

Mechanika Klasyczna 2019/2020

2. seria zadań domowych

Zad. 1

W polu grawitacyjnym g z wysokości h puszczono kamień o masie m (z zerową prędkością początkową). Na kamień działa siła oporu powietrza o wartości γv (gdzie v to wartość prędkości), zorientowana przeciwnie do kierunku ruchu. Obliczyć położenie kamienia w zależności od czasu.

Rozwiązanie

$$x = h - mgt/\gamma + (1 - e^{-\gamma t/m})gm^2/\gamma^2$$

Zad. 2

(Siła Coriolisa) Na szerokości geograficznej θ znajduje się baza wojskowa, z której będzie wystrzelona rakietą z prędkością v . Cel znajduje się bezpośrednio na północ w odległości l od bazy. Pod jakim kątem do kierunku północnego należy wystrzelić raketę, aby trafiła ona w cel?

Przyjmujemy, że rakietę cały czas leci równoległe do powierzchni Ziemi. Odległość l jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z promieniem Ziemi. Założyć, że szukany kąt jest niewielki i poczynić stosowne przybliżenia.

Rozwiązanie – Jurand Prądyński

Przez założenie $l \ll R_{\oplus}$ oraz to, że rakietę leci równoległe do powierzchni planety możemy założyć, że cały ruch odbywa się w płaszczyźnie gdzie narastające y jest w kierunku północnym, a x w kierunku wschodnim. Wynika to z faktu, że Ziemia jest lokalnie płaska. Zapisując wektory jak na ilustracji możemy łatwo zauważyć, że jeżeli α jest mały to zamiast liczyć dokładnie wartość iloczynu wektorowego ω i v możemy założyć, że w trakcie ruchu rakiety wektor v nie zmienił się znacząco przez co $\vec{v} = \text{const}$ oraz był skierowany ku północy. Mamy wtedy przyspieszenie Coriolisa wyrażające się przez:

$$\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \vec{v} = -2 \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_y \\ 0 & \omega \cos \theta & \omega \sin \theta \\ 0 & v & 0 \end{bmatrix} = 2|\omega||v| \sin \theta \cdot \vec{e}_x$$

Niech więc baza to punkt $B = (0, 0, 0)$, a cel to $C = (0, l, 0)$. Ustalmy warunki początkowe: niech szukany kąt to α naliczany od osi y przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wtedy prędkość początkową pocisku możemy zapisać jako $\vec{v} = [v \sin \alpha, v \cos \alpha, 0]$ oraz przyspieszenie stałe w trakcie ruchu (zakładając wpływ wyłącznie przyspieszenia Coriolisa) $\vec{a} = [-2\omega v \sin \theta, 0, 0]$. Czas wystrzelenia rakiety to $t_0 = 0$ oraz czas trafienia celu oznaczmy jako T . Znajdźmy więc równanie ruchu w osi x :

$$v_x(t) = \int a_x dt = 2\omega v \sin \theta t - v \sin \alpha$$
$$x(t) = \int v_x(t) dt = \omega v \sin \theta t^2 - v \sin \alpha t \approx \omega v \sin \theta t^2 - v \alpha t$$

Z uwagi na to, że w osi y nie działa żadna siła, równanie ruchu możemy zapisać prościej w postaci:

$$y(t) = v \cos \alpha t \approx v \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) t \approx vt$$

Stąd otrzymujemy dla $y(T) = l$ wprost wartość T . Ostatecznie zapisujemy układ równań jako:

$$\begin{cases} 0 = x(T) = \omega v \sin \theta T - v\alpha \\ T = \frac{l}{v} \end{cases}$$

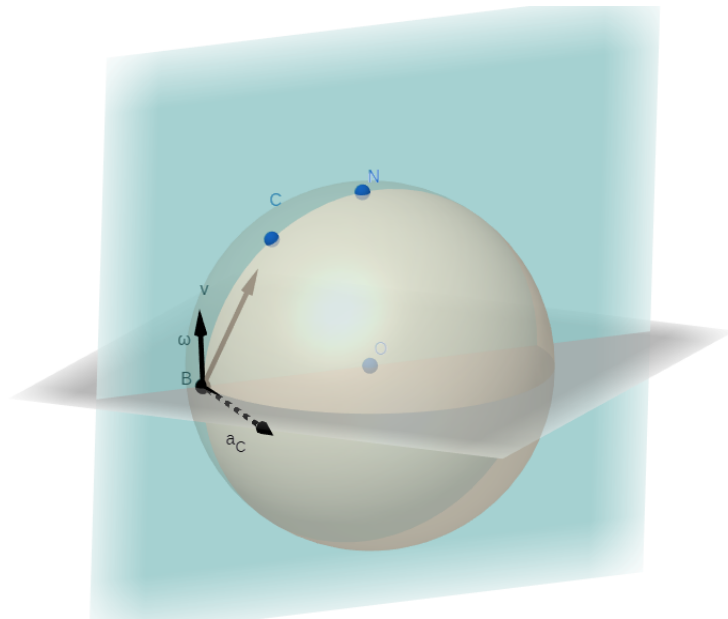
gdzie pierwsze równanie podzieliśmy przez T gdyż zakładamy, że rakieta nie przemieściła się między B i C w zerowym odstępie czasu. Z powyższych mamy wynik bezpośrednio:

$$\alpha = \omega \sin \theta \frac{l}{v}$$

Wartość ω możemy przyjąć stałą dla Ziemi i równą $\omega = \frac{2\pi}{23^h 56^m 4^s}$.

Komentarz

Część wartości można próbować policzyć dokładniej na przykład nie przyjmując $\cos \alpha = 1$, a $1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Wtedy końcowy układ równań zależny od α oraz T przybiera trochę trudniejszą postać, którą nadal można wyznaczyć analitycznie. Dużym uproszczeniem jest również założenie o stałości wektora $\vec{v}$ na potrzeby policzenia iloczynu wektorowego. Wtedy wektor przyspieszenia Coriolisa jest zmienny wraz z narastaniem szerokości geograficznej (co już uwzględnia krzywiznę planety) i zależy od samej funkcji $\alpha(t)$.



Zad. 3

Wyznaczyć ruch elektronu o masie m_e i ładunku $-e$ w polu magnetycznym $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ i

elektrycznym $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ dla zerowej prędkości początkowej. **Podpowiedź:** Jako rozwiązanie szczególne wskazać ruch, w którym obie siły się równoważą.

Rozwiązanie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E/B\omega) \cos(\omega t) + x_0 \\ (E/B\omega) \sin(\omega t) - Et/B + y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

gdzie $\omega = eB/m_e$ a x_0, y_0, z_0 – stałe dowolne.

Serię przygotował Wojciech Górecki