

**Analiza wielofraktalnej struktury czasów
międzytransakcyjnych za pomocą modelu
błądzenia przypadkowego w czasie
ciągłym**

Andrzej Kasprzak

**Praca doktorska
wykonana w ramach Studiów Doktoranckich
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego**

Promotor: dr hab. Ryszard Kutner prof. ndzw. UW

*Zakład Dydaktyki Fizyki
Instytut Fizyki Doświadczalnej
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski*

Warszawa, marzec 2010 r.

Podziękowania

Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi
dr hab. Ryszardowi Kutnerowi prof. ndzw. UW za opiekę naukową.
Pragnę podziękować również mojej żonie Asi za wsparcie.

Spis treści

I	Wstęp	9
1	Motywacja i cel pracy	11
2	Transport dyspersyjny - doświadczenia Sharfe'a, Gilla i Pfistera	15
2.1	Błądzenie przypadkowe w czasie ciągłym	17
2.1.1	Podstawowe wielkości modelu	19
2.1.2	Rozkład warunkowy czasów oczekiwania w obecności dryfu	22
2.1.3	Propagator jednocząstkowy	24
2.1.4	Postać zamknięta propagatora	27
2.1.5	Uogólnione równanie mistrza	28
2.1.6	Ogólna postać pierwszego momentu	29
2.2	Konkretne obliczenia w ramach modelu dolinowego	30
2.2.1	Przykładowa postać funkcji rozkładu czasów oczekiwania	30
2.2.2	Równanie skalowania	34
2.2.3	Rozkład Lévy'ego a rozkład Poissona: wyjaśnienie zagadki potęgowej relaksacji fotoprądu	39
2.2.4	Średni czas oczekiwania	41
II	Multifraktalny Model Błądzeń Przypadkowych w Czasie Ciągłym	43
3	CTRW a teoria kolejek	47
3.1	Wprowadzenie do analizy	47
3.2	Wykorzystanie modelu dolinowego w teorii kolejek	49
3.2.1	Charakterystyczne przykłady dotyczące teorii kolejek	50
3.3	Momenty czasów oczekiwania	53
3.3.1	Monofraktalność a multifraktalność	54

4	Systematyczna analiza charakterystycznych danych empirycznych	61
4.1	Przykładowa analiza czasów międzytransakcyjnych spółki KGHM . . .	62
4.1.1	Pierwsze wyniki - wizualizacja danych	62
4.1.2	Lokalna średnia i dyspersja międzytransakcyjnych odstępów czasowych	64
4.1.3	Normalizacja czasów międzytransakcyjnych	66
4.1.4	q -momenty	68
4.2	Analiza innych spółek	72
4.3	Porównanie danych empirycznych dotyczących q -momentów z przewidywaniami modelu	76
4.4	Krótkie podsumowanie części II i pierwsze wnioski	89
III	Analogie przemian fazowych na rynkach finansowych	91
5	Analiza momentów	95
5.1	Wprowadzenie	95
5.1.1	Lista głównych zagadnień	97
5.2	q -momenty czasów międzytransakcyjnych: multifraktalność generowana przez fluktuacje	98
5.2.1	Superstatystyki i q -momenty	99
5.2.2	Kolejne wyniki dla q -momentów	104
6	Multifraktalność a formalizm termodynamiczny	109
6.1	Suma statystyczna w formalizmie MF-CTRW	109
6.1.1	Wieloskalowa postać funkcji podziału: wymiar Rényi	112
6.1.2	Spektrum wymiarów lokalnych	116
6.2	Finansowe przemiany fazowe wyższych rzędów	119
6.2.1	Uwagi dotyczące ciepła właściwego	120
IV	Ogólne podsumowanie	129
V	Dodatki	133
A	Obliczenie całki $I_0(q)$	135

B	Obliczenie całki $I(q)$	137
C	Obliczenie całki $J(q')$	141
D	Informacja Rényi na jednostkę objętości i wymiar graniczny	145
E	Dalsze przydatne własności spektrum singularności	147
E.1	Przypadek $q' \rightarrow \infty$	147
E.2	Przypadek $q' = 1$	149
E.3	Przypadek $q' = 0$	150

Część I

Wstęp

Rozdział 1

Motywacja i cel pracy

Niniejsza praca leży w nurcie badań nad wielofraktalnymi¹ strukturami występującymi na rynkach finansowych [1] (i odnośniki literaturowe tamże). Nurt ten został zapoczątkowany wprowadzeniem przez Benoit Mandelbrota pojęcia multifraktala (struktury multifraktalnej), które pojawiło się jako naturalne rozszerzenie pojęcia fraktala (struktury fraktalnej²). Właśnie pracom Mandelbrota, sięgającym połowy lat 60-tych XX wieku³, zawdzięczamy zwrócenie uwagi na niebrownowski⁴ charakter fluktuacji cen aktywów i wartości indeksów na rynkach finansowych [3] (i odnośniki literaturowe tamże). Jednakże dopiero od roku 1991, czyli od chwili ukazania się w czasopiśmie *Physica A* publikacji Rosario Nunzio Mantegny pt.: *Lévy walks and Milan stock exchange* dotyczącej niegaussowskich rozkładów zmian mediolańskiego indeksu giełdowego MIB15⁵ [4], datuje się systematyczny wkład środowiska fizyków m.in. do badań rynków finansowych. Z tego też powodu datę tę traktuje się jako narodziny współczesnej ekonofizyki [5] (i odnośniki literaturowe tamże).

Niniejsza praca opiera się głównie na mojej publikacji [6] z roku 2008 oraz przyjętej w tym roku do druku pracy [7], wygłoszonej przeze mnie na międzynarodowej konferencji APFA7 w Tokio w 2009 r.

Przez ostatnie dwie dekady, zarówno metodologie, jak też formalizmy, teorie i modele rozwijające się głównie w ramach fizyki statystycznej, fizyki materii skon-

¹Terminy: *wielofraktalność*, *multifraktalność*, *wieloułamkowość* i *multiułamkowość* traktowane są jak synonimy.

²Nazwę, ale nie pojęcie *fraktala* wprowadził Benoit Mandelbrot, natomiast pojęcie fraktala zawdzięczamy W. Sierpińskiemu.

³Przegląd tych prac można znaleźć np. w książce [2].

⁴Pod terminem *brownowski* rozumiem proces brownowski w tradycyjnym sensie, a nie w sensie fraktalnego lub wielofraktalnego ruchu Browna; oczywiście, proces niebrownowski stanowi jego zaprzeczenie.

⁵Przypomnijmy, MIB15 jest indeksem piętnastu największych branż notowanych na giełdzie w Mediolanie; MIB jest akronimem włoskiej nazwy *Milan Index Borsa*. Mantegna wykazał, że mamy tutaj do czynienia z rozkładem Lévy'ego zmian tego indeksu.

densowanej oraz teorii pola przenoszone były (i nadal są) do analizy zjawisk i procesów ekonomicznych, pomimo dzielących je różnic [8]. Co więcej, ten rodzaj badań od ponad dekady ma swoją oficjalną nazwę *ekonofizyka* [5]. Nazwa ta narodziła się w czasopiśmie *Physica A*, w którym została stworzona sekcja pod taką właśnie nazwą, gdzie publikowane są prace z pogranicza szeroko rozumianej fizyki, ekonomii i socjologii. Aktualnie, nazwa ta jest już obecna np. w oficjalnym, amerykańskim wykazie PACS (ang. *The Physics and Astronomy Classification Scheme*) w rozdz. 89 pn.: *Other areas of applied and interdisciplinary physics* (§ 89.65.Gh) a szereg renomowanych naukowych czasopism fizycznych (takich jak np. *Science*, *Nature*, *Physical Review Letters*, *Physical Review*, *Physica A*, *The European Physical Journal B*, *International Journal of Modern Physics C*, *Acta Physica Polonica A i B*) otworzyło swoje łamy dla tego typu prac badawczych⁶.

Ogólny cel niniejszej pracy ma charakter dwojaki:

- 1) z jednej strony wskazuje na znaczenie modelu Błądzeń Przypadkowych⁷ w Czasie Ciągłym (ang. *Continuous-Time Random Walk model*, CTRW) np. w teorii kolejek jak też w analizie notowań ciągłych na rynkach finansowych (patrz rys. 1.1),
- 2) z drugiej strony, dokonane w pracy istotne rozszerzenie tego modelu czyni go przydatnym do badania struktur multifrakalnych zawierających singularność⁸, zaobserwowanych np. na rynkach finansowych. Stąd, dzięki transformacji Legendre'a, można było wykorzystać formalizm termodynamiki równowagowej do wykrycia i zbadania przemian fazowych wyższych rzędów⁹. Analiza ta umożliwiła wprowadzenie (dodatkowej obok już istniejących) globalnej miary ryzyka mogącej ułatwić podejmowanie decyzji inwestycyjnych.

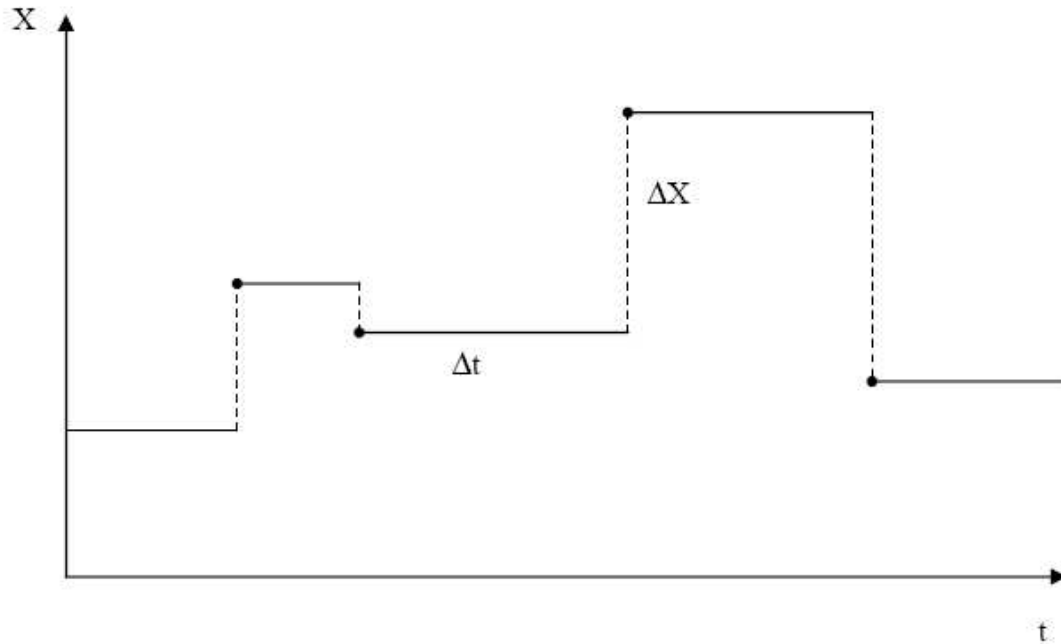
Można ogólnie powiedzieć, że **niniejsza praca łączy dwa niezależne dotychczas podejścia: analizę błędzeń losowych w ramach modelu CTRW oraz oryginalną analizę multifrakalną losowych, dynamicznych struktur osobliwych (nieanalitycznych) związanych z procesami stochastycznymi**. Należy jednak dodać, że odpowiedź na pytanie o powiązanie przedstawionej w pracy analizy multifrakalnej ze znaną Multifrakalną Analizą Zdetrendowanych Fluktuacji (ang. *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*, MF-DFA) wciąż pozostaje zagadnieniem otwartym, pomimo podobieństwa uogólnionych wykładników skalowania.

⁶Zwięzłe omówienie wybranych celów ekonofizyki można także znaleźć w pracy doktorskiej [9] oraz w cytowanej tam literaturze.

⁷W niniejszej pracy terminy 'przypadkowy' i 'losowy' używane są zamiennie.

⁸W tej pracy terminy 'singularność' i 'osobliwość' używane są jako synonimy.

⁹W dalszym ciągu mówiąc w tym kontekście o przemianach fazowych mam na myśli jedynie analogie tych przemian.



Rysunek 1.1: Schematyczne przedstawienie błędzenia skokowego zmiennej losowej X w czasie ciągłym t (zwanego potocznie *hoppingiem* lub *jumpingiem*), którego szczególnym przypadkiem mogą być notowania ciągłe na giełdzie. Cechą charakterystyczną tego błędzenia jest to, że zarówno czas oczekiwania Δt na skok jak też wielkość tego skoku ΔX są zmiennymi losowymi. Właśnie do opisu tego typu sytuacji szczególnie dobrze nadaje się model CTRW.

Innymi słowy, przynajmniej na dzień dzisiejszy podejście przedstawione w niniejszej rozprawie należy traktować jako komplementarne do wspomnianego powyżej.

Odpowiednio do tego dwójakiego charakteru pracy, została ona podzielona na dwie zasadnicze części:

- 1) w pierwszej (część I oraz rozdziały 3.1 i 3.2 z części II) przedstawiłem drogę na jakiej wprowadzono, najpierw do fizyki a potem np. w teorii kolejek, model CTRW oraz
- 2) drugiej (pozostała część II i część III) w której zastosowałem uogólniony wariant tego modelu, rozwinięty przeze mnie
 - a) zarówno do analizy multifraktalnej struktury czasów międzytransakcyjnych¹⁰ na różnych rynkach finansowych, jak też

¹⁰Mówiąc o czasach międzytransakcyjnych mam na myśli przedziały czasu Δt przedstawione

- b) do badania różnych przemian fazowych, a w tym przede wszystkim wyższych rzędów, których istnienie jest konsekwencją wspomnianej multifraktalności.

schematycznie na rys. 1.1. Wielkość tych przedziałów jest odbiciem aktywności giełdowej, czy nawet temperamentu inwestorów. Fakt, że tego typu losowe przedziały czasu mogą tworzyć struktury multifraktalne został zasygnalizowany w roku 2005 w pracy [1] (rozdz. 9.2), stanowiąc jedną z głównych inspiracji niniejszej pracy doktorskiej.

Rozdział 2

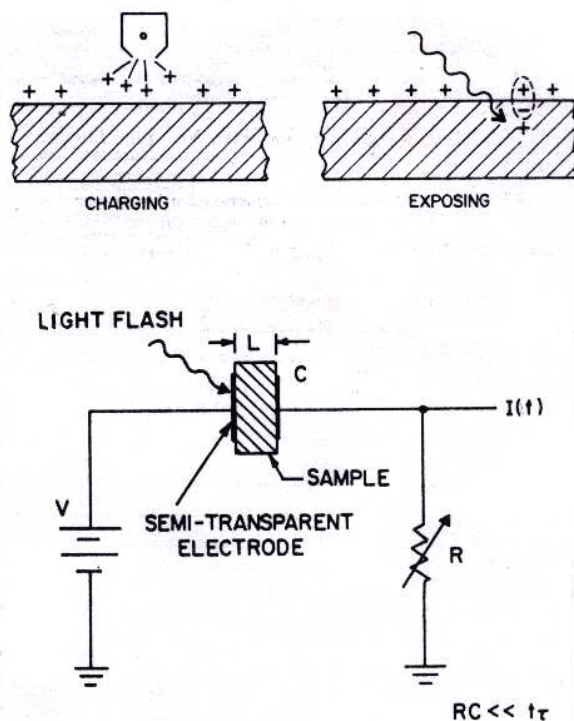
Transport dyspersyjny - doświadczenia Sharfe'a, Gilla i Pfistera

Doświadczenie fizyczne, w którym zaobserwowano anomalny, dyspersyjny transport zostało wykonane po raz pierwszy w roku 1970 przez M.E. Sharfe'a [10]. W 1974 roku G. Pfister podjął dalsze badania nad tym zagadnieniem [11], analizując zależność anomalnego transportu od ciśnienia przyłożonego do próbki. Obaj autorzy badali zależne od częstości fotoprzewodnictwo w amorficznym $\alpha\text{As}_2\text{Se}_3$, mierząc zanikanie w czasie fotoprądu wywołanego krótkotrwałym impulsem świetlnym.

