

Matematyka II, 2006/2007

Seria 4: Szeregi i grupy

Zadanie 1. Zbadać zbieżność następujących szeregów ($x \in \mathcal{R}$) i w wypadku zbieżności obliczyć ich sumę:

$$\text{a) } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+2)} + \dots$$

$$\text{b) } 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} 9^n (3x - 5)^{2n+2}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n^2 + 5}$$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n - 1}{n^2 + n + 1}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$$

$$\text{c) } 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \dots$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^3}$$

Zadanie 3. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3^n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^2}$$

Zadanie 4. Znaleźć przedział zbieżności następujących szeregów funkcyjnych ($x \in \mathcal{R}$):

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n-1}}{3n+1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2+1)^n}{n3^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} x^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

Zadanie 5. Wypisać tabelkę działania dla następujących grup:

a) grupy symetrii prostokąta ze składaniem symetrii,

b) grupy $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ z dodawaniem *modulo* 4,

c) grupy $Z'_5 = \{1, 2, 3, 4\}$ z mnożeniem *modulo* 5.

Porównać z ogólnymi tabelkami działań dla grupy czteroelementowej.

Uwaga: Dodawanie (mnożenie) *modulo* n przyporządkowuje parze argumentów resztę z ilorazu ich sumy (iloczynu) przez n .