

Mechanika Klasyczna 2019/2020

3. seria zadań domowych

Zad. 1 Koralik porusza się po okręgu o promieniu R wykonanym z drutu w płaszczyźnie horyzontalnej, prostopadłej do przyspieszenia grawitacyjnego g . Współczynnik tarcia kinetycznego jest równy μ . Jaką prędkość początkową v_0 trzeba nadać koralikowi aby po jednym okrążeniu zatrzymał się w punkcie wyjścia?

Wsk. Tarcie oznacza, że na koralik oprócz sił zewnętrznych działa siła reakcji (nacisku) $\mathbf{N}$ prostopadła do okręgu i siła trucia $\mu N \mathbf{e}_\phi$ skierowania przeciwnie do zwrotu prędkości.

Rozwiązanie: Siła nacisku na drut (współrzędne walcowe):

$$\mathbf{N} = mR\dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r - mg\mathbf{e}_z.$$

Równanie ruchu dla przyspieszenia stycznego:

$$\begin{aligned} mR\ddot{\phi} &= -\mu N = -\mu\sqrt{(mg)^2 + (mR\dot{\phi}^2)^2}, \\ \ddot{\phi} &= \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} = -\mu\sqrt{\frac{g^2}{R^2} + \dot{\phi}^4}. \end{aligned}$$

Niech $s = \dot{\phi}^2$. Wtedy:

$$\frac{ds}{d\phi} = -2\mu\sqrt{\frac{g^2}{R^2} + s^2} \quad \text{i} \quad \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{g^2}{R^2} + s^2}} = -2\mu(\phi - \phi_0)$$

Stąd $\operatorname{arsinh} \frac{sR}{g} = -2\mu(\phi - \phi_0)$. Warunki brzegowe:

$$s(\phi = 0) = v_0^2/R^2 \Rightarrow \operatorname{arsinh} \frac{v_0^2}{gR} = 2\mu\phi_0$$

$$s(\phi = 2\pi) = 0 \Rightarrow 0 = -4\mu\pi + \operatorname{arsinh} \frac{v_0^2}{gR}.$$

Odpowiedź $v_0 = \sqrt{gR \sinh 4\mu\pi}$.

Zad. 2 Ciężarek o pomijalnie małej objętości i skończonej masie m jest podwieszony u sufitu samolotu na nitce. Z kolei do podłogi przymocowano za pomocą nitki balonik wypełniony helem o całkowitej masie

m i objętości V . Samolot przyspiesza na pasie startowym ze stałym przyspieszeniem A . Wyznaczyć naprężenie nici utrzymującej każdy z tych przedmiotów oraz określić znak i wartość Θ kąta odchylenia nici od pionu. Przyjąć, że gęstość powietrza jest równa ρ_a . Przyspieszenie grawitacyjne wynosi g .

Wsk. Siła wyporu. Zauważyć, że przyspieszenie samolotu razem z polem grawitacyjnym tworzą wypadkowy pion.

Rozwiązanie:

Przyspieszenie $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_x$. Siła naciągu nici pierwszej $\mathbf{N}_1 = -A\mathbf{e}_x - mg\mathbf{e}_y$, $\tan \Theta_1 = -\frac{A}{mg}$ - wychylenie ujemne (przeciwnie do kierunku $\mathbf{A}$). Dla drugiej nici: $\mathbf{N}_2 = -A\mathbf{e}_x + (V\rho_a - m)g\mathbf{e}_y$, $\tan \Theta_2 = \frac{A}{(V\rho_a - m)g}$ - wychylenie dodatnie (w kierunku $\mathbf{A}$).

Zad. 3 Dwa koraliki o jednakowej masie m poruszają się bez tarcia po nieruchomych prętach wzdłuż osi Ox i Oy . Jeden z nich ma ładunek elektryczny q_1 , a drugi $-q_1$. Pokazać, że położenia x i y tych cząstek w czasie odpowiadają współrzędnym pewnej fikcyjnej cząsteczki poruszającej się pod działaniem siły centralnej. Jaka to siła?

Składowa x siły Coulomba działa na cząstkę q_1 , a składowa y działa na cząstkę $-q_2$ (składowe prostopadłe do osi są równoważone przez siły reakcji więzów):

$$m\ddot{x} = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{i} \quad m\ddot{y} = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Oznaczając $\mathbf{r} = (x, y)$ i dodając stronami powyższe równania:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \left(-\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right).$$

Zad. 4 Znaleźć okres obiegu orbity eplitycznej o półosiach a i b ($a > b$) ciała o masie m w polu siły $\mathbf{F} = -\mathbf{e}_r\alpha/r^2$

Rozwiązanie.