Układ pomiarowy tego doświadczenia został schematycznie przedstawiony na rys. 2.1. Jak widać, jego zasadniczym elementem jest próbka zbudowana ze wspomnianego powyżej światłoczułego półprzewodnika (o przewodnictwie dziurowym) umieszczona pomiędzy dwiema elektrodami, z których jedna (złota) jest półprzezroczysta dla światła. Impulsowe oświetlenie tej elektrody pozwala na wygenerowanie w próbce przewodzących dziur, które - dzięki przyłożonej do elektrod (niewielkiej) różnicy potencjałów - wędrują do przeciwnej elektrody, dając zanikający w czasie prąd dziurowy. Natężenie tego fotoprądu $I(t)$ zostało zmierzone w funkcji czasu t .

Wynik tego doświadczenia (czarne i białe kółka oraz kwadraty a także czarny trójkąt i plus) przedstawiono (w skali $\log - \log$ dla filmów o różnej grubości L) na rys. 2.2 - widać dwa różne obszary potęgowej zależności fotoprądu od czasu. **Właśnie te potęgowe relaksacje fotoprądu stały się inspiracją powstania modelu CTRW** zdolnego do opisanie błędzenia (a w tym transportu i dyfuzji) nośników w materiale amorficznym.

Dla porównania na rys. 2.3 (lewa część) zamieszczono zależność pokazującą sytuację normalną, gdy dyfuzja (odpowiedzialna za poszerzanie się rozkładu) i dryf (odpowiedzialny za jego propagację) opisane są biegnącym i "rozpływającym" się

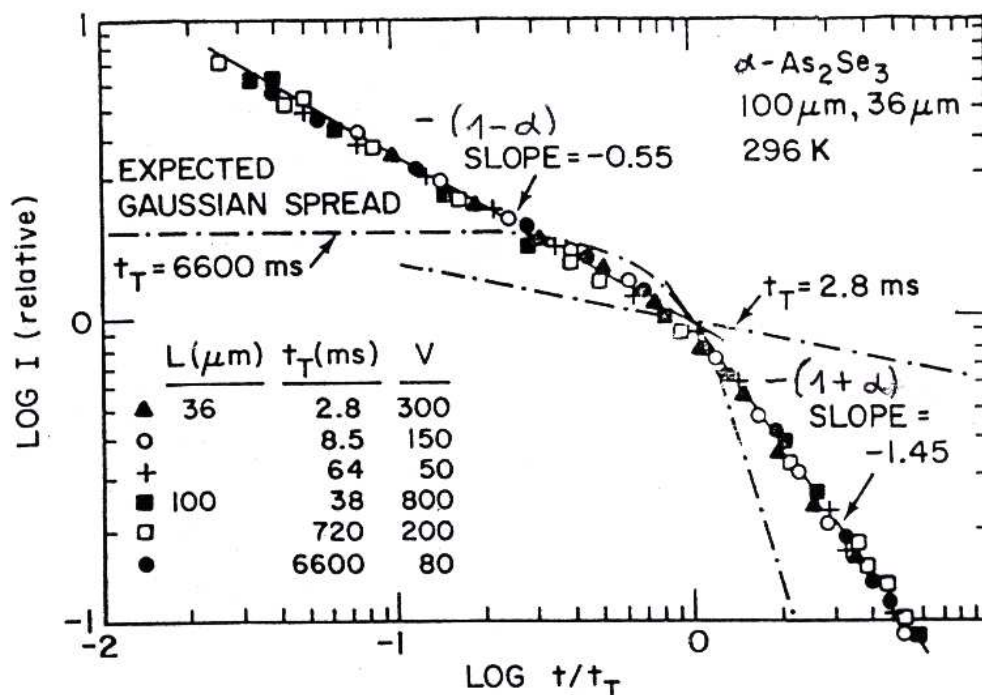


Rysunek 2.1: Schematyczny układ elektryczny (dolna część rysunku) do pomiaru relaksacji fotoprądu $I(t)$ w amorficznych filmach. Próbka (film) o grubości L jest tutaj umieszczona pomiędzy dwiema elektrodami, z których lewa jest półprzezroczysta dla padającego impulsu światła (ang. LIGHT FLASH). Przy okazji, górna część rysunku ilustruje powstawanie w materiale obrazu utajonego, stanowiącego podstawę działania techniki kserograficznej. Rysunek zaczerpnięto z pracy [10].

rozkładem Gaussa. Prawa część rysunku dotyczy rozkładu Pareto-Lévy'ego i została omówiana w części II.

Warto dodać, iż zaobserwowany efekt potęgowej relaksacji fotoprądu ma charakter ogólniejszy a mianowicie, w 1972 roku W.D. Gill [12] zmierzył go także dla organicznego kompleksu trinitrofluorenonu i polynwinylcarazolu.

Jednym z zasadniczych celów niniejszej pracy jest wykazanie, że znaleziony efekt, czyli relaksacja potęgowa (przedstawiony na rys. 2.2) jest wynikiem dyfuzji anomalnej i dyspersyjnego transportu obserwowanych na rynkach finansowych, przy czym różnice mogą dotyczyć tutaj jedynie wartości wykładnika Pareto-Lévy'ego.



Rysunek 2.2: Relaksacja fotoprądu (czarne i białe kółka oraz kwadraty, a także czarny trójkąt i plus) zmierzona w amorficznych filmach $\alpha\text{As}_2\text{Se}_3$ o różnej grubości L i przyłożonej różnicy potencjałów V . Wykres zaczerpnięty z pracy [11].

2.1 Błądzenie przypadkowe w czasie ciągłym

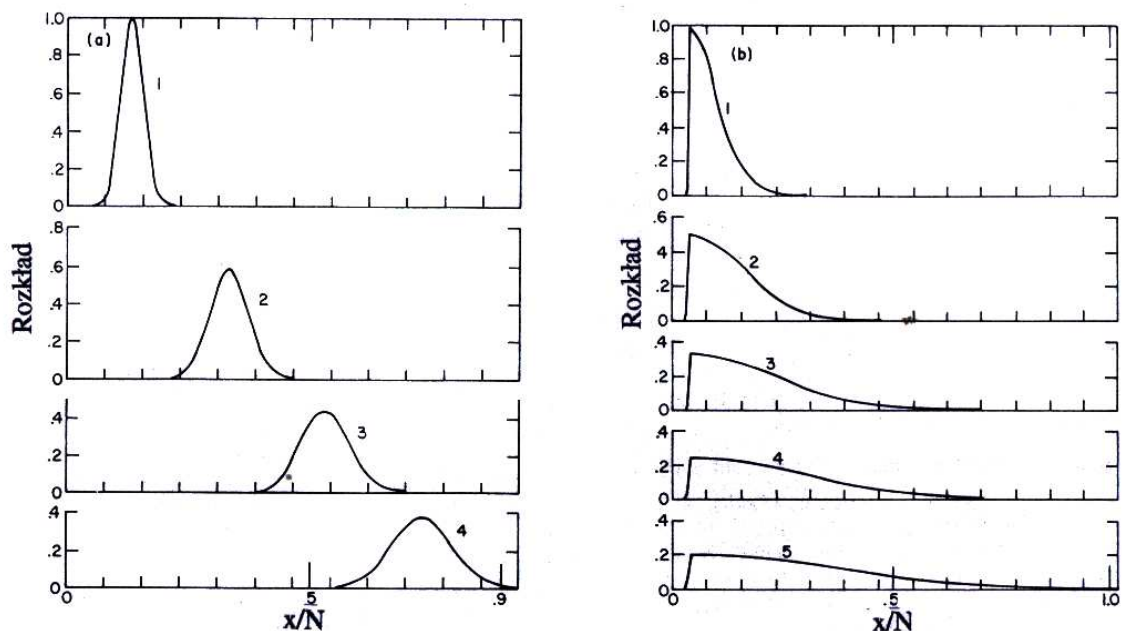
W niniejszym rozdziale przedstawiam model skokowego błądzenia pojedynczego atomu¹ w czasie ciągłym; różni się on od wcześniejszych, istotnie prostszych modeli, gdyż były one asymptotycznie równoważne modelowi skokowego błądzenia atomu ale w czasie dyskretnym.

Rozważmy teraz dwa przypadki błądzenia przypadkowego:

- 1) pod nieobecność zewnętrznego pola (przykładowy potencjał przedstawiono na rys. 2.4),
- 2) w obecności zewnętrznego pola (rys. 2.5) wywołującego dryf.

To właśnie **wprowadzenie formalizmu matematycznego pozwalającego opisać błądzenie w każdej chwili, czyli wprowadzenie czasu ciągłego, stanowiło przełomowy krok w teorii błądzeń przypadkowych**. Umożliwiło to

¹W niniejszej pracy termin *atom*, *cząstka*, *cząsteczka*, *molekuła* używam zamiennie.



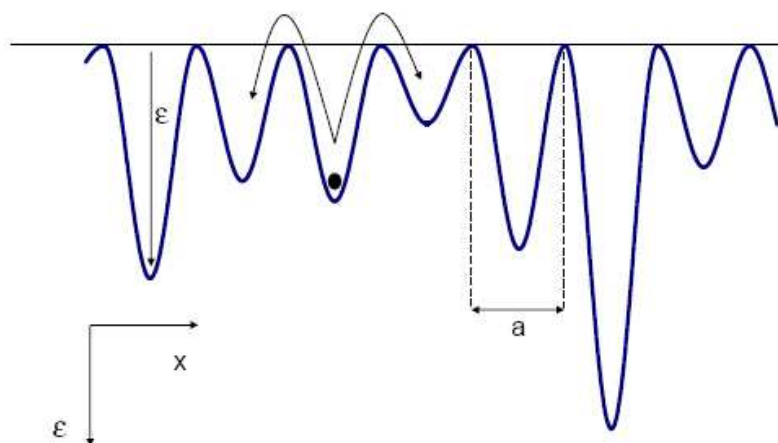
Rysunek 2.3: Dyfuzja i dryf unormowanego rozkładu ładunku danego propagującym się rozkładem Gaussa (lewa część rysunku) oraz propagującym się rozkładem Pareto-Lévy'ego (prawa część rysunku) - będzie jeszcze o tym mowa w części II. Oś odciętych oznacza względną odległość od lewej elektrody (tutaj N jest grubością filmu). Rysunek wykonano na podstawie pracy [11].

wyprowadzenie badań poza *Centralne Twierdzenie Graniczne*, czyli rozszerzyło je na procesy niegaussowskie, tzn. wychodzące poza ruch Browna², a w tym zwłaszcza na procesy z pamięcią; te ostatnie były jednym ze sposobów wprowadzenia do fizyki *procesów Lévy'ego*.

Potencjały przedstawione na rysunkach 2.4 oraz 2.5 są podstawą popularnego *dolinowego modelu błędzeń przypadkowych*³ (ang. *valley model*), który w dalszym ciągu analizujemy pod nieobecność oraz w obecności zewnętrznej stałej siły F wywołującej dryf.

²Chodzi tutaj o tradycyjnie rozumiany ruch Browna a nie wprowadzony przez Mandelbrota ułamkowy ruch Browna.

³Model ten należy do grupy modeli nazywanej *przypadkowym pułapkowaniem* (ang. *random trap models*).



Rysunek 2.4: Błądzenie molekuly (oznaczonej schematycznie za pomocą czarnego kółka) w potencjale dolinowym (narysowanym schematycznie za pomocą granatowej krzywej) pod nieobecność zewnętrznego pola. Przeskoki molekuly mają charakter ponadbarierowy (co zaznaczono wygiętymi strzałkami). Rysunek sporządzono na podstawie analogicznego, zamieszczonego w skrypcie [13].

2.1.1 Podstawowe wielkości modelu

Ilościowe sformułowanie modelu rozpoczynam od wprowadzenia⁴:

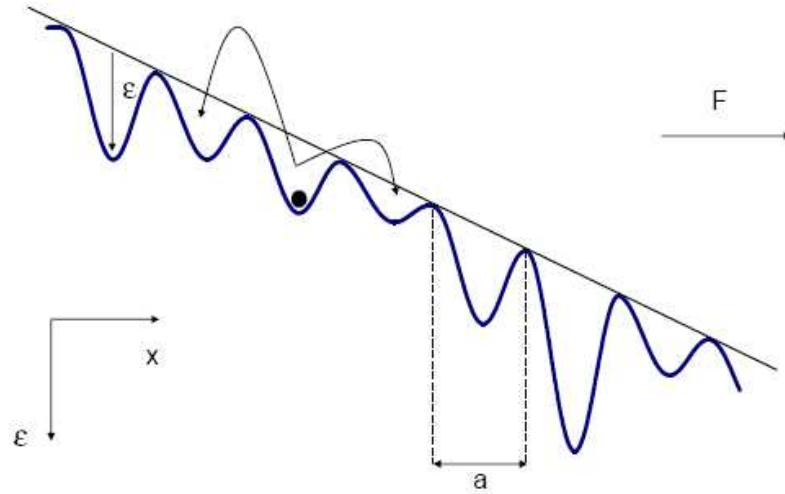
- 1) prawdopodobieństwa $\Phi_{\epsilon}(t)$ przetrwania cząsteczki w danej dolinie potencjału o głębokości \mathcal{E} ⁵ przynajmniej przez okres czasu t , czyli przetrwania od chwili początkowej w której cząsteczka pojawiła się w niej przynajmniej do chwili t (tzn. cząsteczka może przetrwać dłużej w danej dolinie potencjału ale na pewno nie krócej),

oraz powiązanej z nią

- 2) funkcji rozkładu czasów oczekiwania cząsteczki w dolinie potencjału, $\phi_{\epsilon}(t)$. Funkcja $\phi_{\epsilon}(t)$ jest zdefiniowana jako gęstość prawdopodobieństwa, że cząsteczka przetrwa w (dowolnie) wybranej dolinie potencjału o głębokości \mathcal{E} od chwili początkowej (czyli od chwili przybycia), dokładnie do chwili t , tzn. dokładnie w chwili t opuści tę dolinę.

⁴Niniejszy podrozdział a także podrozdziały 2.1.2 - 2.1.6 oraz rozdz. 2.2 powstały na bazie skryptu [13] (i literatury tam zamieszczonej).

⁵Na rysunkach 2.4 i 2.5 głębokość doliny potencjału oznaczono przez ϵ .



Rysunek 2.5: Błądzenie molekuly (oznaczonej schematycznie za pomocą czarnego kółka) w potencjale dolinowym (narysowanym schematycznie za pomocą granatowej krzywej) w obecności zewnętrznego, stałego pola siły F . (Nachylenie krzywej potencjału jest tutaj przesadnie duże tylko dlatego aby było dobrze widoczne.) Przeskoki molekuly mają charakter ponadbarierowy (co zaznaczono wygiętymi strzałkami). Rysunek sporządzono na podstawie analogicznego, zamieszczonego w skrypcie [13].

