Mechanika Klasyczna 2019/2020
11. seria zadań domowych, 14.01.2020

Zad. 1 (bryła sztywna)
Walec o masie m, promieniu R i wysokości h został "nadziany" na metalowy pręt w taki sposób, iż pręt przechodzi przez brzeg dolnej podstawy, środek walca i brzeg górnej podstawy. Następnie pręt został podłączony do urządzenia, które obraca go ze stałą prędkością kątową ω. Jakim momentem siły działa pręt na walec? W jaki sposób należałoby "nadziać" walec na pręt, aby moment ten wynosił zero?
Podpowiedź: Najogólniejszy wzór łączący moment siły z momentem pędu to $\frac{d}{dt}\vec{J}+\vec{\omega}\times\vec{J}=\vec{M}$, gdzie $\vec{J}$ – moment pędu, $\vec{M}$ – moment siły, $\vec{\omega}$ – aktualna prędkość kątowa.

Momenty główne $I_z = mR^2/2$, $I_\perp = mR^2/4 + mh^2/12$. Prekość kątowa w układzie osi głównych

$$\boldsymbol{\omega} = (R\boldsymbol{e}_z + (h/2)\boldsymbol{e}_\perp)\omega/\sqrt{R^2+h^2/4}$$

Moment pędu

$$\boldsymbol{J} = m(R^3\boldsymbol{e}_z/2 + (R^2/2+h^2/6)(h/4)\boldsymbol{e}_\perp)\omega/\sqrt{R^2+h^2/4}$$

Ponieważ moment pędu nie ulega zmianie w układzie bryły więc (u kładzie osi głównych)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J} = mRh((R^2+h^2/3)/8 - R^2/8)\boldsymbol{e}/2(R^2+h^2/4) = mRh^3\boldsymbol{e}/48(R^2+h^2/4)$$

gdzie $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\perp$. Moment będzie zerowy jeśli pręt nadziać przez oś albo prostopadle przez środek masy.

Zad. 2
Spoczywająca cząstka o masie m_0 rozpadła się spontanicznie na dwie cząstki o masach m_1 i m_2. Jakie będą wartości energii i pędów powstałych w ten sposób cząstek?

Rozwiązanie – Marianna Głażewska

With the assumption that no external forces are acting on the system, and that the system is closed, the two particles that are the result of the decay of m_0 must move in the following manner so as to conserve momentum:
Given: m_0, m_1, m_2
To find: E_1, E_2, p_1, p_2

From the principle of the conservation of momentum:

$$p_0^2 = (E_2^2 - m_2^2) + (E_1^2 - m_1^2)$$

The equation for the energy of m_0 is:

$$E_0^2 = m_0^2 + p_0^2$$

The initial conditions of the system state that m_0 is at rest, therefore:

$$p_0 = 0$$

leading to:

$$E_0^2 = m_0^2$$

and thus:

$$E_0 = m_0$$

If $p_0 = 0$:

$$E_2^2 - m_2^2 = E_1^2 - m_1^2$$

From the principle of the conservation of energy:

$$m_0 = E_1 + E_2$$

Therefore we have two simultaneous equations:

$$\begin{cases} E_2^2 - m_2^2 = E_1^2 - m_1^2 \\ m_0 = E_1 + E_2 \end{cases}$$

The second equation can be rearranged in two different ways to give two different expressions:

$$E_1 = m_0 - E_2 \tag{1}$$

$$E_2 = m_0 - E_1 \tag{2}$$

By substituting (1) into the first simultaneous equation:

$$E_2^2 - m_2^2 = (m_0 - E_2)^2 - m_1^2$$

$$E_2^2 - m_2^2 = m_0^2 - 2m_0E_2 + E_2^2 - m_1^2$$

$$2m_0E_2 = m_0^2 - m_1^2 + m_2^2$$

$$E_2 = \frac{m_0^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_0}$$

An identical substitution for (2) into the first simultaneous equation yields:

$$E_1 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}$$

Finding the momentum of m_1:

$$p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

Therefore (through substitution and rearranging for a common denominator):

$$p_1 = \sqrt{\frac{\left(m_0^2 + m_1^2 - m_2^2\right)^2 - 4m_0^2m_1^2}{2m_0}}$$

Similarly for m_2:

$$p_2 = \sqrt{E_2^2 - m_2^2}$$

and so:

$$p_2 = \sqrt{\frac{\left(m_0^2 - m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4m_0^2 m_2^2}{2m_0}}$$

Wersja firmowa
$E_0 = m_0c^2 = E_1 + E_2$, $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ zatem $E_1^2 - m_1^2c^4 = p_1^2c^2 = E_2^2 - m_2^2c^4$ czyli

$$E_1^2 - E_2^2 = (m_1^2 - m_2^2)c^4$$

a więc

$$E_1 - E_2 = (m_1^2 - m_2^2)c^2/m_0$$

i ostatecznie

$$E_1 = c^2(m_0^2+m_1^2-m_2^2)/2m_0,\ E_2 = c^2(m_0^2+m_2^2-m_1^2)/2m_0,\ p_1^2 = (E_1^2+E_2^2-c^4(m_1^2+m_2^2))/2c^2 =$$

