

Mechanika Klasyczna 2019/2020
Kolokwium I, 2.12.2019

Zadanie 1.

Cząstka o masie m i ładunku q znajduje się w stałym polu magnetycznym $\vec{B} = B\hat{e}_z$ i w anty-pułapce harmoniczej – czyli w potencjale $-\frac{k}{2}(x^2+y^2)$, gdzie x, y to współrzędne ładunku a $k > 0$. Znaleźć ruch cząstki jeśli w chwili początkowej miała ona położenie $(x_0, 0, 0)$ i prędkość $(0, v_0, 0)$. Dla jakiej wartości v_0 i x_0 nie ucieknie do nieskończoności?

Ocena: Wypisanie sił, Lagranżjanu, równań E-L lub równań Newtona + dyskusja do 3pkt w zależności od kompletności wymienionych, próba rozwiązania układu równań w zależności od skuteczności do 1 pkt dyskusja warunku ucieczki do 1 pkt

Rozwiązanie

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} + kx, \quad m\ddot{y} = -qB\dot{x} + ky, \quad m\ddot{z} = 0$$

Z warunków początkowych wynika że $z = 0$. Niech $w = x + iy$. Wtedy

$$m\ddot{w} = -iqB\dot{w} + kw$$

Podstawiając $w = e^{\lambda t}$ mamy

$$m\lambda^2 + iqB\lambda - k = 0$$

czyli

$$2m\lambda = -iqB \pm \sqrt{4mk - qB}$$

Cząstka nie ucieknie jeśli λ będzie urojone czyli $4mk < qB$ lub jeśli część rzeczywista będzie ujemna tj.

$$2m\lambda = -iqB - \sqrt{4mk - qB}$$

Tymczasem $w(0) = x_0$ oraz $\dot{w}(0) = iv_0 = \lambda w(0) = \lambda x_0$ Stąd $\lambda = iv_0/x_0$

Zadanie 2.

Koralik o masie m ślizga się bez tarcia po obręczy w kształcie okręgu o promieniu R obracającego się ze stałą prędkością kątową ω wokół swojej średnicy, równoległej do pola grawitacyjnego g . Znaleźć (a) stałą ruchu, (b) położenia równowagi i ich trwałość (c) częstość małych drgań wokół położenia równowagi trwałej.

Rozwiązanie:

$$T = m|\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2/2 = mR^2\dot{\phi}^2 + m\omega^2 R^2 \sin^2 \phi/2$$

$$V = -mg \cos \phi$$

czyli

$$\tilde{V} = -mgR \cos \phi - m\omega^2 R^2 \sin^2 \phi/2$$

Stała ruchu $H = mR^2\dot{\phi}^2 + \tilde{V} = E$. Znajdujemy ekstrema $\tilde{V}$ z warunku $\tilde{V}' = 0$ czyli

$$g \sin \phi = \omega^2 R \sin \phi \cos \phi$$

co ma rozwiązania $\phi = 0, \pi$ oraz

$$\phi_0 = \arccos(g/\omega^2 R)$$

o ile $g < \omega^2 R^2$. Dla $g > \omega^2 R^2$ jedynym minimum jest $\phi = 0$ a częstość małych drgań $\sqrt{g/R^2 - \omega^2}$. Dla $g > \omega^2 R^2$ minimum jest w ϕ_0 . Rozwijając $\tilde{V}$ w szereg Taylora dostaniemy

$$\tilde{V} \simeq \tilde{V}(\phi_0) + \omega^2 R \sin^2 \phi_0 (\phi - \phi_0)^2 / 2$$

co daje częstość $\omega \sin \phi_0 = \sqrt{\omega^2 - g^2/R^2 \omega^2}$. Dla $\omega^2 = g/R$ drgania są anharmoniczne i częstość formalnie jest zerowa.

Zadanie 3.

Znaleźć ruch cząstki o masie m i energii całkowitej E w jednym wymiarze w potencjale $V(x) = -A/\cosh^2(ax)$, $A = \text{const} > 0$, $a = \text{const} > 0$. Przyjąć warunek początkowy $x(t=0) = 0$. Wskazówka: zastosować podstawienie $y = \sinh(ax)$.

Ocena: równania ruchu 2p., ich poprawne rozwiązanie 2p., przypadek $E < 0$ 1p.

Rozwiązanie:

$$E = T + V = m\dot{x}^2/2 - A/\cosh^2(ax) = \frac{m\dot{y}^2/2a^2 - A}{1+y^2}$$

jest stałą czyli

$$m\dot{y}^2/2a^2 = E + A + Ey^2$$

Niech $s = (t/a)\sqrt{m/2}$

$$ds/dy = \pm(E + A + Ey^2)^{-1/2}$$

Ruch jest możliwy dla $E \geq -A$. Stąd dla $E > 0$

$$s = E^{-1/2} \text{arsinh}(y\sqrt{E/(E+A)})$$

dla $E < 0$

$$s = (-E)^{-1/2} \arcsin(y\sqrt{-E/(E+A)})$$

a dla $E = 0$

$$s = y/\sqrt{A}$$

Odwrotnie

$$y = \begin{cases} \sqrt{1+A/E} \sinh(s\sqrt{E}) & \text{dla } E > 0 \\ \sqrt{-1-A/E} \sin(s\sqrt{-E}) & \text{dla } E < 0 \\ \sqrt{A}s & \text{dla } E = 0 \end{cases}$$

Wzory:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{zewn} + \sum_k \lambda_k \vec{\nabla} f_k(\vec{r})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

$$\vec{F}_O = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')^{\sharp}$$

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$w''+w=-\frac{mr^2F_r}{J^2}$$

$$E=(w')^2+w^2+2mV(1/w)J^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{bdb}{\sin\theta d\theta}$$

$$F_G=-Gm_1m_2\boldsymbol{e}_r/r^2$$