Z powyższych dwóch definicji wynika następujący związek pomiędzy obiema funkcjami,

$$\Phi_{\varepsilon}(t) = \int_t^{\infty} dt' \phi_{\varepsilon}(t') = 1 - \int_0^t dt' \phi_{\varepsilon}(t'), \quad (2.1)$$

gdzie druga równość została otrzymana dzięki warunkowi normalizacji

$$\int_0^{\infty} dt \phi_{\varepsilon}(t) = 1. \quad (2.2)$$

Warunek ten mówi, że w dowolnie wybranej dolinie potencjału cząstka z pewnością przetrwa dowolnie długi okres czasu.

Z wyrażenia całkowego (2.1) wynika użyteczna zależność różniczkowa

$$\frac{d\Phi_{\varepsilon}(t)}{dt} = -\phi_{\varepsilon}(t). \quad (2.3)$$

Funkcja ϕ_{ε} jest wygodniejszą do dalszego operowania dlatego traktujemy ją w naszym modelu jako podstawową; często jednak, zwłaszcza na etapach pośrednich, posługujemy się także obiema funkcjami.

Wprowadzam teraz warunkową funkcję rozkładu czasów oczekiwania w danej dolinie potencjału o głębokości \mathcal{E} , w postaci rozkładu Poissona (wykładniczego)

$$\phi_{\mathcal{E}}(t) = \nu^0(\mathcal{E}) \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t), \quad (2.4)$$

gdzie $\nu^0(\mathcal{E})$ jest częstością przeskoków cząsteczki w sąsiednie doliny potencjału pod nieobecność zewnętrznej siły wywołującej dryf (w przypadku jednowymiarowym mogą to być przeskoki do dwóch najbliższych leżących sąsiednich miejsc, patrz rys. 2.4). Z powyższego wzoru oraz relacji (2.1) otrzymujemy, że

$$\Phi_{\mathcal{E}}(t) = \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t). \quad (2.5)$$

Następnie przystępuję do skonstruowania warunkowej, separowalnej funkcji rozkładu czasów oczekiwania, którą oznaczam przez $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$ (zapis ten nie ma nic wspólnego z analogicznym, oznaczającym funkcję falową w mechanice kwantowej). W tym celu musimy dodatkowo wprowadzić

- 3) przestrzenny rozkład przemieszczeń $p(x)$ zdefiniowany jako gęstość prawdopodobieństwa przemieszczenia się cząsteczki o wektor x (ponieważ ruch cząsteczki jest jednowymiarowy dlatego dla uproszczenia opuściliśmy strzałkę nad tą zmienną).

Oczywiście, gęstość $p(x)$ spełnia warunek normalizacyjny

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1. \quad (2.6)$$

Przykładowo, rozkład $p(x)$ można przyjąć w prostej postaci

$$p(x) = \frac{1}{2}[\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad (2.7)$$

gdzie a jest stałą odległością pomiędzy sąsiednimi dolinami potencjału. Tego typu rozkład dopuszcza, jak widać, jedynie przeskoki pomiędzy równoodległymi dolinami oddalonymi o a . Zatem **amorficzność substratu (filmu) przejawia się tutaj tylko w postaci losowo zmieniającej się głębokości dolin potencjału**, a nie odległości między dolinami.

Teraz możemy zapisać, że

$$\psi_{\mathcal{E}}(x, t) = p(x)\phi_{\mathcal{E}}(t); \quad (2.8)$$

jak widać, *warunkowy, czasoprzestrzenny rozkład czasów oczekiwania*, $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$, jest gęstością prawdopodobieństwa następującej sekwencji zdarzeń: najpierw cząsteczka przetrwa w danym miejscu (tzn. dolinie potencjału) aż do chwili t a następnie,

dokładnie w chwili t , przemieści się (a dokładniej dokona przeskoku) o wektor⁶ x . Separowalność warunkowego rozkładu jest tutaj narzucona separowalnością obu zmiennych stochastycznych, tj. przemieszczenia x oraz czasu t . Zauważmy, że przedział czasu występuje tutaj jako zmienna losowa, co - jak zobaczymy - w niczym nie zmienia roli czasu. Zakładając separowalność rozkładu $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$ przyjmujemy tym samym, że dwa zasadniczo różne zdarzenia takie jak oczekiwanie oraz przemieszczenie się cząsteczki są od siebie statystycznie niezależne⁷.

Z warunków normalizacyjnych (2.2), (2.6) oraz definicji (2.8) wynika bezpośrednio niezbędny warunek normalizacyjny

$$\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\mathcal{E}}(x, t) = 1. \quad (2.9)$$

W przypadku ogólniejszym, gdyby funkcja rozkładu $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$ nie była separowalna, wówczas musielibyśmy warunek (2.9) po prostu narzucić jako wymaganą normalizację. Wtedy, w analogii do definicji (2.1), otrzymalibyśmy, że

$$\Psi_{\mathcal{E}}(t) = \int_t^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\mathcal{E}}(x, t') = 1 - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{\mathcal{E}}(x, t'), \quad (2.10)$$

gdzie interpretacje funkcji $\Psi_{\mathcal{E}}(t)$ oraz $\Phi_{\mathcal{E}}(t)$ byłyby identyczne. W przypadku separowalnym, który dotyczy zarówno błędzenia pod nieobecność jak też w obecności pola, uzyskujemy ponadto, że $\Psi_{\mathcal{E}}(t) = \Phi_{\mathcal{E}}(t)$. Warto podkreślić, że druga równość występująca w (2.10) ma charakter ogólny, niezależny od własności separowalności funkcji rozkładu $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$ i wynika tylko z warunku normalizacyjnego (2.9).

2.1.2 Rozkład warunkowy czasów oczekiwania w obecności dryfu

Występowanie systematycznego dryfu (wywołanego zewnętrzną siłą działającą na wędrującą molekułę, patrz rys. 2.5) zmienia, jak zobaczymy, postać funkcji rozkładu czasów oczekiwania $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$ oraz wymaga rozszerzenia relacji (2.1). Jednak nadal jako podstawowego rozkładu warunkowego można używać funkcji $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$.

W pierwszym kroku wprowadzamy częstość $\nu^{\pm}(\mathcal{E})$ przeskoku atomu pomiędzy sąsiednimi dolinami potencjału (patrz rys. 2.5) w kierunku odpowiednio zgodnym z polem zewnętrznym (znak +) oraz przeciwnym do niego (znak -). Zgodnie z interpretacją funkcji rozkładu przybiera ona teraz postać

$$\psi_{\mathcal{E}}(x, t) = \psi_{\mathcal{E}}^{+}(x, t) + \psi_{\mathcal{E}}^{-}(x, t), \quad (2.11)$$

⁶Występujący tutaj przedział czasu t jest równoważny przedziałowi Δt z rys. 1.1, podobnie jest dla zmiennych x i ΔX .

⁷W fizyce wynika ono z faktu, że najczęściej czas przebywania molekuly w dolinie potencjału jest znacznie dłuższy od okresu jej oscylacji w tej dolinie co pozwala jej "zapomnieć" o swojej historii.

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie na cząstkowe, warunkowe funkcje rozkładu czasów oczekiwania

$$\psi_{\mathcal{E}}^{\pm}(x, t) = \nu^{\pm}(\mathcal{E})\delta(x \mp a) \exp(-\nu(\mathcal{E})t), \quad (2.12)$$

wynikające z istnienia dryfu, przy czym sumaryczna częstość

$$\nu(\mathcal{E}) = \nu^+(\mathcal{E}) + \nu^-(\mathcal{E}) \quad (2.13)$$

oraz częstości kierunkowe

$$\nu^{\pm}(\mathcal{E}) = p^{\pm}\nu^0(\mathcal{E}), \quad (2.14)$$

gdzie zależna od siły zewnętrznej F waga

$$p^{\pm} = \frac{\exp(\pm Fa/2k_B T)}{\exp(Fa/2k_B T) + \exp(-Fa/2k_B T)} = \frac{1 \exp(\pm Fa/2k_B T)}{2 \cosh(Fa/2k_B T)}, \quad (2.15)$$

jest prawdopodobieństwem wyboru jednej z dwóch orientacji pojedynczego przeskoku - jak widać, ma miejsce niezbędna normalizacja $p^+ + p^- = 1$. Co więcej, gdy zewnętrzne pole znika (tzn. gdy $F = 0$) wtedy (jak być powinno) $p^+ = p^- = 1/2$.

Przy okazji zauważmy, że z wyrażeń (2.13) - (2.15) wynika pożyteczna relacja,

$$\nu(\mathcal{E}) = \nu^0(\mathcal{E}). \quad (2.16)$$

W oparciu o wyrażenia (2.12), (2.14) oraz (2.4) otrzymujemy, że

$$\psi_{\mathcal{E}}^{\pm}(x, t) = p^{\pm}\delta(x \mp a)\nu^0(\mathcal{E}) \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t) = p^{\pm}\delta(x \mp a)\phi_{\mathcal{E}}(t). \quad (2.17)$$

Tym samym **rozkład warunkowy czasów oczekiwania w obecności dryfu można także przedstawić w postaci separowalnej**

$$\psi_{\mathcal{E}}(x, t) = p(x)\phi_{\mathcal{E}}(t), \quad (2.18)$$

formalnie identycznej do tej danej wyrażeniem (2.8) dla przypadku braku zewnętrznego pola, gdzie teraz

$$p(x) = p^+\delta(x - a) + p^-\delta(x + a) \quad (2.19)$$

jest uogólnieniem wyrażenia (2.7) na przypadek uwzględniający istnienie zewnętrznego pola. Tzn. zewnętrzne pole zmienia $p(x)$ nie zmieniając funkcji $\phi_{\mathcal{E}}(t)$, gdyż zależy ona tylko od sumarycznej częstości (2.16).

W przypadku słabego pola zewnętrznego (a tylko z takim mamy tutaj do czynienia), czyli $Fa/2 \ll k_B T$, wyrażenie (2.15) upraszcza się do postaci liniowej,

$$p^{\pm} \approx \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{Fa}{2k_B T} \right), \quad (2.20)$$

szczególnie przydatnej w teorii liniowej odpowiedzi (np. przy obliczaniu podatności i przewodnictwa).

W drugim kroku, dysponując wyrażeniami (2.11) na funkcję rozkładu $\psi_{\mathcal{E}}(x, t)$ oraz pomocniczymi określeniami (2.12) - (2.20), możemy już skorzystać z rozszerzonej definicji (2.10) gęstości prawdopodobieństwa $\Psi_{\mathcal{E}}(t)$ przetrwania cząsteczki (przynajmniej) przez czas t w danej dolinie potencjału o głębokości \mathcal{E} , uzyskując postać

$$\Psi_{\mathcal{E}}(t) = \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t) = \Phi_{\mathcal{E}}(t), \quad (2.21)$$

czyli identyczą, jak w przypadku braku zewnętrznego pola. Oba zasadnicze wzory, zarówno (2.18) jak i (2.21), wynikają z separowalności obu cząstkowych, warunkowych funkcji rozkładu czasów oczekiwania oraz niezależności sumarycznej częstości przeskoków $\nu(\mathcal{E})$ od zewnętrznego pola.

Dysponując wprowadzonymi powyżej gęstościami prawdopodobieństw, przystępujemy do obliczenia propagatora⁸ opisującego proces błędzenia przypadkowego - zarówno pod nieobecność, jak też w obecności zewnętrznego pola.

2.1.3 Propagator jednocząstkowy

Zasadniczym zadaniem niniejszego rozdziału jest wyznaczenie propagatora $\mathcal{P}(X, t | X_0, t_0)$ lub inaczej mówiąc jednocząstkowego rozkładu warunkowego zdefiniowanego jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki w położeniu X w chwili t ⁹ pod warunkiem, że początkowo cząsteczka ta znajdowała się w położeniu X_0 w chwili t_0 . Cząsteczka mogła pojawić się w danej dolinie potencjału w położeniu X w chwili t w wyniku następujących procesów:

- 1) mogła trwać w danej dolinie potencjału o głębokości \mathcal{E}_0 w położeniu $X (= X_0)$ od samego początku aż do chwili t , o ile tak się złożyło, że położenie to było początkowym - takie trwanie opisujemy za pomocą propagatora warunkowego $P_{\mathcal{E}_0=\mathcal{E}}^{(0)}(X, t | X_0, t_0)$,
- 2) mogła się znaleźć w położeniu X w dolinie potencjału o głębokości \mathcal{E} w wyniku pojedynczego przeskoku - proces ten opisujemy propagatorem $P_{\mathcal{E}_0,\mathcal{E}}^{(1)}(X, t | X_0, t_0)$, lub
- 3) w wyniku dwóch kolejnych przeskoków przedzielonych oczekiwaniem w jakiejś dolinie potencjału o głębokości \mathcal{E}_1 - proces ten opisujemy propagatorem $P_{\mathcal{E}_0,\mathcal{E}_1,\mathcal{E}}^{(2)}(X, t | X_0, t_0)$,

⁸Przez propagator rozumiemy tutaj i w całej pracy prawdopodobieństwo warunkowe mówiące o przemieszczeniu cząsteczki z miejsca początkowego do aktualnego w czasie od chwili początkowej poczynając na aktualnej kończąc.

⁹Teraz t oznacza daną chwilę a nie przedział czasu.

4) itd., itp., ogólnie rzecz biorąc,

5) cząsteczka mogła pojawić się w danej dolinie potencjału w położeniu X w chwili t w wyniku $n(\geq 1)$ przeskoków, z których każdy był poprzedzony (krótszym lub dłuższym) oczekiwaniem w jakiejś dolinie potencjału kolejno o głębokości $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}$ - proces ten opisujemy za pomocą cząstkowego (warunkowego) propagatora $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t | X_0, t_0)$.

Reasumując, powyższe procesy ujmujemy za pomocą sumarycznego propagatora

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}(X, t | X_0, t_0) &= P_{\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}}^{(0)}(X, t | X_0, t_0) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t | X_0, t_0), \end{aligned} \quad (2.22)$$

opisującego gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki w położeniu X w chwili t w wyniku dowolnego procesu, tzn. trwania w położeniu początkowym ($X = X_0$, za co jest odpowiedzialny składnik o indeksie $n = 0$ w wyrażeniu (2.22)) bądź też jako rezultat procesu składającego się z dowolnej liczby (wyrazy z $n \geq 1$) występujących na przemian oczekiwań i przeskoków.

Można teraz postawić pytanie o związek wcześniej wprowadzonego propagatora $\mathcal{P}(X, t | X_0, t_0)$ z powyżej zdefiniowanym $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}}(X, t | X_0, t_0)$? Aby znaleźć ten związek zapiszmy w jawnej postaci propagatory cząstkowe wprowadzając nieco uproszczoną notację. Mianowicie,

$$P_{\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}}^{(0)}(X, t) (\equiv P_{\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}}^{(0)}(X, t | X_0, t_0)) = \delta(X - X_0) \Psi_{\mathcal{E}}(t - t_0), \quad (2.23)$$

następnie

$$P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}}^{(1)}(X, t) (\equiv P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}}^{(1)}(X, t | X_0, t_0)) = \int_0^t dt_1 \psi_{\mathcal{E}_0}(X - X_0, t_1 - t_0) \Psi_{\mathcal{E}}(t - t_1), \quad (2.24)$$

oraz

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}}^{(2)}(X, t) (\equiv P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}}^{(2)}(X, t | X_0, t_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \\ &\psi_{\mathcal{E}_0}(X_1 - X_0, t_1 - t_0) \psi_{\mathcal{E}_1}(X - X_1, t_2 - t_1) \Psi_{\mathcal{E}}(t - t_2), \end{aligned} \quad (2.25)$$

itd., w ogólności zapisujemy

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t) (\equiv P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}, \mathcal{E}}^{(n)}(X, t | X_0, t_0)) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dX_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \\ \psi_{\mathcal{E}_0}(X_1 - X_0, t_1 - t_0) \psi_{\mathcal{E}_1}(X_2 - X_1, t_2 - t_1) \dots \psi_{\mathcal{E}_{n-1}}(X - X_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \\ \Psi_{\mathcal{E}}(t - t_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

W wyrażeniach (2.23) - (2.26) w funkcjach typu Ψ i ψ występują różnice czasów, gdyż ich warunkiem początkowym jest chwila t_0 , w której pojawiła się cząstka. Zależność od różnicy czasów takich rozkładów warunkowanych, które opisują tylko jedno zdarzenie jakim jest wyczekiwanie, jest oczywista i nie wymaga tego aby układ był w stanie równowagi zupełnej bądź cząstkowej. Analogiczna sytuacja ma miejsce dla różnicy zmiennych przestrzennych, która dotyczy tylko pojedynczego zdarzenia jakim jest przeskok. Co więcej, wyrażenia te zostały skonstruowane przy założeniu, że pierwsze oczekiwanie i następujący po nim przeskok są opisywane tą samą funkcją rozkładu co i następne tego typu pary zdarzeń.

