Mechanika Klasyczna 2019/2020
Kolokwium II, 13.01.2020

Zadanie 1.

Znaleźć pędy uogólnione, hamiltonian i nawias Poissona $\{v_x, v_y\}$ ($v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$) ładunku q o masie m w polu magnetycznym $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ Wsk. Cechowanie $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$.

$$L = mv^2/2 + qBxv_y$$

stąd $p_x = mv_x$, $p_y = mv_y + qB$, $p_z = mv_z$

$$H = (p_x^2 + (p_y - qBx)^2 + p_z^2)/2m$$

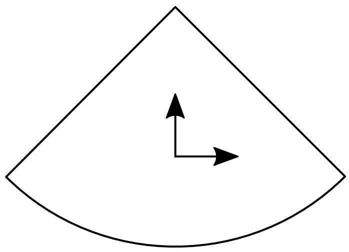
oraz

$$\{v_x, v_y\} = \{p_x/m, (p_y - Bx)/m\} = qB/m^2$$

Zadanie 2.

Znaleźć środek masy i macierz tensora bezwładności, jednorodnej ćwiartki kuli o masie m i promieniu R. Znaleźć momenty główne.

Wskazówka: 2 kierunki główne są równoległe do wektorów jak na rysunku, trzeci prostopadły do nich. Można też zrobić diagonalizację.



Środek masy $(3R/8, 3R/8, 0)$(1p.). Tensor bezwładności (2,5p.)

$$2mR^2/5 \begin{pmatrix} 1 & -1/\pi & 0 \\ -1/\pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Momenty główne $2mR^2(1 \pm 1/\pi)/5$ oraz $2mR^2/5$ względem środka całej kuli (1,5p.) Alternatywnie, względem środka masy, z tw. Steinera $2mR^2/5$, $2mR^2(1 + 1/\pi)/5$ oraz $mR^2(2(1 - 1/\pi)/5 - 9/32)$

Zadanie 3.

Jednorodna kulka o promieniu r stacza się bez poślizgu po nieruchomej półkuli o promieniu R w polu grawitacyjnym g. Na jakiej wysokości kulka oderwie się od półkuli jeśli na biegunie miała (prawie) zerową prędkość? Można założyć $r \ll R$.

Wskazówka: Wykorzystać zachowanie energii i znaleźć przypieszenie dośrodkowe środka masy kulki. Moment bezwładności kuli $2mr^2/5$ względem środka masy.

$v = \omega r$, $T = mv^2/2 + I\omega^2/2 = 7mv^2/10$, $V = mgh$,

$$E = mg(R + r) = mgh + 7mv^2/10$$

$$mv^2/(R + r) = mgh/(R + r)$$

czyli

$$R + r = h + 7h/10$$

czyli $h = 10(R + r)/17$

Wzory:

$\vec{F} = m\vec{a}$
$m\vec{a} = \vec{F}_{zewn} + \sum_k \lambda_k \vec{\nabla} f_k(\vec{r})$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$
$\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$
$\vec{F}_O = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$
$\vec{F}_g = m\vec{g}$
$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$
$w'' + w = -\frac{mr^2 F_r}{J^2}$
$E = (w')^2 + w^2 + 2mV(1/w)J^2$
$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{bdb}{\sin\theta d\theta}$
$F_G = -Gm_1 m_2 \boldsymbol{e}_r/r^2$
$p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$, $H(p, q, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$
$\{F, G\} = \sum_j (\partial F/\partial q_j \partial G/\partial p_j - \partial G/\partial q_j \partial F/\partial p_j)$
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{J} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}$, $2T_r = I'_x \omega'^2_x + I'_y \omega'^2_y + I'_z \omega'^2_z$, $T = I\omega^2/2$
$I_{zz} = \int \rho(x^2 + y^2)dV$, $I_{xy} = -\int \rho xy dV$, $I_d = I_0 + md^2$