $\omega\phi_{\pm} = \pm\pi/2$ Stąd $\theta = \pi - 2\phi_+ = \pi(1 - \omega)$ oraz $\omega = 1 - \theta/\pi$, $1 + \beta/mv^2b^2 = (1 - \theta/\pi)^2$

$$b^2 = \beta((1 - \theta/\pi)^2 - 1)^{-1}/mv^2, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = (\beta/mv^2)/\sin\theta(1 - \theta/\pi)^2 - 1)^2\pi$$

Zad. 4

Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej po lemniskacie czyli krzywej opisanej we współrzędnych biegunowych równaniem

$$r^2 = 2R^2 \cos 2\varphi$$

Znaleźć zależność wartości F tej siły od odległości r punktu od jej centrum oraz zależność kąta φ od czasu zakładając $\varphi(0) = 0$.

Ze wzoru Bineta

$$-mFr^2/J^2 = w'' + w = -2^{-1/2}R^{-1} \sin 2\varphi \cos^{-3/2} \varphi + R^{-1}2^{-1/2} \cos^{-1/2} \varphi = \frac{1 - \tan 2\varphi}{\sqrt{2R \cos 2\varphi}}$$

czyli

$$F = -(J^2/m)(1 - \sqrt{1 - (r/R)^2/42R^2/r^2})/r^3$$

Z kolei ze stałości momentu pędu

$$J = mr^2\dot{\phi}$$

mamy

$$t = \int mr^2 d\varphi/J = (2R^2/J) \int \cos 2\varphi d\varphi = (R^2/J) \sin 2\varphi$$

Zad. 5

Znaleźć ruch punktu materialnego o masie m i energii $E = 0$ w jednowymiarowym potencjale

$$V = -Kx^4.$$

W chwili t_0 punkt znajduje się w położeniu $x(0) = x_0$ i ma prędkość $v(0) = v_0$

$$0 = E = m\dot{x}^2/2 - Kx^4$$

czyli $\dot{x} = \pm\sqrt{2K/m}x^2$ co daje

$$t = \pm\sqrt{m/2K} \int dx/x^2 = \mp\sqrt{m/2K}/x$$

lub $x = \mp\sqrt{2K/m}/(t - t_a)$, gdzie t_a ustalamy z warunków początkowych