Jak widać, propagatory warunkowe P zawierają w sobie dodatkowo informacje o głębokościach odwiedzonych przez cząsteczkę dolin potencjału; dopiero uśrednienie tych propagatorów po jednowymiarowych "krajobrazach" energetycznych daje propagatory bezwarunkowe oznaczone przez \mathcal{P} . Omawiam teraz tę procedurę średniowania.

Zakładamy, że głębokości dolin potencjału są od siebie statystycznie niezależne co oznacza, że rozkład $\rho(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \dots)$ z którym średniujemy propagatory cząstkowe $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n}^{(n)}(X, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, a stąd propagator sumaryczny $P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \dots}(X, t)$, faktoryzuje się, tzn.

$$\rho(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \dots) = \rho(\mathcal{E}_0)\rho(\mathcal{E}_1) \dots \rho(\mathcal{E}_n) \dots \quad (2.27)$$

Na mocy powyższego, średniując równości (2.23) oraz (2.26), otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(0)}(X, t) &= (\equiv \mathcal{P}^{(0)}(X, t | X_0, t_0)) = \delta(X - X_0)\Psi(t - t_0), \\ \mathcal{P}^{(n)}(X, t) &(\equiv \mathcal{P}^{(n)}(X, t | X_0, t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 \\ &\int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \psi(X_1 - X_0, t_1 - t_0) \psi(X_2 - X_1, t_2 - t_1) \dots \\ &\psi(X - X_{n-1}, t_n - t_{n-1}) \Psi(t - t_n), \\ &n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.28)$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia wielkości średnich

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int_0^{\infty} d\mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) \psi_{\mathcal{E}}(x, t), \\ \Psi(t) &= \int_0^{\infty} d\mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) \Psi_{\mathcal{E}}(t) = \int_t^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x, t') = 1 - \int_0^t dt' \psi(t'), \\ \mathcal{P}^{(n)}(X, t) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} d\mathcal{E}_0 d\mathcal{E}_1 \dots d\mathcal{E}_n \\ &\rho(\mathcal{E}_0) \rho(\mathcal{E}_1) \dots \rho(\mathcal{E}_n) P_{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n}^{(n)}(X, t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.29)$$

które w dalszym ciągu zinterpretujemy, wskazując na sposób ich realizacji¹⁰. W drugim wierszu w ostatniej równości w (2.29) wprowadziliśmy oznaczenie

$$\psi(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x, t'). \quad (2.30)$$

Zauważmy jeszcze, że przeprowadzone powyżej średniowanie odpowiada średniowaniu po niezależnie błędzących molekułach. Można sobie wyobrazić, że jest to realizowane w rozważanym układzie w postaci błędzenia każdej z molekuł wzdłuż jednowymiarowych, niezależnych od siebie linii, składających się z równoodległych dolin potencjału o głębokościach podlegających wspomnianemu rozkładowi $\rho(\mathcal{E})$.

Przy okazji zwróćmy uwagę, że z dwóch pierwszych wyrażeń w (2.29) wynika bezpośrednio, że

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\psi(t); \quad (2.31)$$

w ten sposób dysponujemy wzorami analogicznymi do (2.1) i (2.3), jak być powinno - są to ogólne warunki samozgodności modelu. Dla przypadku separowalnego powyższa relacja przechodzi, jak trzeba, w następującą

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\phi(t). \quad (2.32)$$

Ostatecznie, z (2.28) oraz (2.22) otrzymujemy wyrażenie

$$\mathcal{P}(X, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^{(n)}(X, t), \quad (2.33)$$

które pozwala rozpocząć postępowanie umożliwiające znalezienie odpowiedzi na pytanie dlaczego, na poziomie makroskopowym, niektóre rodzaje błędzeń postrzegamy jako posiadające charakter singularny?

2.1.4 Postać zamknięta propagatora

Narzuca się teraz zasadnicze, techniczne pytanie, mianowicie jak zapisać (o ile to jest możliwe) propagator (2.33) w postaci zamkniętej? Na szczęście, odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, wymaga jednak przejścia do transformat Fouriera oraz Laplace'a. Wtedy równanie (2.33) przybiera postać

$$\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{P}}^{(n)}(k, s), \quad (2.34)$$

¹⁰Podkreślmy, że przez X oznaczono położenie molekuły, a przez x jej jednokrokowe przemieszczenie.

gdzie skorzystaliśmy z definicji transformaty Fouriera-Laplace'a postaci,

$$\tilde{\mathcal{F}}(k, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dX \exp(-ikX) \int_0^{\infty} dt \exp(-st) \mathcal{F}(X, t); \quad (2.35)$$

tutaj \mathcal{F} jest dowolną funkcją spełniającą twierdzenie o odwracaniu transformat Fouriera oraz Laplace'a. Korzystając z definicji propagatorów $\mathcal{P}^{(0)}$ i $\mathcal{P}^{(n)}$ w (2.28) oraz transformaty Fouriera-Laplace'a (2.35) można bez trudu obliczyć, że

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(n)}(k, s) = \tilde{\Psi}(s) [\tilde{\psi}(k, s)]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

Stąd oraz z wyrażenia (2.34) otrzymujemy poszukiwaną, zamkniętą postać sumarycznego propagatora w przestrzeni odwrotnej (czyli w zmiennych Fouriera-Laplace'a) jako sumę szeregu geometrycznego,

$$\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \frac{\tilde{\Psi}(s)}{1 - \tilde{\psi}(k, s)} = \frac{1}{s} \frac{1 - \tilde{\psi}(k=0, s)}{1 - \tilde{\psi}(k, s)}, \quad (2.37)$$

gdzie przy wyprowadzeniu drugiej równości skorzystaliśmy dodatkowo z uśrednionej po \mathcal{E} transformaty Laplace'a oraz Fouriera-Laplace'a w wyrażeniu (2.10).

Do wyprowadzenia formuły (2.37) nie było potrzebne założenie o separowalności funkcji rozkładu $\psi(x, t)$ - w przypadku separowalnym wyrażenie (2.37) przybiera prostszą postać

$$\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = \frac{\tilde{\Phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)\tilde{p}(k)} = \frac{1}{s} \frac{1 - \tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)\tilde{p}(k)}, \quad (2.38)$$

gdzie skorzystaliśmy z uśrednionej po \mathcal{E} transformaty Laplace'a wyrażenia (2.1). Zauważmy, że występująca tutaj transformata Laplace'a bezwarunkowego rozkładu czasów oczekiwania

$$\tilde{\phi}(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^{\infty} \rho(\mathcal{E}) \tilde{\phi}_{\mathcal{E}}(s) \equiv \phi(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^{\infty} \rho(\mathcal{E}) \phi_{\mathcal{E}}(t), \quad (2.39)$$

jest zdefiniowana w zgodzie z pierwszym wyrażeniem w (2.29).

Teraz możemy już precyzyjnie sformułować **zasadnicze zadanie niniejszego rozdziału**, mianowicie jest nim **analiza propagatora** danego wyrażeniem (2.38) **poprzez analizę transformaty Laplace'a funkcji rozkładu czasów oczekiwania** $\tilde{\phi}$ oraz czynnika strukturalnego przeskoków \tilde{p} .

2.1.5 Uogólnione równanie mistrza

Równanie (2.38) pozwala na wprowadzenie tzw. całkowego jądra pamięci (w skrócie po prostu pamięci). Aby to wykazać, prawą stronę tego równania zapiszmy jako $1/[s - \tilde{\mathcal{K}}(k, s)]$ skąd po prostych, algebraicznych przekształceniach otrzymujemy, że

$$\tilde{\mathcal{K}}(k, s) = [\tilde{p}(k) - 1]\tilde{\phi}(s) \quad (2.40)$$

jest dane także w postaci separowalnej przy czym,

$$\tilde{\varphi}(s) = s \frac{\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)} \quad (2.41)$$

jest, jak wykazemy, poszukiwaną pamięcią.

Możemy teraz przepisać równanie (2.38) następująco,

$$s\tilde{\mathcal{P}}(k, s) - \tilde{\mathcal{P}}(k=0, t) = \tilde{\mathcal{K}}(k, s)\tilde{\mathcal{P}}(k, s) = [\tilde{p}(k) - 1]\tilde{\varphi}(s)\tilde{\mathcal{P}}(k, s), \quad (2.42)$$

co pozwala na przejście do postaci różniczkowo-całkowej; przy wyprowadzaniu (2.42) z drugiej równości w (2.38) skorzystaliśmy ze wzorów (2.40) i (2.41) oraz z warunku początkowego,

$$\mathcal{P}(X, t=0) = \delta(X) \equiv \tilde{\mathcal{P}}(k, t=0) = 1 \quad (2.43)$$

jaki musi spełniać propagator. Zauważmy, że lewa strona równania (2.42) jest transformata Laplace'a pochodnej po czasie propagatora $\tilde{\mathcal{P}}(k, t)$, a prawa transformata Laplace'a konwolucji czasowej wielkości $\tilde{\mathcal{K}}$ oraz \tilde{P} . Zatem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}(k, t) &= \int_0^t dt' \tilde{\mathcal{K}}(k, t-t') \tilde{\mathcal{P}}(k, t') \\ &= \int_0^t dt' [\tilde{p}(k) - 1] \varphi(t-t') \tilde{P}(k, t'). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Jak widać, funkcja φ pełni rolę pamięci, gdyż (w ogólności) pozwala na uzależnienie aktualnego zachowania propagatora od jego zachowania w przeszłości (tzn. dla czasu $t' < t$). Pamięć ta wyraża się w sposób jednoznaczny za pomocą funkcji rozkładu. Innymi słowy, **jako podstawową funkcję modelu CTRW można używać albo jądra pamięci albo rozkładu czasów oczekiwania PTD**. Decyduję się tutaj i wszędzie dalej w pracy używać PTD.

2.1.6 Ogólna postać pierwszego momentu

Aby wyjaśnić wspomniane na wstępie doświadczenia Sharfe'a, Gill'a i Pfister'a **musimy obliczyć pierwszy moment** $\langle X(t) \rangle$. W tym celu zauważmy, że

$$\langle \tilde{X}(s) \rangle = -i \nabla_k \tilde{\mathcal{P}}(k, s) |_{k=0} = -\frac{i}{s} \frac{1}{1 - \tilde{\psi}(k=0, s)} \nabla_k \tilde{\psi}(k, s) |_{k=0}, \quad (2.45)$$

gdzie skorzystaliśmy po drodze ze wzoru (2.37). Dla separowalnej funkcji rozkładu $\tilde{\psi}(k, s)$ powyższy wzór upraszcza się do postaci

$$\langle \tilde{X}(s) \rangle = -i \nabla_k \tilde{\mathcal{P}}(k, s) |_{k=0} = -\frac{i}{s} \frac{\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)} \nabla_k \tilde{p}(k) |_{k=0}, \quad (2.46)$$

gdzie teraz zastosowaliśmy wzór (2.38). W dalszej części, wykorzystujemy jawną postać $\tilde{p}(k)$ oraz $\tilde{\phi}(s)$ aby przedstawić *explicite* wyrażenie (2.46) i tym samym wyjaśnić pierwszą część wykresu zamieszczonego na rys. 2.2 (czyli odtworzyć linię prostą w skali $\log - \log$ o mniejszej wartości absolutnej nachylenia).

Przykład. Przypuśćmy, że $p(x)$ dane jest wzorem (2.19); zatem czynnik strukturalny błędzenia przypadkowego przybiera postać

$$\tilde{p}(k) = (p^+ + p^-) \cos(k) + i(p^+ - p^-) \sin(k). \quad (2.47)$$

Stąd i ze wzoru (2.46) otrzymujemy proste wyrażenie,

$$\langle \tilde{X}(s) \rangle = (p^+ - p^-) \frac{1}{s} \frac{\tilde{\phi}(s)}{1 - \tilde{\phi}(s)}, \quad (2.48)$$

do którego powracam w dalszej części, po wyznaczeniu jawnej zależności $\tilde{\phi}$ od zmiennej s . Tutaj zauważmy jedynie, że w przypadku braku zewnętrznego pola (tzn. gdy $p^+ = p^-$) pierwszy moment znika.

2.2 Konkretnie obliczenia w ramach modelu dolinowego

Rozważania przeprowadzone w niniejszym rozdziale składają się z dwóch etapów. W pierwszym konstruuję *funkcję rozkładu czasów oczekiwania* WTD jako średnią ważoną, uwzględniającą "krajobraz" energetyczny (potencjału) ośrodka (substratu); w drugim analizuję funkcje pokrewne, ściśle z nią związane np. jej pierwszy moment, który jest *średnim czasem oczekiwania* i pozwala na łatwe odróżnienie procesu Poissona od procesu Lévy'ego.

2.2.1 Przykładowa postać funkcji rozkładu czasów oczekiwania

Kontynuujemy rozważania dotyczące skokowego błędzenia pojedynczej cząsteczki w potencjale przedstawionym na rys. 2.4; jak już mówiliśmy, błędzenie tego typu nosi nazwę *modelu dolinowego*. Poniżej rozważmy charakterystyczny przykład wykorzystany do opisu relaksującego fotopędu w amorficznym substracie.

Zakładamy najpierw, że gęstość prawdopodobieństwa pojawienia się doliny o określonej głębokości \mathcal{E} , czyli lokalnego minimum potencjału, podlega prawu wykładniczego zaniku, czyli jest typu Poissona,

$$\rho(\mathcal{E}) = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{\bar{\mathcal{E}}}\right), \quad (2.49)$$

gdzie A jest stałą normalizacyjną, którą można łatwo obliczyć z warunku normalizacyjnego

$$\int_0^{\infty} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = 1; \quad (2.50)$$

podstawiając wyrażenie (2.49) do tego warunku i wykonując proste przekształcenia otrzymujemy, że $A = 1/\bar{\mathcal{E}}$. Oczywiście, warunek normalizacyjny (2.50) bierze się stąd, że $\rho(\mathcal{E})$ jest gęstością prawdopodobieństwa tego, że wybrana losowo dolina potencjału będzie miała określoną głębokość \mathcal{E} ; zatem prawdopodobieństwo, że będzie ona miała dowolną głębokość jest pewnością. W tym miejscu uzasadnionym jest pytanie o sens fizyczny stałej $\bar{\mathcal{E}}$. Aby go dostrzec zauważmy, że

$$\bar{\mathcal{E}} = \int_0^{\infty} \mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}, \quad (2.51)$$

co oznacza, że $\bar{\mathcal{E}}$ jest średnią głębokością doliny potencjału.

