

Matematyka I L
Seria 6

Zadanie 1

Proszę znaleźć granice funkcji bez wykorzystania reguły de l'Hôspitala:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2x^2}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right\}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x + 5x^2}{2 - x + 3x^2}$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

14. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{3x}$
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\arcsin x}$
19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{-3x^2 + x - 2\}$
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{-3x^3 - x + 5}$
21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^3 + x^2 - 6x + 1}{4x^3 + x - 1}$
22. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^4 + 1}{x^3 + 7x - 2}$
23. $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^{\frac{1}{x}}$ dla $0 < a < 1$
24. $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} 2^{tg(x)}$
25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\operatorname{arctg} x)$
26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x}$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin 3x}{x} + 1}$
29. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left| \frac{x+1}{x^2+2} \right|$
30. $\lim_{x \rightarrow 1} 3^{-1/(x-1)^2}$
31. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot 2^{1/x}$

Zadanie 2

Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ 0 & \text{dla } 0 < x < 2 \\ 2x - 4 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

Proszę przeanalizować ciągłość tej funkcji i sporządzić wykres.

Zadanie 3

Proszę przeanalizować ciągłość i znaleźć (jeżeli istnieją) asymptoty krzywych:

1. $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x + 1}$

$$2. f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 4x + 2}$$

$$3. f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$4. f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$5. f(x) = \frac{2}{1 - x^2}$$

Zadanie 4

Funkcja $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ nie jest określona dla $x = 0$. Jaką wartość należy nadać tej funkcji w punkcie $x = 0$, aby była ciągła w tym punkcie?

Zadanie 5

Proszę wykazać, że funkcja $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ nie ma granicy w punkcie $x = 0$, wraz z interpretacją geometryczną.

Zadanie 6

Proszę znaleźć granice funkcji wykorzystując regułę de l'Hôspitala:

$$1. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot 2^{1/x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1 + x)}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}$$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}$
14. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \cdot \operatorname{tg} 5x$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \frac{1}{\sin \frac{x}{3}} \right\}$
16. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot e^{\sqrt{x}}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(x + e^x)$
18. $\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{7}{x^7 - 1} \right\}$
19. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \sin(2x - 1) \cdot \operatorname{tg} \pi x$
20. $\lim_{\phi \rightarrow 0} \left\{ \operatorname{ctg} \phi - \frac{1}{\phi} \right\}$
21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{1/x}$
22. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x} \right)^x$
24. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} 2x)^{1/\ln x}$
25. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\cos k \alpha)^{1/\alpha^2}$
26. $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$

8 grudnia 2006

Dominika Konikowska