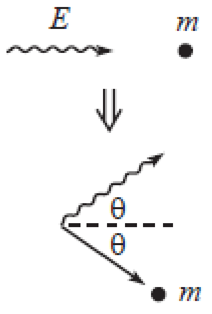
$$c^2(m_0^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2)/4m_0^2 - c^2(m_1^2 + m_2^2)/2 = c^2((m_0^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2)/4m_0^2$$

$$= c^2(m_0^2-(m_1+m_2)^2)(m_0^2-(m_1-m_2)^2)/4m_0^2 = c^2(m_0-m_1-m_2)(m_0+m_1+m_2)(m_0+m_1-m_2)(m_0-m_1+m$$

Zad. 3
Spoczywająca cząstka o masie m zaabsorbowała foton o energii E. Jaka jest masa spoczynkowa m' powstałej w takim procesie cząstki?

$$m'^2c^4 = (E + mc^2)^2 - (E/c)^2c^2 = mc^2(mc^2 + 2E)$$

Zad. 4
W spoczywającą cząstkę o masie m uderza foton o energii E. W efekcie powstaje nowy foton (o nieznanej energii), w taki sposób, że nowy foton oraz początkowa cząstka m poruszają się pod tym samym kątem θ względem początkowego kierunku ruchu fotonu. Wyznaczyć θ jako funkcję m i E.



$$p_y = 0 = ((E'/c) - p)\sin\theta$$
$$p_x = E/c = (E'/c + p)\cos\theta$$

$$mc^2 + E = E' + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

Stąd $E' = pc$, $\cos\theta = E/(E' + pc) = E/2pc$, a z kolei

$$(mc^2 + E - E')^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

czyli

$$(mc^2 + E)^2 - 2pc(mc^2 + E) = m^2c^4$$

$$2pc = \frac{E(E + 2mc^2)}{E + mc^2}$$

i ostatecznie

$$\cos\theta = \frac{E + mc^2}{E + 2mc^2}$$

Zad. 5

Znaleźć ruch ładunku q o masie m w stałych polach $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$ i $\boldsymbol{B} = (0, B, 0)$. Wykorzystać czas własny $\tau = \int dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$mdu^0/d\tau = qEu^1/c,\ mdu^1/d\tau = u^0qE/c - u^3qB,\ mdu^2/d\tau = 0,\ mdu^3/d\tau = u^1qB$$

Zatem

$$u^2 = \mathrm{const}$$

oraz

$$m^2d^2u^1/d\tau^2 = q^2[(E/c)^2 - B^2]u^1$$

Dalej

$$u^1 = \alpha\exp(\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) + \beta\exp(-\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m)$$

$$u^3 = \frac{B\alpha}{\sqrt{(E/c)^2 - B^2}}\exp(\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) - \frac{B\beta}{\sqrt{(E/c)^2 - B^2}}\exp(-\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) + \xi B$$

$$u^0 = \frac{E\alpha/c}{\sqrt{(E/c)^2 - B^2}}\exp(\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) - \frac{E\beta/c}{\sqrt{(E/c)^2 - B^2}}\exp(-\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) + \xi E/c$$

przy czym $u \cdot u = c^2$ wiąże stałe α, β, u^2, ξ np. dla $\tau = 0$. Ostatecznie $x^2 = u^2\tau$ oraz

$$x^1 = \frac{m\alpha/q}{\sqrt{(E/c)^2 - B^2}}\exp(\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) - \frac{m\beta/q}{\sqrt{(E/c)^2 - B^2}}\exp(-\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m)$$

$$x^3 = \frac{Bm\alpha/q}{(E/c)^2 - B^2}\exp(\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) - \frac{Bm\beta/q}{(E/c)^2 - B^2}\exp(-\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) + \xi B\tau$$

$$x^0 = \frac{Em\alpha/cq}{(E/c)^2 - B^2}\exp(\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) - \frac{Em\beta/cq}{(E/c)^2 - B^2}\exp(-\sqrt{(E/c)^2 - B^2}q\tau/m) + \xi\tau E/c$$

Uwaga: jeśli $E^2 < c^2B^2$ to zamieniamy $\sqrt{(E/c)^2 - B^2} \to i\sqrt{B^2 - (E/c)^2}$ a stałe α i β są sprzężone $\beta = \bar{\alpha}$.

Podpowiedź do zadań z relatywistyki: warto korzystać z wynikającej ze wzorów $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ oraz $p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ogólnej tożsamości $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$.

Serię przygotował Wojciech Górecki