Matematyka IL, Seria nr 7

Zad.1

Zbadaj różniczkowalność funkcji:

$$1.\ f(x) = \sqrt{x-1}, \qquad 2.\ f(x) = |3x| \ln|x+5|, \qquad 3.\ f(x) = \sqrt[3]{x}|1-x|.$$

Zad.2

Oblicz pochodne funkcji (zmiennej rzeczywistej):

1. $u(x) = \ln x + \sin(x+2)\,\cos(x-2)$,
2. $w(y) = \mathrm{arcctg}(y^3+1)$,
3. $r(t) = \sinh(\sqrt{t})$,
4. $s(v) = \frac{\cosh v}{v^3+2v^2-10v-1}$,
5. $k(x) = \mathrm{ctg}\,\sin\,\cos x$,
6. $g(r) = \frac{4}{5}\sqrt{(1+\ln x)^5}$,
7. $y(x) = x^3 - \sqrt[5]{3-x} + \log_7(1+x^2)$,
8. $m(x) = x^4\,\cos^2(x^3\,\cos(x^2))$,
9. $t(x) = \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\ln(x^2-2x+3)}$,
10. $\beta(x) = \frac{2}{\sqrt{7}} e^{\mathrm{ctg\,x}}$,
11. $\zeta(x) = 4^x + |1+2x|^{1+2x}$,
12. $\xi(x) = e^{\sqrt[3]{\mathrm{arcctg}(1+5x)}}$,
13. $\chi(x) = \frac{\cos(8+x)}{\sin(\mathrm{tg\,x})} + \ln(\sqrt{\mathrm{ctg\,x}})$.
14. $\ln_{(1+x^2)}(1+x)$.

Zad.3

Wiedząc, że funkcję:

$$f(x) = \mathrm{arctg}(x+a) + bx^2,$$

można przybliżyć w otoczeniu $x_0 = 0$:

$$f(x) \cong x + 2x^2 + ...,$$

wyznacz $a, b \in \mathbb{R}$.

Zad.4

Znajdź wzór Maclaurina dla $f(x) = \cos x$.

Zad.5

Dana jest funkcja $g(x) = x^2 + bx + c$. Wyznacz b i c tak, aby dla $x = 2$ funkcja ta miała wartość 3, a jej pochodna $g'(x)$ wartość 6.

Zad.6

Wykazać, że:

1. normalne do krzywej $y(x) = x^2 - x + 1$ w punktach:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = \frac{5}{2}$$

przecinają się w jednym punkcie.

2. styczne do krzywej $y(x) = \frac{1+x^2}{3+x^2}$ w punktach przecięcia krzywej z prostą $y = \frac{1}{2}$ przecinają się w punkcie $P = (0, \frac{1}{4})$.

3. funkcja $y = e^x \sin x$ spełnia równanie:

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Zad.7

Zbadaj funkcje i narysuj ich wykresy:

1. $y = 32x^2(x^2-1)^3$,
2. $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$,
3. $y = x^2\, e^{-2x}$,
4. $y = \frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+21}$,
5. $y = \frac{1}{\cos x}$.

A. Chęcińska