W powyższych rozważaniach milcząco przyjmowaliśmy, że głębokości dolin są nieograniczone. Powinniśmy uwzględnić fakt, że w rzeczywistości tak nie jest i przyjmować, że głębokość doliny jest zawarta w przedziale $0 < \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_{max}$, gdzie \mathcal{E}_{max} oznacza maksymalną głębokość jaką może mieć dowolnie wybrana dolina potencjału. Nieco bardziej skomplikowane podejście, uwzględniające ten bardziej realny punkt widzenia nie prowadzi do zmiany zasadniczych wniosków (a jedynie komplikuje stronę rachunkową).

Wyrażenie (2.49) na rozkład $\rho(\mathcal{E})$ jest jednym z dwóch jakie najczęściej stosuje się do statystycznego opisu "krajobrazu" energetycznego układów nieuporządkowanych a w tym amorficznych czy szklitych; innym jest po prostu rozkład Gaussa.

Nieporządek widoczny w rozrzucie głębokości dolin potencjału może być wywołany przez rozmieszczenie w sposób losowy różnych atomów (budujących sieć krystaliczną) w węzłach danej sieci czyli jest związany z nieporządkiem składu a nie geometrii sieci (tzn. stała sieci nie ulega zmianie od węzła do węzła). Oba rozkłady opisują statyczne własności krajobrazu energetycznego i związane są z własnościami samych materiałów (substratów) a nie błądzącej cząsteczki.

Rozkład (2.49) jest łatwiejszy w zastosowaniach gdyż jest jednoparametrowy w przeciwieństwie do rozkładu Gaussa (który obok wartości średniej zawiera także dyspersję, a ponadto zależy od kwadratu zmiennej losowej). W niniejszym rozdziale zajmujemy się materiałami nieuporządkowanymi scharakteryzowanymi rozkładem wykładniczym (2.49).

Zaznaczmy, że stosując model CTRW do opisu rynków finansowych używamy w dalszej części pracy (patrz część II) rozkładu typu rozciągnięty eksponens (ang. *stretched exponent*), który stanowi ujednolicające uogólnienie obu wspomnianych powyżej.

W dalszym ciągu przyjmujemy, że proces błędzenia ma charakter **ponadbarierowy** - termicznie aktywowany, co oznacza, że prawdopodobieństwo przeskoku cząsteczki na jednostkę czasu z jednej doliny potencjału do drugiej, czyli częstość przeskoków (tutaj) pomiędzy sąsiednimi dolinami dana jest wzorem

$$\nu^0(\mathcal{E}) = \gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right) = \gamma_0 \gamma^{\frac{\mathcal{E}}{\Delta}}, \quad (2.52)$$

gdzie γ_0 jest częstością drgań (podstawowych) w danej dolinie potencjału, natomiast

$$\gamma = \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right), \quad (2.53)$$

Δ jest tutaj jednostką energii, k_B jak zwykle stałą Boltzmana, a

$$\mathcal{T} = \begin{cases} T, & \text{dla prawa Hopfa-Arrheniusa (HA)} \\ T - T_g, & \text{przy } T > T_g, \text{ dla prawa Vogela-Tammanna-Fulchera (VTF)}. \end{cases}$$

Jak widać, wielkość \mathcal{T} dotyczy dwóch klas materiałów - prawo HA takich, które nie są szklami bądź są w stanie dalekim od zeszklenia natomiast prawo VTF materiałów w pobliżu punktu zeszklenia; wielkość T oznacza jak zwykle temperaturę absolutną a T_g temperaturę przejścia do stanu szklistego. Ze wzoru (2.52) natychmiast otrzymujemy, że średni czas oczekiwania (przebywania) cząsteczki w wybranej dolinie potencjału wynosi

$$\tau^0(\mathcal{E}) = \frac{1}{\nu^0(\mathcal{E})}. \quad (2.54)$$

Z powyższego wzoru wynika (jak być powinno), że im głębsza jest dolina potencjału tym dłuższy jest średni czas przebywania w niej cząsteczki.

Trzecim założeniem jest poissonowski kształt warunkowego rozkładu czasów oczekiwania $\phi_{\mathcal{E}}(t)$, który (przypomnijmy) jest zdefiniowany jako warunkowa gęstość prawdopodobieństwa tego, że błędząca cząsteczka przetrwa w danej dolinie potencjału o głębokości \mathcal{E} dokładnie przez czas t (tzn. po tym czasie na pewno ją opuści) czyli, że

$$\phi_{\mathcal{E}}(t) = \nu^0(\mathcal{E}) \exp(-\nu^0(\mathcal{E})t). \quad (2.55)$$

Jak widać (w oparciu o wyrażenia (2.52) i (2.55)), funkcja $\phi_{\mathcal{E}}(t)$ traktowana jako funkcja zmiennej \mathcal{E} ma budowę przypominającą rozkład Gumbela odgrywający istotną rolę w teorii zdarzeń ekstremalnych.

Naszym zadaniem jest obliczenie następującej średniej ważonej

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} \rho(\mathcal{E}) \phi_{\mathcal{E}}(t) d\mathcal{E}, \quad (2.56)$$

w postaci zamkniętej, która jest, oczywiście, bezwarunkową funkcją rozkładu czasów oczekiwania spełniającą warunek normalizacyjny

$$\int_0^{\infty} dt \phi(t) = 1, \quad (2.57)$$

i odgrywającą zasadniczą rolę w modelu Błądzeń Przypadkowych w Czasie Ciągłym (patrz rozdz. 2.1.4) w układach amorficznych lub nieuporządkowanych a także np. w procesie starzenia się szkieł [14].

Powyższa funkcja rozkładu oznacza średnią gęstość prawdopodobieństwa, że błądząca cząsteczka przetrwa w jakiegokolwiek dolinie dokładnie przez czas t . Średniowanie po głębokościach dolin (czyli po zmiennej \mathcal{E}) można interpretować przynajmniej na dwa różne sposoby.

Pierwszy sposób polega na rozpatrywaniu zachowania się wielu niezależnych cząsteczek w próbce (co odpowiada rozrzedzonemu gazowi sieciowemu) a następnie średniowaniu po zespole złożonym z tych cząsteczek. Podejście to jest bliższe doświadczalnej realizacji niż podejście drugie.

Drugi sposób polega na utworzeniu ogromnej liczby replik stochastycznych składających się z pojedynczej błądzącej cząsteczki oraz krajobrazu energetycznego (stanowiącego jej środowisko) wylosowanego z zadanego rozkładu $\rho(\mathcal{E})$. Średniowanie po \mathcal{E} w wyrażeniu (2.56) można teraz traktować po prostu jak średniowanie po tak zbudowanym zespole statystycznym.

Podstawmy zatem wyrażenie (2.49) oraz (2.55) do (2.56) wykorzystując (2.52),

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} d\mathcal{E} \frac{1}{\mathcal{E}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}}\right) \gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) \exp\left(-\gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) t\right). \quad (2.58)$$

Obliczenie powyższej całki polega na dokonaniu najpierw pomocniczej zamiany zmiennych

$$\begin{aligned} y &= \gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) t, \\ dy &= -\frac{d\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}} y, \end{aligned} \quad (2.59)$$

która w połączeniu z równaniem (2.58) prowadzi do następującego ciągu przekształceń

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -\frac{k_B \mathcal{T}}{\mathcal{E}} \frac{1}{t} \int_{\gamma_0 t}^0 dy \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}}\right) \exp(-y) \\ &= \frac{\gamma_0 \alpha}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}} \int_0^{\gamma_0 t} dy \left(\gamma_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B \mathcal{T}}\right) t\right)^{\alpha} \exp(-y) \\ &= \frac{\gamma_0 \alpha}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}} \int_0^{\gamma_0 t} dy y^{\alpha} \exp(-y) = \frac{\gamma_0 \alpha}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}} \gamma_{Euler}(1 + \alpha, \gamma_0 t), \end{aligned} \quad (2.60)$$

gdzie wykładnik $\alpha = k_B \mathcal{T} / \bar{\mathcal{E}} > 0$, natomiast $\gamma_{Euler}(1 + \alpha, \gamma_0 t)$ jest niekompletną funkcją gamma Eulera (tutaj zależną od argumentu $\gamma_0 t$), która posiada następującą decydującą dla niniejszego wyprowadzenia własność

$$\gamma_{Euler}(1 + \alpha, \gamma_0 t \rightarrow \infty) = \Gamma_{Euler}(1 + \alpha). \quad (2.61)$$

Innymi słowy, w przypadku gdy $\gamma_0 t \gg \max(\alpha, 1)$ otrzymujemy asymptotyczną postać rozkładu $\phi(t)$

$$\phi(t) \approx \gamma_0 \frac{\alpha \Gamma_{Euler}(1 + \alpha)}{(\gamma_0 t)^{1 + \alpha}}, \quad (2.62)$$

która jest kluczową dla naszych dalszych rozważań - jest to właśnie, dla $0 < \alpha < 1$, rozkład Lévy'ego w czasie. Należy podkreślić, że dopiero uwzględnienie wszystkich trzech elementów (2.49), (2.52) oraz (2.55) daje spowolniony, potęgowy w czasie zanik funkcji rozkładu (2.62).

Wyrażenie (2.60) dostarcza jeszcze jednej ważnej informacji mówiącej, że wykładnik α można wyrazić jako stosunek wielkości termodynamicznej do tej charakteryzującej (średnio) substrat. W przypadku amorficznego substratu zależność ta została potwierdzona na drodze doświadczalnej [11].

Rozważmy teraz zachowanie funkcji rozkładu $\phi(t)$ dla krótkich czasów, tzn. dla przypadku gdy $\gamma_0 t \ll 1$. Rozwijając w szereg funkcję eksponens w funkcji podcałkowej wyrażenia w ostatnim wierszu (2.60), następnie wykonując całkowanie wyraz po wyrazie i ograniczając się do wyrazów kwadratowych w $\gamma_0 t$, otrzymujemy $\phi(t)$ w postaci wykładniczej

$$\phi(t) \approx \gamma_0 \frac{\alpha}{1 + \alpha} \exp\left(-\frac{1 + \alpha}{2 + \alpha} \gamma_0 t\right); \quad (2.63)$$

wynika stąd natychmiast, że $\phi(t = 0) = \gamma_0 \frac{\alpha}{1 + \alpha}$.

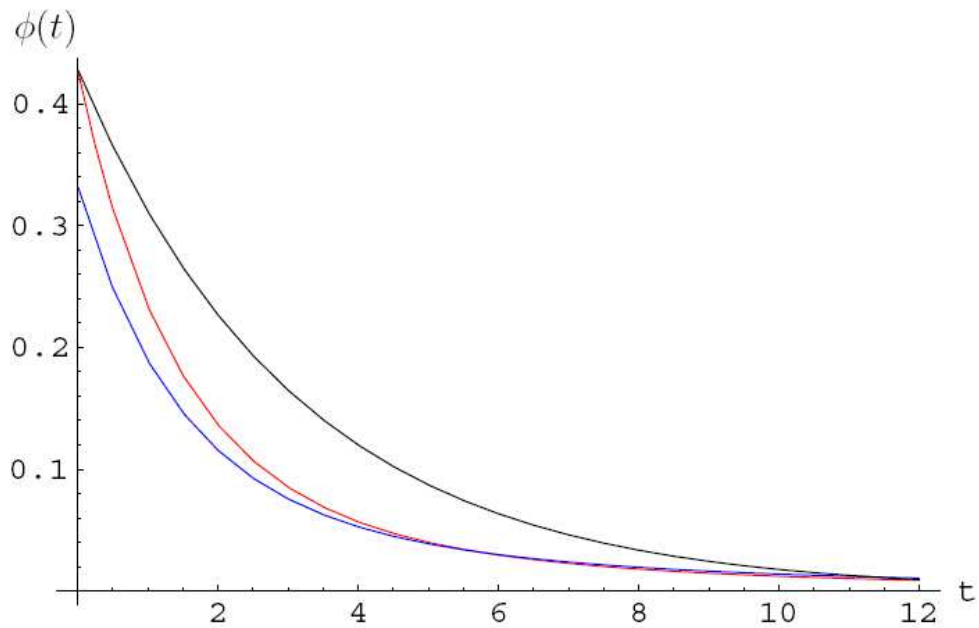
Na rysunkach 2.6 i 2.7 porównano zależność od czasu funkcji potęgowej $\phi(t)$ danej wzorem (2.62) dla dwóch przykładowych wartości wykładnika α oraz funkcji wykładniczej danej wzorem (2.63). Dopiero w skali $\log - \log$ (patrz rys. 2.7) widać wyraźną różnicę pomiędzy tymi funkcjami dla długich czasów.

2.2.2 Równanie skalowania

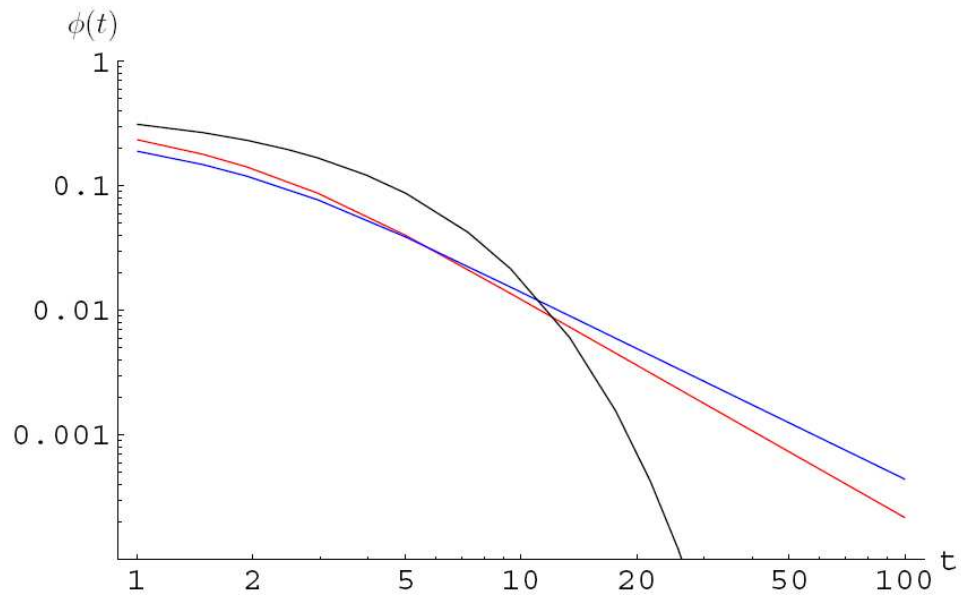
Teraz jesteśmy już przygotowani do poszukiwania pełnego rozwiązania na funkcję ϕ , czyli nie tylko jej części singularnej (danej wyrażeniem (2.62)) ale także regularnej - uzyskuje się to na drodze rozwiązania równania skalowania, które funkcja ta spełnia.

Równanie skalowania danej funkcji powstaje w wyniku:

- 1) operacji liniowego przeskalowania zmiennej niezależnej,



Rysunek 2.6: Potęgowa zależność rozkładu prawdopodobieństwa czasów oczekiwania ϕ od czasu t dana wzorem (2.62) dla wykładników $\alpha = 0.75$ (linia czerwona) i $\alpha = 0.50$ (linia niebieska) oraz $\gamma_0 = 1$. Zauważmy, że dla $t = 0$ rozkład $\phi(t = 0) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ czyli dla $\alpha = 0.75$ wynosi około 0.43 natomiast, dla $\alpha = 0.50$ około 0.33. Dla porównania przedstawiono wykładniczą zależność ϕ od czasu t daną wyrażeniem (2.63) (czarna linia) dla $\alpha = 0.75$. Wykres zaczerpnięto ze skryptu [13].