Prędkość połowa $J/2m$ dla momentu pędu J . Ze wzoru Bineta

$$w'' + w = m\alpha/J^2$$

dla $w = 1/r$ mamy orbity $1/r = A \cos \phi + m\alpha/J^2$. Długa półos a jest połową sumy perycentrum i apocentrum (odległość minimalna i maksymalna) czyli

$$2a = (m\alpha/J^2 - A)^{-1} + (m\alpha/J^2 + A)^{-1}$$

zatem

$$a = \frac{m\alpha/J^2}{m^2\alpha^2/J^4 - A^2}$$

Elipsa zachowuje równą sumę odległości od ognisk, równą $2a$. Dla krótkiej półosi mamy

$$b^2 + (a - (m\alpha/J^2 + A)^{-1})^2 = a^2$$

czyli

$$b^2 + \frac{A^2}{(m^2\alpha^2/J^4 - A^2)^2} = \frac{m^2\alpha^2/J^4}{(m^2\alpha^2/J^4 - A^2)^2}$$

co daje

$$b^2 = (m^2\alpha^2/J^4 - A^2)^{-1}$$

Zatem $b = J(a/m\alpha)^{1/2}$ a pole elipsy wynosi

$$\pi ab = TJ/2m$$

gdzie T jest okresem obiegu. Stąd $T = 2\pi a^{3/2}(m/\alpha)^{1/2}$.

Zad. 5 Znaleźć precesję orbity tj. $\Delta\phi$ (różnica kątów dla kolejnych perycentrów) dla zagadnienia Keplera ($F = -\alpha/r^2$) jeśli dodamy małe poprawki do siły: a) $\delta F = \beta/r^3$, b) $\delta F = \gamma/r^4$. Wskazówka: ograniczyć się do wyrazów linowych w rozwinięciu w β lub γ .

Rozwiązanie: Z równania Bineta

$$\phi = \int \frac{dw}{\sqrt{q^2 - (w - p)^2 - 2m\delta V(w)/J^2}}$$

dla perycentrum $(p + q)^{-1}$ i apocentrum $(p - q)^{-1}$. W naszym przypadku $\delta V(1/r) = -\int F dr + A + B/r$ gdzie A i B są tak dobrane aby $\delta V(w = p \pm q) = 0$. Podstawiając $w - p = q \sin \psi$ dostaniemy

$$\Delta\phi/2 + \pi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 2m\delta V(p + q \sin \psi)/J^2 q^2 \cos^2 \psi}}$$

Rozwijając, w pierwszym rzędzie mamy

$$\Delta\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2d\psi m\delta V(p + q \sin \psi)/J^2 q^2 \cos^2 \psi$$

Dla (a)

$$\delta V(w) = \beta w^2/2 + Aw + B = \beta(p + q \sin \psi)^2/2 + \tilde{A} + \tilde{B} \sin \psi$$

dla $\tilde{A} \pm \tilde{B} = -\beta(p \pm q)^2/2$ czyli $\tilde{A} = -\beta(p^2 + q^2)/2$, $\tilde{B} = -\beta pq$
Zatem $\delta V = -\beta q^2 \cos^2 \psi/2$, i pozostaje całka

$$\Delta\phi = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi m\beta/J^2 = -\pi m\beta/J^2$$

Dla (b)

$$\delta V(w) = \gamma w^3/3 + Aw + B = \gamma(p + q \sin \psi)^3/3 + \tilde{A} + \tilde{B} \sin \psi$$

dla $\tilde{A} \pm \tilde{B} = -\gamma(p \pm q)^3/3$ czyli $\tilde{A} = -\gamma(p^3 + 3pq^2)/3$, $\tilde{B} = -\gamma(3p^2q + q^3)/3$. Zatem $\delta V = -\gamma pq^2 \cos^2 \psi - \gamma q^3 \sin \psi \cos^2 \psi/3$ i pozostaje całka

$$\Delta\phi = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2m\gamma(p + q^3 \sin \psi/3)d\psi/J^2 = -2\pi m\gamma p/J^2 = -2\pi m^2\gamma\alpha/J^4$$