

## Matematyka II, 2006/2007

Seria 3: Funkcje i ciągi

**Zadanie 1.** Określić dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji:

- a)  $y = \sqrt{\arccos \ln(1-x)}$
- b)  $y = \sqrt{\arcsin \ln(1-x)}$
- c)  $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$
- d)  $y = \operatorname{ar} \cosh(1-x) + \arccos(1+x)$

**Zadanie 2.** Rozwiązać równania:

- a)  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$
- b)  $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{2}$
- c)  $e^2 + e^{-2} = 2 \cosh x$
- d)  $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 2$

**Zadanie 3.** Obliczyć:

- a)  $\log_2 3 \log_3 4 \log_4 5 \log_5 6 \log_6 7 \log_7 8$
- b)  $\cos\left(2006\frac{\pi}{3}\right)$
- c)  $\cos(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{15})$
- d)  $\operatorname{tgh}(2 \operatorname{ar} \sinh \sqrt{15})$

**Zadanie 4.** Udowodnić tożsamości:

- a)  $\frac{\sin(\operatorname{arc} \cos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sgn} x$
- b)  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- c)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
- d)  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} & (xy < 1) \\ \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} & (x > 0, xy > 1) \\ -\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} & (x < 0, xy > 1) \end{cases}$
- e)  $\sinh x \pm \sinh y = 2 \sinh \frac{x \pm y}{2} \cosh \frac{x \mp y}{2}$
- f)  $\operatorname{ar} \operatorname{tgh} x \pm \operatorname{artgh} y = \operatorname{ar} \operatorname{tgh} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}$

**Zadanie 5.** Dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  dobrać takie  $N$ , aby dla każdego  $n > N$  zachodziła nierówność  $|a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n| < \varepsilon$ , gdy:

- a)  $a_n = \sqrt{\frac{n+3}{n+1}}$
- b)  $a_n = \frac{n}{n^2+1}$
- c)  $a_n = \frac{2^n-1}{3^n+1}$

**Zadanie 6.** Obliczyć granice ciągów:

a)  $\frac{2n^3+3n^2-4n+5}{5n^3-4n^2+3n-2}$

b)  $\frac{(-1)^n}{2n^2-1}$

c)  $\frac{\sqrt[3]{8n^3-n}}{\sqrt{9n^2+n}}$

d)  $\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n-n}}$

e)  $\sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}$

f)  $\sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$

g)  $\frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3}$

h)  $\frac{2^{n+1} - 3^{n+2}}{3^n}$

i)  $\sqrt[n]{10^n + 10^{-n} + 5^n \sin^2 n!}$

j)  $\sqrt[2n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$

k)  $\sqrt[n]{n^3 + 3n^2 + 5}$

l)  $\frac{n!}{(n+1)! - n!}$

m)  $\frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$

n)  $\left(\frac{n^2+5}{n^2}\right)n^2$

o)  $\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2}\right)^{2n}$

p)  $\frac{\sin \frac{2}{n}}{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}$

r)  $\sqrt[2]{7} \sqrt[4]{7} \sqrt[8]{7} \dots \sqrt[2^n]{7}$

s)  $\frac{n^{100}}{100^n}$

t)  $\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$

u)  $\frac{n}{\ln(n!)}$