

Zadania z Matematyki I L, seria nr 2

**Zad.1** Udowodnij indukcyjnie, że:

$$n^3 - n, n \in \mathbb{N},$$

jest podzielne przez 6.

**Zad.2** Udowodnij indukcyjnie, że:

$$3^{4n+2} + 1, n \in \mathbb{N},$$

jest podzielne przez 10.

**Zad.3** Udowodnij indukcyjnie, że ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**Zad.4** Udowodnij indukcyjnie wzór na sumę  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego.

**Zad.5** Udowodnij indukcyjnie ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right).$$

**Zad.6** Znajdź piąty wyraz rozwinięcia dwumianu:

$$\left( 2x^2 - \frac{1}{x^3} \right)^{20}.$$

**Zad.7** Znajdź wyrazy rozwinięcia dwumianu

$$\left( \sqrt[3]{3} + \sqrt{2} \right)^5,$$

które są liczbami naturalnymi.

**Zad.8** Wykaż, że:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

**Zad.9** Dla funkcji  $y(x) = 2^{\sqrt{x}}$ :

- określ dziedzinę i przeciwdziedzinę  $y(x)$
- sporządź wykres  $y(x)$  oraz funkcji  $g(x) = 2^{\sqrt{x+1}} - 1$ .

**Zad.10** Oblicz:

$$a) \log_{3\sqrt{3}} 27, \quad b) 2^{\log_{2\sqrt{2}} 15}, \quad c) \log_9(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}).$$

**Zad.11** Dla jakich wartości  $k$  równanie

$$\frac{\log(kx)}{\log(x+1)} = 2$$

ma tylko jeden pierwiastek?

**Zad.12** Dla funkcji  $f(x) = \log_3(x-1)$ :

- określ dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji
- sporządź wykres  $f(x)$  oraz wykres funkcji  $h(x) = -\log_3(x+1) + 1$ .

**Zad.13** Określ dziedzinę funkcji:

- $y(x) = \log(x-2) - \ln(4-x)$ ,
- $y(x) = \sqrt{1 - 2^{x+|x|}}$ ,
- $y(x) = \frac{|x-1|}{(x^2-1)\ln(x^2-1)}$ .
- $y(x) = \log(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x)$ ,
- $y(x) = \frac{\log(16-x^2)}{\sqrt{\sin x}}$ .

**Zad.14** Czym różni się wykres funkcji  $y = \log_3 x^2$  od wykresu funkcji  $y = 2 \log_3 x$ ?

**Zad.15** Rozwiąż równania:

- $5^x - 5^{3-x} = 20$ ,
- $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$ ,
- $\log(\frac{1}{2} + x) = \log \frac{1}{2} - \log x$ .