Rysunek 2.7: Potęgowa zależność rozkładu prawdopodobieństwa czasów oczekiwania ϕ od czasu t dana wzorem (2.62) przedstawiona w skali $\log - \log$ dla przypadków przedstawionych na rys. 2.6, tzn. dla wykładników $\alpha = 0.75$ (linia czerwona) i $\alpha = 0.50$ (linia niebieska) oraz $\gamma_0 = 1$. Dla porównania przedstawiono wykładniczą zależność ϕ od czasu t daną wyrażeniem (2.63) (czarna linia) dla $\alpha = 0.75$. Wykres zaczerpnięto ze skryptu [13].

2) liniowej odpowiedzi samej funkcji na to przeskalowanie.

Podkreślmy ponownie jak bardzo użyteczną w naszych dalszych rozważaniach jest transformata Laplace'a

$$\tilde{\phi}(s) (\stackrel{\text{ozn}}{=} \mathcal{L}[\phi(t)](s)) = \int_0^\infty dt \exp(-ts) \phi(t). \quad (2.64)$$

Mianowicie, można łatwo pokazać (korzystając z wyjściowego wyrażenia (2.58)), że spełnia ona niejednorodne równanie skalowania

$$\tilde{\phi}(\gamma^{-1}s) = M\tilde{\phi}(s) - M \ln(M) \int_0^1 d\xi \frac{1}{M^\xi} \frac{1}{1 + \frac{s}{\gamma_0 \gamma^\xi}}, \quad (2.65)$$

gdzie $M = \exp(\Delta/\bar{\mathcal{E}})$ a wielkość γ jest dana wzorem (2.53). W dalszym ciągu zakładamy, że $\Delta/\bar{\mathcal{E}} \ll 1$ i analogicznie $\Delta/k_B\mathcal{T} \ll 1$ co pozwala wykazać, że dla $s \rightarrow 0$ niejednorodność całkowa sprowadza się do algebraicznej i nie zależy od γ^{-1} , czyli od czynnika skalowania zmiennej niezależnej s (pamiętajmy, że Δ pełni rolę jednostki energii).

Rozważam tylko przypadek asymptotyczny w czasie co odpowiada (na mocy twierdzenia Tauberina) granicy $s \rightarrow 0$. Stąd, niejednorodność przybiera przybliżoną, prostszą postać

$$\begin{aligned} M \ln(M) \int_0^1 d\xi \frac{1}{M^\xi} \frac{1}{1 + \frac{s}{\gamma_0 \gamma^\xi}} &\approx M \ln(M) \int_0^1 d\xi \frac{1}{M^\xi} \left(1 - \frac{s}{\gamma_0 \gamma^\xi}\right) \\ &= M - 1 - \frac{s}{\gamma_0} \frac{\ln(M)}{\ln(M\gamma)} M \left(1 - \frac{1}{M\gamma}\right) \\ &\approx (M - 1) \left(1 - \frac{s}{\gamma_0}\right), \end{aligned} \quad (2.66)$$

przy czym ostatnią przybliżoną równość uzyskuje się pamiętając, że mają miejsce rozwinięcia $M \approx 1 + \Delta/\bar{\mathcal{E}}$ oraz $\gamma^{-1} \approx 1 - \Delta/k_B\mathcal{T}$. Dzięki wyrażeniu w ostatnim wierszu (2.66), niejednorodne równanie skalowania (2.65) można przepisać (w ramach użytych przybliżeń) w postaci

$$\tilde{\phi}(\gamma^{-1}s) = M\tilde{\phi}(s) - (M - 1) \left(1 - \frac{s}{\gamma_0}\right), \quad (2.67)$$

która jest znacznie łatwiejsza do rozwiązania od wyjściowego równania (2.65).

Rozwiązanie równania (2.67) poszukujemy w postaci sumy

$$\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}_{reg}(s) + \tilde{\phi}_{sing}(s), \quad (2.68)$$

gdzie $\tilde{\phi}_{reg}(s)$ jest rozwiązaniem ogólnym, regularnym równania niejednorodnego (2.67), natomiast $\tilde{\phi}_{sing}(s)$ jest rozwiązaniem szczególnym, singularnym równania jednorodnego (będącego jednorodną częścią równania (2.67))

$$\tilde{\phi}_{sing}(\gamma^{-1}s) = M\tilde{\phi}_{sing}(s). \quad (2.69)$$

Postać rozwiązania ogólnego jest narzucona przez niejednorodność równania (2.67). Ponieważ niejednorodność ta ma charakter przybliżony a rozwiązanie jest poszukiwane w granicy $s \rightarrow 0$ zatem, z dokładnością do wyrazów kwadratowych w zmiennej s ,

$$\tilde{\phi}_{reg}(s) \approx 1 - \frac{1}{\gamma'} \frac{s}{\gamma_0}, \quad (2.70)$$

gdzie współczynnik

$$\gamma' = \frac{1 - \frac{1}{M\gamma}}{1 - \frac{1}{M}}. \quad (2.71)$$

Postać rozwiązania (2.70) łatwo zweryfikować podstawiając ją do równania (2.67).

Można sprawdzić (poprzez podstawienie do równania (2.69)), że rozwiązanie singularne jest postaci

$$\tilde{\phi}_{sing}(s) \approx -\frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha, \quad (2.72)$$

gdzie wykładnik $\alpha = -\ln(M)/\ln(\gamma) (= k_B\mathcal{T}/\bar{\mathcal{E}})$, natomiast γ'_f jest tutaj nieznanym współczynnikiem; systematyczna metoda znalezienia rozwiązania singularnego, a zatem i tego współczynnika¹¹ opiera się na transformacie Mellina [15, 16] (oraz odnośniki literaturowe tamże). Uzyskany na takiej drodze (nieistotny tutaj) współczynnik γ'_f jest postaci

$$\gamma'_f = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}. \quad (2.73)$$

Ostatecznie, rozwiązanie równania (2.67) w granicy $s \rightarrow 0$ przybiera następującą, przybliżoną postać,

$$\tilde{\phi}(s) \approx 1 - \frac{1}{\gamma'_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha - \frac{1}{\gamma'} \frac{s}{\gamma_0}, \quad (2.74)$$

¹¹Dokładniej rzecz biorąc nie jest to stały współczynnik, a cykliczna funkcja zmiennej $\ln(s)$ o okresie równym $-\ln(\gamma)$ - podany tutaj współczynnik jest jedynie zerowym przybliżeniem wolno-zmiennego wyrażenia zależnego od tej zmiennej. Właśnie ta cykliczna funkcja prowadzi do znanych oscylacji logarytmiczno-periodycznych.

która jest poszukiwanym uogólnieniem wyrażenia (2.62), gdyż zawiera zarówno składową singularną jak też dodatkowo regularną. Rozwiązanie (2.74) wymaga komentarza.

Po pierwsze zauważmy, że rozkład $\phi(t)$

- jest (jak należy) unormowany, gdyż $\tilde{\phi}(s=0) = 1$,
- zawiera zarówno składnik singularny jak też regularny, a asymptotyczna (czyli dla $s \rightarrow 0$) dominacja jednego z nich zależy tylko od wartości wykładnika α ; gdy $\alpha < 1$ dominuje składnik singularny, gdy $\alpha > 1$ regularny (w obu przypadkach 1 musi być obecna aby zapewnić normalizację),
- wyrażenie (2.74) umożliwia bezpośrednio otrzymanie singularnej postaci $\tilde{\Phi}(s)$ a mianowicie,

$$\tilde{\Phi}(s) \approx -\frac{1}{\gamma_f} \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^{\alpha-1} \quad (2.75)$$

a co za tym idzie asymptotycznej postaci

$$\Phi(t) \approx \frac{\Gamma_{Euler}(1+\alpha)}{(\gamma_0 t)^\alpha}. \quad (2.76)$$

Ze wzoru (2.76) oraz wykorzystując zależność (2.32) odtwarzamy znalezione już wcześniej wyrażenie (2.62).

- Możemy teraz uściślić rozważania przeprowadzone w rozdz. 2.2.1, mianowicie rozwiązanie (2.62) dotyczy tylko sytuacji singularnej ($\alpha < 1$) dla asymptotycznie długiego czasu.

2.2.3 Rozkład Lévy'ego a rozkład Poissona: wyjaśnienie zagadki potęgowej relaksacji fotoprądu

Zgodnie z tym co powiedziano powyżej, w granicy $s \rightarrow 0$ dysponujemy dwoma zasadniczo różnymi przypadkami

$$\tilde{\phi}(s) \approx \begin{cases} 1 - \frac{1}{\gamma_f} \left(\frac{s}{\gamma_0} \right)^\alpha, & \text{dla sytuacji singularnej, czyli } \alpha < 1, \\ 1 - \frac{1}{\gamma'} \frac{s}{\gamma_0} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma'} \frac{s}{\gamma_0}}, & \text{dla sytuacji regularnej, czyli } \alpha > 1 \end{cases} \quad (2.77)$$

a stąd dla asymptotycznego czasu odpowiednio,

$$\phi(t) \approx \begin{cases} \gamma_0 \frac{\alpha \Gamma_{Euler}(1+\alpha)}{(\gamma_0 t)^{1+\alpha}}, & \text{dla sytuacji singularnej, czyli } \alpha < 1, \\ \gamma_0 \gamma' \exp(-\gamma_0 \gamma' t), & \text{dla sytuacji regularnej, czyli } \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.78)$$

Powyższemu odpowiadają dwa przypadki dla funkcji $\Phi(t)$ a mianowicie

$$\Phi(t) \approx \begin{cases} \frac{\Gamma_{Euler}(1+\alpha)}{(\gamma_0 t)^\alpha}, & \text{dla sytuacji singularnej czyli } \alpha < 1, \\ \exp(-\gamma_0 \gamma' t), & \text{dla sytuacji regularnej czyli } \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.79)$$

Uzyskaliśmy tym samym dwa różne typy rozkładów. Możemy powiedzieć, że w przypadku pierwszego z nich, niskotemperaturowego (gdy $k_B \mathcal{T} < \mathcal{E}$) najistotniejsze zjawiska opisuje długoczasowy ogon rozkładu Lévy'ego w czasie. Natomiast w odwrotnym, wysokotemperaturowym (gdy $k_B \mathcal{T} > \mathcal{E}$) uzyskujemy korpus rozkładu Poissona; wartość $k_B \mathcal{T} = \mathcal{E}$ stanowi próg oddzielający te dwa istotnie różne światy.

Uzyskany wynik pozwala wyrazić w tych dwóch wspomnianych przypadkach pierwszy moment w jawnej postaci; najpierw jego transformatę Laplace'a dla $s \rightarrow 0$

$$\langle \tilde{X}(s) \rangle \approx \begin{cases} (p^+ - p^-) \frac{\gamma'_f}{\gamma_0} \frac{1}{\left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^{1+\alpha}}, & \text{dla sytuacji singularnej czyli } \alpha < 1; \\ (p^+ - p^-) \frac{\gamma'_f}{\gamma_0} \frac{1}{\left(\frac{s}{\gamma_0}\right)^2}, & \text{dla sytuacji regularnej czyli } \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.80)$$

a stąd, dla asymptotycznego czasu

$$\langle X(t) \rangle \approx \begin{cases} (p^+ - p^-) \frac{\gamma'_f}{\Gamma_{Euler}} (\gamma_0 t)^\alpha, & \text{dla sytuacji singularnej czyli } \alpha < 1; \\ (p^+ - p^-) \gamma' \gamma_0 t, & \text{dla sytuacji regularnej czyli } \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.81)$$

Wreszcie z powyższego wyrażenia można wyznaczyć prędkość unoszenia, która (jak wiadomo) jest proporcjonalna do natężenia mierzonego fotoprądu

$$\frac{d}{dt} \langle X(t) \rangle = \langle V(t) \rangle \approx \begin{cases} (p^+ - p^-) \frac{\gamma'_f \gamma_0}{(\gamma_0 t)^{(1-\alpha)}}, & \text{dla } \alpha < 1; \\ (p^+ - p^-) \gamma' \gamma_0, & \text{dla } \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.82)$$

Tym samym wyjaśniona została pierwsza, zasadnicza część potęgowego zaniku fotoprądu w czasie o wykładniku $1 - \alpha$. Mamy tutaj do czynienia z sytuacją niskotemperaturową prowadzącą do błędzenia singularnego narzucającego prawa potęgowe w czasie. Pozostała jeszcze do wyjaśnienia druga, także potęgowa relaksacja fotoprądu o wykładniku $1 + \alpha$, w której istotną rolę odgrywa absorbujący wpływ katody (prawej elektrody). Jednak, zagadnieniem tym nie zajmuję się już tutaj, gdyż rozwiązuje się go analogicznie, a rachunek jest znacznie dłuższy¹².

¹²Wspomniany wpływ absorbujący elektrody wprowadza się wykorzystując tzw. metodę pierwszego kontaktu (w niedosłownym tłumaczeniu ang. *first-passage time*, [17], [18]).

2.2.4 Średni czas oczekiwania

Poszukujemy odpowiedzi na zasadnicze dla naszych dalszych poczynań pytanie: **jaki jest średni czas oczekiwania (życia),**

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t\phi(t)dt, \quad (2.83)$$

błądzącej cząsteczki w jakiegokolwiek dolinie (minimum) potencjału?

Rozważmy zasadniczy dla naszych rozważań przypadek $\alpha < 1$. Łatwo dostrzec, podstawiając (2.62) do (2.83) (oraz korzystając z faktu, że funkcja $\phi(t)$ jest ograniczona), że $\langle t \rangle = \infty$. Podobnie można sprawdzić, że także dowolny moment $\langle t^m \rangle = \infty$, $m = 2, 3, \dots$. Oznacza to, że średni czas oczekiwania (życia) cząsteczki w dowolnej dolinie (minimum) potencjału oraz jego dyspersja (rozrzut statystyczny) są nieskończone.

Rodzi to szereg pytań - jednym z najważniejszych jest **w jaki sposób powyższy wynik teoretyczny może przejawiać się w realnym doświadczeniu?** Aby odpowiedzieć na to pytanie rozważmy dowolnie wybrany przedział czasu Δt w którym będziemy obserwować błędzenie cząsteczki. Przypuśćmy, że w tym przedziale czasu cząsteczka $n (\gg 1)$ razy zmieniała swoje miejsce pobytu co pozwoliło nam dokonać n -krotnego pomiaru jej czasu życia t_j , $j = 1, 2, \dots$, w kolejno odwiedzanych dolinach potencjału. Na tej podstawie możemy wyznaczyć estymatę średniego czasu oczekiwania cząsteczki, jako $\langle t(\Delta t) \rangle = 1/n \sum_{j=1}^n t_j$. Oczywiście wielkość ta zależy od długości przedziału Δt w którym prowadzono obserwacje¹³. Zależność ta może być dwojakiego rodzaju. Jeżeli wykładnik $\alpha \geq 1$ wówczas **średni czas oczekiwania jest skończony** i - zgodnie z prawem wielkich liczb Bernoulliego - w miarę wzrostu długości przedziału czasu Δt powyższa średnia $\langle t(\Delta t) \rangle$ dąży do osiągnięcia skończonego plateau, czyli ulega stabilizacji. Jeżeli $\alpha < 1$ wówczas **średni czas oczekiwania jest nieskończony** i wzrost długości czasu obserwacji nie prowadzi do stabilizowania się uzyskiwanych wyników a wprost przeciwnie, **dłuższy przedział obserwacji Δt oznacza większą szansę pojawienia się rzadkiego zdarzenia w postaci bardzo długiego czasu oczekiwania w jakimś lokalnym minimum potencjału** co może prowadzić do drastycznego wzrostu średniej $\langle t(\Delta t) \rangle$. Innymi słowy, nieskończony średni czas oczekiwania przejawia się w postaci rosnącej nieograniczenie wartości $\langle t(\Delta t) \rangle$ ze wzrostem Δt . Ponadto, w przypadku $\alpha < 1$ rodzi się **kluczowe pytanie dotyczące istnienia i osiągnięcia przez układ stanu równowagi**; ten niezwykle istotny problem dyskutujemy w dalszej części.

