

Mechanika Klasyczna 2019/20
zadania na ćwiczenia 1

1. Iloczyn skalarny $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, wektorowy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ i mieszany $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ w 3 wymiarach
2. Delta Kroneckera δ_{ij} , symbol Leviego-Civity (epsilon) ϵ_{ijk} , konwencja sumacyjna i własność $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ (ewentualnie też inne)
3. Tożsamości wektorowe $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
4. Obroty jako macierze $\hat{R}$ takie że $\hat{R}^T \hat{R} = \hat{I}$ oraz $\det \hat{R} = 1$ (komentarz o odbiciu czyli $\det = -1$). Przykład obrót wokół osi z , pokazać równość

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dowolną metodą (np. pochodna po ϕ , rozwinięcie w szereg, Cayley-Hamilton, diagonalizacja). Przedyskutować zależność od czasu $\phi = \omega t$ i wektor prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, pochodną po czasie.

5. Pokazać, że obroty tworzą grupę (składanie, el. neutralny i odwrotny)
6. (gdyby został czas) Pokazać, że każdy obrót ma oś ogólnie postać $\exp \hat{W}$, gdzie $\hat{W}$ jest macierzą antysymetryczną

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$$

i zapis $\exp(\boldsymbol{\omega} \times)$. Dowód np. przez fakt że wartości własne są sprzężone o module 1 i jedna ± 1 a znak $+$ zostaje z $\det = 1$ i przejście do bazy gdzie odpowiedni wektor własny jest na osi z .

7. Pokazać, że obroty o $\pi/2$ wokół osi x i y są nieprzemienne
8. Rozłożyć prędkość i przyspieszenie w bazie sferycznej $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$. Przypomnieć że to baza ortonormalna.
9. Zależność $\mathbf{r}(t)$ jest dana

$$(e^{at} \cos(bt), e^{at} \sin(bt), 0)$$

znaleźć wektory styczny i normalny $\mathbf{t}$ i $\mathbf{n}$ i rozłożyć w nich prędkość i przyspieszenie. Znaleźć promień krzywizny toru. Rozłożyć prędkość i przyspieszenie w bazie biegunowej (sferycznej).

10. Obliczyć prędkość i przyspieszenie z poprzedniego zadania w układzie obracającym się wokół środka z $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.