Mechanika Klasyczna 2019/2020
Egzamin, 28.01.2020

Zadanie 1.

Znaleźć nierelatywistyczny ruch ładunku q o masie m w stałych polach elektrycznym $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$ i magnetycznym $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. Założyć początkową prędkość prostopadłą do pola $\boldsymbol{B}$.

$$m\dot{v}_x = qE + qv_yB,\ m\dot{v}_y = -qv_xB,\ m\dot{v}_z = 0$$

Stąd $v_z = 0$ oraz $m^2\ddot{v}_y = -(qB)^2 v_y$ czyli

$$v_x = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

gdzie $\omega = qB/m$. Wtedy

$$v_y = \dot{v}_x/\omega - E/B = \beta\cos(\omega t) - \alpha\sin(\omega t) - E/B$$

Można wyznaczyć $\alpha = v_x(0)$, $\beta = v_y(0) + E/B$. Dalej $z = z(0)$,

$$x = (\alpha\sin(\omega t) - \beta\cos(\omega t)/\omega + x(0) + \beta/\omega$$

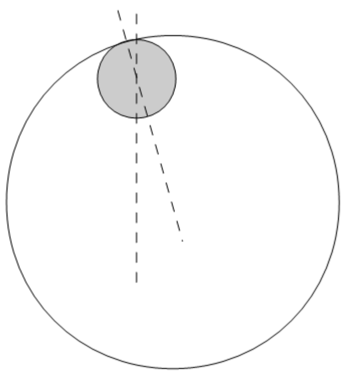
$$y = (\beta\sin(\omega t) + \alpha\cos(\omega t))/\omega - Et/B + y(0) - \alpha/\omega$$

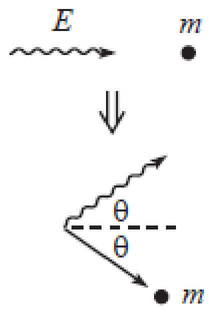
Zadanie 2.

Znaleźć częstość małych drgań cienkiej jednorodnej obręczy o promieniu R kołyszącej w polu grawitacyjnym g (wektor $\boldsymbol{g}$ jest w płaszczyźnie obręczy) bez poślizgu na nieruchomym walcu o promieniu r, $r < R$.

$$I_0 = mR^2,\ v = (R - r)\dot{\phi} = R\omega$$

Stąd $T = mv^2/2 + mR^2\omega^2/2 = m(R - r)^2\dot{\phi}^2$ a $V = -mg(R - r)\cos\phi$ Zatem $L = T - V$ i możemy rozwinąc $V \simeq mg(R - r)\phi^2/2$. Częstość małych drgań $\Omega = \sqrt{g/2(R - r)}$





Zadanie 3.

W spoczywającą cząstkę o masie m uderza foton o energii E. W efekcie powstaje nowy foton (o nieznanej energii), w taki sposób, że nowy foton oraz początkowa cząstka m poruszają się pod tym samym kątem θ względem początkowego kierunku ruchu fotonu. Wyznaczyć θ jako funkcję m i E.

$$p_y = 0 = ((E'/c) - p)\sin\theta$$
$$p_x = E/c = (E'/c + p)\cos\theta$$
$$mc^2 + E = E' + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

StÄ…d $E' = pc$, $\cos\theta = E/(E' + pc) = E/2pc$, a z kolei

$$(mc^2 + E - E')^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

czyli

$$(mc^2 + E)^2 - 2pc(mc^2 + E) = m^2c^4$$
$$2pc = \frac{E(E + 2mc^2)}{E + mc^2}$$

i ostatecznie

$$\cos\theta = \frac{E + mc^2}{E + 2mc^2}$$

Wzory:

$\vec{F} = m\vec{a}$, $m\vec{a} = \vec{F}_{zewn} + \sum_k \lambda_k \vec{\nabla} f_k(\vec{r})$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$, $\vec{F}_O = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

$\vec{F}_g = m\vec{g}$, $\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$,

$w'' + w = -\frac{mr^2F_r}{J^2}$

$E = (w')^2 + w^2 + 2mV(1/w)J^2$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{bdb}{\sin\theta d\theta}$, $F_G = -Gm_1m_2\boldsymbol{e}_r/r^2$

$p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$, $H(p, q, t) = \sum_j p_j\dot{q}_j - L$

$\{F, G\} = \sum_j (\partial F/\partial q_j \partial G/\partial p_j - \partial G/\partial q_j \partial F/\partial p_j)$

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{J} = \hat{I}\boldsymbol{\omega}$, $2T_r = I'_x\omega'^2_x + I'_y\omega'^2_y + I'_z\omega'^2_z$, $T = I\omega^2/2$

$I_{zz} = \int \rho(x^2 + y^2)dV$, $I_{xy} = -\int \rho xy dV$, $I_d = I_0 + md^2$

$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $x = \gamma(x' + v't)$, $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$, $\dot{\boldsymbol{p}} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$

$\dot{E} = q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\gamma$, $E = mc^2\gamma$, $E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$

$dt/d\tau = \gamma$, $\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{r}/d\tau$, $u^0 = cdt/d\tau$, $md\boldsymbol{u}/d\tau = q(u^0\boldsymbol{E}/c + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})$

$mcdu^0/d\tau = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{E}$, $\sum \boldsymbol{p} = \text{const}$, $\sum E = \text{const}$