¹³Proszę nie mylić używanego tutaj całkowitego czasu obserwacji Δt z przedziałem czasu oznaczającym pojedyncze wyczekiwanie cząsteczki w jakimś minimum potencjału.

Część II

Multifraktalny Model Błądzeń Przypadkowych w Czasie Ciągłym

Niniejsza część jest poświęcona:

- uogólnieniu formalizmu CTRW przedstawionego w części I, tak aby objąć nim także multifraktalne błędzenia przypadkowe, dotyczące przecież nie tylko rynków finansowych,
- wykorzystaniu, niejako przy okazji, formalizmu CTRW do odtworzenia kanonicznych wyników teorii kolejek,
- bezpośredniemu zastosowaniu wspomnianego, uogólnionego formalizmu do badania struktury czasów pomiędzy zdarzeniami a w tym przede wszystkim struktury czasów międzytransakcyjnych na giełdach.

Dodam, że w części III badane są dalsze konsekwencje do jakich prowadzi ten uogólniony formalizm a przede wszystkim jego związek (poprzez transformację Legendre'a) z formalizmem termodynamiki.

Szeregi złożone z przedziałów czasu pomiędzy poszczególnymi zdarzeniami pochodzące zarówno z obserwacji zjawisk przyrodniczych, społecznych i ekonomicznych jak też procesów technicznych traktowane są zwykle jak szeregi losowe (stochastyczne). Statystyki budowane w oparciu o takie szeregi mogą nawet w sposób zasadniczy odbiegać od poissonowskiej,

- 1) dając np. rozkłady charakteryzujące się grubymi ogonami (w czasie),
- 2) prowadząc do pojawiania się na przemian okresów wysokiej i niskiej aktywności a stąd występowaniem efektów klastrowania się sygnałów.
- 3) Ponadto, wspomniane statystyki mogą przejawiać własności fraktalne i multifraktalne (w sensie losowym) oraz prowadzić do pojawienia się singularności.

Zatem, głównym zadaniem jest zrozumienie i opisanie mechanizmów prowadzących do takiego zachowania. W niniejszej części pokazuję, że uogólniony przeze mnie formalizm Błędzenia Przypadkowego w Czasie Ciągłym jest w stanie wywiązać się z tego zadania.

Przedstawiam tutaj analityczne podejście wyrosłe z analizy danych empirycznych a oparte na (omawianym w rozdz. 2) formalizmie Błędzenia Przypadkowego w Czasie Ciągłym. Podejście to stanowi alternatywę dla modeli typu kolejkowego (zaproporzonych w ostatnim czasie), uwzględniających priorytety w realizacji zadań. Moja analiza ma charakter pogłębiony (w stosunku do dotychczasowych wariantów CTRW) dzięki uwzględnieniu możliwej, multifraktalnej struktury przedziałów czasu pomiędzy zdarzeniami określającymi ludzką aktywność, a dokładniej mówiąc ludzki

temperament. Zatem, wielkość tych przedziałów określa bezpośrednio czas "martwy" - ludzką pasywność. Im krótsze są te przedziały tym większa jest aktywność ludzka której dotyczą - większy temperament graczy.

W szczególności, w niniejszej części **zbadane zostały czasy międzytransakcyjne na rynkach finansowych**. Właśnie w tego typu danych empirycznych zaobserwowana została wyraźna struktura multifraktalna. **Zaproponowany w pracy model wyjaśnia strukturę multifraktalną i singularną poprzez wykorzystanie superstatystyk do opisu funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej** za jaką uważamy tutaj wspomniany przedział czasu. Jądro całkowe superstatystyki odpowiada zróżnicowanej naturze badanych zjawisk i procesów. Jądro to, przyjęte w pracy w postaci rozciągniętej funkcji eksponencjalnej¹⁴, opisuje multifraktalność w istotnym dla niej horyzoncie czasowym. Dodatkowo, zaproponowany w tej części profil heurystyczny pozwala opisać dane empiryczne w pełnym zakresie.

Strategia przyjęta w niniejszej pracy jest następująca:

- 1) najpierw sformułowane zostały (patrz część I) podstawowe elementy modelu - wstępny zestaw narzędzi pozwalających na odpowiednie przedstawienie danych empirycznych.
- 2) W kolejnym kroku (niniejsza część), uogólniam formalizm CTRW aby wyjaśnić obserwowane efekty.
- 3) Wreszcie, dyskutuję konsekwencje dotyczące badanych układów złożonych, np. możliwość zastosowania formalizmu termodynamiki inspirowanego obserwowaną (w punkcie 2) multifraktalnością do opisu przemian fazowych występujących (jak pokazuję) na rynkach finansowych (patrz część III).

¹⁴Rozciągnięta funkcja eksponencjalna jest, podkreślmy, bezpośrednim uogólnieniem zarówno funkcji wykładniczej jak też funkcji Gaussa.

Rozdział 3

CTRW a teoria kolejek

3.1 Wprowadzenie do analizy

Dynamika wielu układów złożonych jest zwykle przedstawiana w postaci szeregów czasowych - odnosi się to nie tylko do nauk ścisłych, ale również do nauk społecznych, tj. ekonomii czy socjologii. Zdarzenia obserwowane w tych szeregach są często rozdzielone przedziałami czasu, których wielkość ma charakter losowy - zbiór tych przedziałów charakteryzuje się zazwyczaj określoną, dobrze uformowaną strukturą a w tym np. uniwersalnością [19, 20, 21, 22, 23, 24].

Od kilku lat trwają intensywne i szeroko zakrojone badania nad różnego rodzaju charakterystycznymi procesami zachodzącymi w komunikacji międzyludzkiej [19, 25]. Na przykład, zgodnie ze schematem zaproponowanym m.in. przez A.-L. Barabásiego, decyzje ludzkie podejmowane są w oparciu o tzw. procesy kolejkowania. Schemat ten może być wykorzystywany do opisu wielu różnych procesów takich jak np. korespondencja, odwiedzanie witryn internetowych czy też transakcje i handel na rynkach finansowych [23]. Głównym wnioskiem płynącym z tych badań jest to, że odtworzenie empirycznych własności obserwowanych zjawisk i procesów wymaga, aby decyzje dotyczące czasu danego zdarzenia podlegały właściwym, ustalonym zasadom określania jego ważności. Zastosowanie prostych reguł typu FIFO (ang. *First-In-First-Out*) prowadzi niestety do poissonowskiej charakterystyki przedziałów czasu, co jest sprzeczne z wieloma obserwacjami empirycznymi.

Jak pokazuję, dogodnym sposobem opisu tego typu zjawisk jest właśnie model Błądzenia Przypadkowego w Czasie Ciągłym (omówiony w rozdz. 2). W ramach tego modelu główny nacisk jest położony na właściwą konstrukcję podstawowego rozkładu prawdopodobieństwa tego modelu (ang. *pausing-time density*, PTD nazywanego także WTD, ang. *waiting-time distribution*, patrz część I) a oznaczanego przez $\psi(t)$ - co (przypomnijmy) jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa wystąpienia określonego przedziału czasu t pomiędzy kolejnymi zdarzeniami.

Wiele empirycznych funkcji PTD charakteryzuje się grubymi ogonami, co sugeruje występowanie samopodobieństwa i hierarchii (w sensie statystycznym) w danej strukturze. Co więcej, oznacza to [23] powolny zanik funkcji PTD, czyli podleganie przez nią prawu potęgowego zaniku $\psi(t) \sim t^{-\delta}$. Zaobserwowano tutaj uniwersalność wykładnika, który przyjmuje jedną z dwóch wartości $\delta = 1$ albo $\delta = 3/2$ [23]. **W niniejszej części przedstawiono w rozdz. 3.2.1 podejście odtwarzające** (w zależności od przyjętych warunków) **potęgowe zanikanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa z powyższymi wykładnikami.**

Jest zrozumiałym, że funkcja PTD dostarcza (w sposób jawny lub niejawny) pełną informację o statystyce przedziałów czasu pomiędzy zdarzeniami, jednak przy rozważaniu struktur hierarchicznych (rozciągających się poprzez wiele skal czasowych) pomocne stają się momenty dowolnego rzędu q (o ile istnieją). Dzięki ich analizie można odpowiedzieć na pytanie o charakter procesu (np. czy jest on monofraktalny czy też multifraktalny) wskazując na istotnie różne zależności momentów od ich rzędu q . Takie informacje dają podstawę bardziej wyrafinowanych modeli teoretycznych mogących opisać stochastyczną dynamikę ludzkich decyzji. **W niniejszej części analizowałem zarówno samą funkcję PTD jak też jej momenty dowolnego rzędu, co stanowi zasadniczy element niniejszej pracy.**

Moje uogólniające podejście ma swoje korzenie w fizyce bazując także na tzw. Hipotezie o Mieszaniu Rozkładów w Finansach (ang. *Mixture of Distributions Hypothesis in Finance*) z lat 70-ych [26], mówiącej o konwolucyjnym sposobie uwzględniania różnych niezależnych czynników wpływających na dany rozkład. Ponadto, opiera się na analogii do zasady z lat 90-ych [27], mówiącej o dyssypacji energii na różne skale czasowe w zjawisku rozwiniętej turbulencji, czy też istnieniu układów nieekstensywnych opisywanych nieekstensywną entropią Tsallisa [28].

Funkcja PTD została (patrz część I) po raz pierwszy wprowadzona w ramach formalizmu CTRW przez Montrolla i Weissa [29, 30, 31]. Następnie, dzięki temu ogólnemu formalizmowi Scher i Montroll [32] mogli zaproponować w 1975 roku model dolinowy (patrz część I) do opisu konkretnej, potęgowej relaksacji fotoprądów generowanych w materiałach amorficznych (szklistych).

Podkreślmy, podejście zaproponowane w niniejszej pracy

- 1) zainspirowane zostało w znacznej mierze modelem dolinowym sformułowanym w języku CTRW a rozwiniętym na potrzeby fizyki; tutaj zostało one wykorzystane w zupełnie innym kontekście, dotyczącym stochastycznej dynamiki walorów na rynkach finansowych.
- 2) Co więcej, stanowi ono uogólnienie formalizmu CTRW na błędzenia przypadkowe o charakterze multifraktalnym i singularnym, wykraczając poza wspomniany kontekst i otwierając możliwości szerszych

zastosowań.

3.2 Wykorzystanie modelu dolinowego w teorii kolejek

Przypomnijmy, że model dolinowy Schera-Montrolla jako punkt wyjścia wprowadza funkcję gęstości warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa dla czasów międzytransakcyjnych (warunkowa PTD) $\psi(t|\varepsilon)$ ¹. Funkcja ta (przypomnijmy) opisuje prawdopodobieństwo tego, że określony nośnik pozostanie przez czas t w studni potencjału o określonej głębokości ε . Po tym czasie nośnik ten dokonuje skoku do sąsiedniej studni. Kolejnym założeniem modelu jest to, że ε jest zmienną losową (przyjmującą losowe wartości w różnych miejscach regularnej sieci) opisywaną rozkładem $\rho(\varepsilon)$ [32]. Wówczas $\psi(t)$ jest *superstatystyką* (konwolucją) wyrażoną w następującej postaci:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t|\varepsilon)\rho(\varepsilon)d\varepsilon. \quad (3.1)$$

Warunkowa PTD ma w tym modelu postać funkcji rozkładu eksponencjalnego; np. dla zmiennej poissonowskiej t [32]

$$\psi(t|\varepsilon) = \frac{1}{\tau(\varepsilon)} \exp\left[-\frac{t}{\tau(\varepsilon)}\right]. \quad (3.2)$$

Postać tą można uzasadnić tym, że dla ustalonego ε statystyka czasów jest homogeniczna, ponieważ wszystkie zdarzenia mają to samo pochodzenie (przebywanie cząsteczki w dolinie potencjału o takiej samej głębokości) i w konsekwencji charakteryzują się pojedynczą skalą czasową $\tau(\varepsilon)$. Ponadto, zdarzenia polegające na dowolnie krótkim przebywaniu w danej dolinie są od siebie statystycznie niezależne.

Dodatkowo (jak już była o tym mowa w rozdz. 2), Scher i Montroll zakładają prosty wykładniczy związek pomiędzy energetyczną zmienną losową ε a czasem relaksacji $\tau(\varepsilon)$:

$$\tau(\varepsilon) = \tau_0 \exp(\beta\varepsilon), \quad (3.3)$$

gdzie $\tau_0 = \tau(0)(> 0)$, natomiast $\beta(> 0)$ jest wielkością stałą mierzoną w jednostkach energii; w podejściu Schera-Montrolla $\beta^{-1} = k_B T$ oznacza energię termiczną otoczenia o temperaturze T (k_B to stała Boltzmana).

Zauważmy, że powyższe wyrażenia są już, formalnie rzecz biorąc, dostosowane do opisu podstawowych własności procesu kolejowania wskazanych m.in. przez Vazqueza [23]. W tego typu procesach nadchodzące wiadomości (bądź zadania) pojawiają się w sposób przypadkowy w odstępach czasu t . Do każdej wiadomości

¹Używamy tutaj nieco wygodniejszego oznaczenia niż w rozdz. 2 mianowicie, $\psi(t|\varepsilon) \equiv \psi_\varepsilon(t)$.

przypisywany jest określony stopień jej istotności czyli *priorytet* oznaczany jako ε . Czas wykonania określonego zadania o priorytecie ε jest opisywany właśnie przez funkcję warunkowej gęstości $\psi(t|\varepsilon)$. Ponadto, sam priorytet ε jest również zmienną losową opisywaną przez funkcję gęstości $\rho(\varepsilon)$. Zatem (bezwarunkowy) rozkład czasów pomiędzy zadaniami $\psi(t)$ jest superstatystyką daną właśnie wzorem (3.1). Jak widać, **udało się tutaj w prosty sposób zreinterpretować formalizm CTRW tak aby go dostosować do odpowiedzi na kluczowe pytanie teorii kolejek o rozkład przedziałów czasu pojawiania się zadań - podobnie można wyrazić statystykę realizacji zadań.**

3.2.1 Charakterystyczne przykłady dotyczące teorii kolejek

W teorii kolejek istnieją, w zależności od potrzeb, różne sposoby kolejkowania zadań. W najprostszym przypadku kolejkowania typu FIFO (ang. *First-In-First-Out*) priorytet $\varepsilon = \mu$ przyjmuje taką samą wartość dla wszystkich zadań. Wówczas gęstość $\rho(\varepsilon) = \delta(\varepsilon - \mu)$, a bezwarunkowa PTD przybiera po prostu postać rozkładu Poissona (patrz cienka linia przerywana na rys. 3.1):

$$\psi(t) = \frac{1}{\tau(\mu)} \exp\left[-\frac{t}{\tau(\mu)}\right], \quad (3.4)$$

z pojedynczą, dobrze określoną skalą czasową $\tau(\mu) = \tau_0 e^{\beta\mu} = \langle t \rangle$ oznaczającą średni czas oczekiwania pomiędzy wykonaniem (albo realizacją) kolejnych zadań.

Innym szczególnym przypadkiem jest przypisanie ważności zadaniom zgodnie z rozkładem jednostajnym $\rho(\varepsilon) = 1/(2\Delta)$, gdzie ε może przyjmować jedynie wartości ograniczone do odcinka $[-\Delta, \Delta]^2$. W tym przypadku

$$\psi(t) = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} \psi(t|\varepsilon) d\varepsilon,$$

natomiast z równań (3.2) i (3.3) można wyprowadzić następującą postać PTD (patrz cienka linia kropkowana rys. 3.1):

$$\psi(t) = \frac{1}{2\Delta} \frac{1}{\beta t} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_-}\right) \right], \quad (3.5)$$

gdzie $\tau_{\pm} \stackrel{\text{def.}}{=} \tau_0 \exp(\pm\Delta\beta)$. Charakterystyczną skalę czasową τ_c w tym modelu, tzn. oczekiwany czas pomiędzy kolejnymi zdarzeniami $\tau_c = \langle t \rangle$ (gdzie $\langle t \rangle$ jest pierwszym momentem rozkładu $\psi(t)$), otrzymujemy bezpośrednio z równania (3.5):

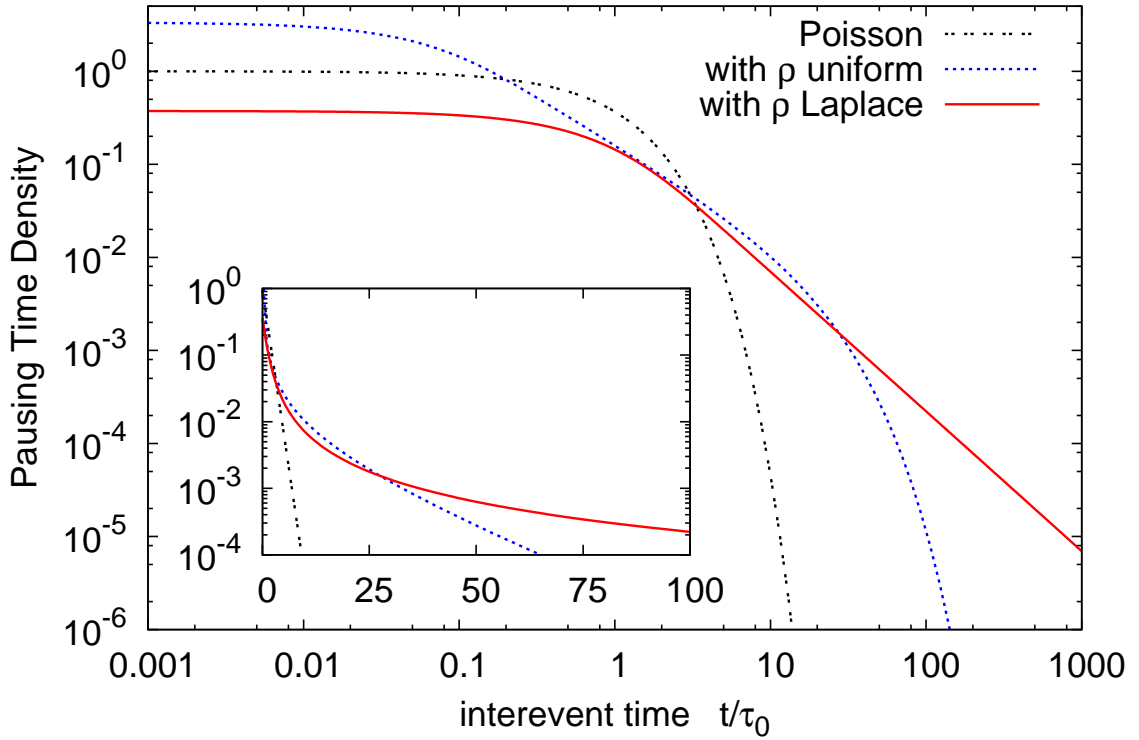
$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} dt t \psi(t) = \tau_0 \frac{\cosh(\beta \Delta)}{\beta \Delta}. \quad (3.6)$$

²Wielkość Δ nie musi być energią jednostkową (jak to miało miejsce w części I) ale dowolnie ustaloną.

Warto zauważyć, że dla $\tau_+ \gg \tau_-$ zachodzi:

$$\psi(t) \approx \frac{1}{2\Delta} \frac{1}{\beta t} \exp\left(-\frac{t}{\tau_+}\right). \quad (3.7)$$

Jest to obcięty (za pomocą funkcji eksponens) rozkład potęgowy o wykładniku 1 - otrzymaliśmy zatem jeden z przypadków sugerowanych w pracy [23] dla procesów kolejkowania, w których długość kolejki jest ustalona. W rozważanym tutaj modelu obcięte prawo potęgowe pojawia się dzięki przyjęciu po prostu jednostajnego rozkładu zmiennej ε .



Rysunek 3.1: Wykres zależności PTD od t/τ_0 . Linia przerywana opisuje przypadek poissonowski dany równaniem (3.4). Linia kropkowana przedstawia PTD z równania (3.5) dla $\rho(\varepsilon)$ opisanego rozkładem jednostajnym (przykładowo dla $\tau_0 = 1, \beta = 1, \Delta = 3$). Linia ciągła przedstawia PTD z równania (3.9) dla $\rho(\varepsilon)$ opisanego rozkładem Laplace'a (3.8) (dla $\sigma = 2, \beta = 1$). Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

Kolejnym przypadkiem zaproponowanym w pracy Vazqueza [23] jest prawo potęgowe z wykładnikiem $3/2$ pojawiające się w sytuacji, gdy kolejka może przyjmować

dowolną długość. W naszym podejściu można uzyskać dowolne prawo potęgowe postaci $\psi(t) \sim 1/t^\delta$, $\delta > 1$. W tym celu należy założyć wykładniczy rozkład zmiennej $|\varepsilon|$:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{2\sigma} e^{-|\varepsilon|/\sigma}, \quad (3.8)$$

czyli rozkład Laplace'a zmiennej ε , gdzie $\sigma = \langle |\varepsilon| \rangle > 0$. Podstawiając tą zależność do równania (3.1) i zakładając wykładniczą warunkową funkcję rozkładu PTD (równanie (3.2)) oraz wykorzystując $\tau(\varepsilon)$ z równania (3.3) otrzymujemy ostatecznie:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sigma\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\beta\varepsilon - (t/\tau_0) e^{-\beta\varepsilon} - |\varepsilon|/\sigma \right\} d\varepsilon.$$

Całka występująca po prawej stronie powyższego równania może być rozdzielona na dwie całki obliczane na odcinku $[0, \infty]$

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sigma\tau_0} [I^{(+)}(t) + I^{(-)}(t)],$$

gdzie

$$I^{(\pm)}(t) = \int_0^{\infty} \exp \left\{ \pm\beta\varepsilon - (t/\tau_0) e^{\pm\beta\varepsilon} - \varepsilon/\sigma \right\} d\varepsilon.$$

Stosując prostą zamianę zmiennych ($x \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(\pm\beta\varepsilon)$) otrzymuje się, że

$$I^{(+)}(t) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^{1-1/\sigma\beta} \int_{t/\tau_0}^{\infty} x^{-1/\sigma\beta} e^{-x} dx = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^{1-1/\sigma\beta} \Gamma(1 - 1/\sigma\beta, t/\tau_0)$$

oraz

$$I^{(-)}(t) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^{1+1/\sigma\beta} \int_0^{t/\tau_0} x^{1/\sigma\beta} e^{-x} dx = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^{1+1/\sigma\beta} \gamma(1 + 1/\sigma\beta, t/\tau_0),$$

gdzie $\Gamma(\alpha, z)$ i $\gamma(\alpha, z)$ to niekompletne³ funkcje gamma [35]. Stąd otrzymujemy ścisłą formułę na bezwarunkową funkcję rozkładu PTD (patrz linia ciągła na rys. 3.1)

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sigma\beta\tau_0} \left[\left(\frac{\tau_0}{t} \right)^{1+1/\sigma\beta} \gamma(1 + 1/\sigma\beta, t/\tau_0) + \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^{1-1/\sigma\beta} \Gamma(1 - 1/\sigma\beta, t/\tau_0) \right]. \quad (3.9)$$

Charakterystyczna, odpowiadająca tej gęstości skala czasowa τ_c (zdefiniowana jako wartość oczekiwana $\tau_c = \langle t \rangle$) wynosi

$$\tau_c = \frac{\tau_0}{1 - (\beta\sigma)^2}.$$

Ten charakterystyczny czas istnieje, gdy jest spełniony warunek $\beta\sigma < 1$, tzn. dla "fazy wysokotemperaturowej". A zatem rozważany tutaj proces cechuje się zupełnie

³Zauważmy, że niekompletna funkcja gamma dana pierwszą całką staje się zwykłą funkcją gamma Eulera, gdy $t/\tau_0 \rightarrow 0$ natomiast druga, gdy $t/\tau_0 \rightarrow \infty$.

odmiennym zachowaniem dla $\beta\sigma < 1$ oraz $\beta\sigma > 1$. W pierwszym przypadku istnieje skończony oczekiwany czas pomiędzy kolejnymi zdarzeniami, natomiast w drugim przypadku, dla "fazy niskotemperaturowej", wartość ta nie istnieje. Dla takiej fazy statystyka zdarzeń jest zdominowana przez rzadkie i ekstremalne zdarzenia [15, 33].

Zatem możemy stwierdzić, że **dla $\sigma = \beta^{-1}$ w układzie mamy do czynienia z analogią przemiany fazowej**. Zauważmy, że w oryginalnym dolinowym modelu nośników fotoprądu Schera-Montrolla przemiana fazowa tego typu pojawia się, gdy średnia wartość głębokości studni potencjału $\sigma = \langle |\varepsilon| \rangle$ zrównuje się z energią termiczną otoczenia $k_B T$.

Powróćmy teraz do analizy równania (3.9). Dla długich czasów $t/\tau_0 \gg 1$ asymptotyczne zachowanie niekompletnych funkcji gamma jest następujące [35]:

$$\gamma(1 + 1/\sigma\beta, t/\tau_0) \approx \Gamma(1 + 1/\sigma\beta) - (t/\tau_0)^{1/\sigma\beta} e^{-t/\tau_0}$$

oraz

$$\Gamma(1 - 1/\sigma\beta, t/\tau_0) \approx (t/\tau_0)^{-1/\sigma\beta} e^{-t/\tau_0}.$$

Zaniedbując zanikające wykładniczo wyrazy otrzymujemy:

$$\psi(t) \approx \frac{\Gamma(1 + 1/\sigma\beta)}{2\sigma\beta\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{1+1/\sigma\beta} \quad (t \gg \tau_0), \quad (3.10)$$

czyli ogólne prawo potęgowe postaci $1/t^\delta$ z wykładnikiem większym od 1 (warto przypomnieć w tym miejscu, że parametry β i σ są dodatnie). Jak należało oczekiwać, wyrażenie (3.10) jest formalnie identyczne z (2.62) (wyprowadzonym w rozdz. 2.2.1).

Zatem pojawienie się potęgowych ogonów w funkcji PTD wynika bezpośrednio z założenia niejednostajnego rozkładu (w naszym przypadku rozkładu Laplace'a (3.8)) dla zmiennej losowej ε . Warto tutaj zauważyć, że przy wyprowadzeniu zależności potęgowej (3.10) nie wprowadzaliśmy w pośrednich krokach praw potęgowych w żadnym innym miejscu. Zauważmy również, że w przeciwieństwie do przypadku rozkładu jednostajnego w którym zmienna losowa ε jest ograniczona do odcinka o długości Δ , tutaj może przyjmować ona dowolne wartości. Ostatnią uwagą w tej części jest to, że przypadek rozkładu potęgowego z wykładnikiem $3/2$ analizowany w pracy [23] otrzymujemy z równania (3.10) przyjmując po prostu, że $\sigma = 2/\beta$.

3.3 Momenty czasów oczekiwania

Funkcja PTD dostarcza pełnej informacji o własnościach statystycznych czasów pomiędzy zdarzeniami. Jednakże istnieją również inne wielkości pozwalające na analizę istotnych własności procesów, takich jak np. multifraktalność. Do tej klasy wielkości

należą momenty dowolnego rzędu rozkładu czasów oczekiwania, PTD, o ile oczywiście istnieją:

$$\langle t^q \rangle = \int_0^\infty t^q \psi(t) dt.$$

W ramach omawianego w tej pracy podejścia opartego na superstatystykach z funkcją wagową $\rho(\varepsilon)$, q -momenty (tzn. momenty rzędu q) wyrażają się w następujący sposób:

$$\langle t^q \rangle = \int_{-\infty}^\infty \langle t^q | \varepsilon \rangle \rho(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.11)$$

gdzie $\langle t^q | \varepsilon \rangle$ oznaczają momenty warunkowe zdefiniowane jako

$$\langle t^q | \varepsilon \rangle = \int_0^\infty t^q \psi(t | \varepsilon) dt.$$

Z powyższego oraz z równań (3.2) i (3.3) otrzymujemy momenty warunkowe w postaci

$$\langle t^q | \varepsilon \rangle = \Gamma(1 + q) \tau_0^q e^{q\beta\varepsilon}, \quad (3.12)$$

a wówczas momenty (bezw warunkowe) można wyrazić jako:

$$\langle t^q \rangle = \Gamma(1 + q) \tau_0^q \int_{-\infty}^\infty e^{q\beta\varepsilon} \rho(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (3.13)$$

W ogólności rząd momentu q może przyjmować dowolną wartość. Jednakże przy założeniu wykładniczego rozkładu (3.2) momenty warunkowe $\langle t^q | \varepsilon \rangle$, a więc również momenty bezwarunkowe $\langle t^q \rangle$ istnieją tylko dla $q > -1$ ze względu na obecną we wzorach funkcję gamma Eulera. Co więcej, momenty bezwarunkowe istnieją tylko wówczas, gdy $\rho(\varepsilon)$ zanika szybciej niż $e^{-q\beta\varepsilon}$ w granicy $\varepsilon \rightarrow \infty$.

3.3.1 Monofraktalność a multifraktalność

Przed przystąpieniem do dalszej analizy warto przypomnieć jedno z kryterium multifraktalności, mianowicie proces losowy lub losowa struktura są multifraktalne wtedy i tylko wtedy gdy ich q -momenty (momenty rzędu q) skalują się jak

$$\langle t^q \rangle \sim L^{f(q)},$$

gdzie $f(q)$ jest jakąś nieliniową funkcją q a L oznacza pewną bazę (jest o tym dokładniej mowa w części III przy okazji dyskusji danych empirycznych). Gdy $f(q)$ jest liniowe, to wspomniany proces albo struktura są monofraktalne [34].

Przeanalizujmy teraz możliwość wystąpienia multifraktalności w zależności od wyboru funkcji wagowej $\rho(\varepsilon)$. Ponownie najprostszym wyborem jest $\rho(\varepsilon) = \delta(\varepsilon - \mu)$ (gdzie jak zwykle $\delta(\dots)$ jest deltą Diraca), co w języku fizyki oznacza brak zróżnicowania głębokości dolin potencjału (wszystkie mają jednakową głębokość μ). W

takim przypadku prosty rachunek prowadzi do wyniku charakteryzującego monofraktalne zachowanie procesu:

$$\langle t^q \rangle = \Gamma(1 + q) \tau_0^q l^q, \quad (3.14)$$

gdzie

$$l \equiv e^{\beta\mu}. \quad (3.15)$$

W rozdz. 3.2.1 pokazaliśmy, że przyjęcie zarówno jednostajnego jak i wykładniczego rozkładu zmiennej $\rho(\varepsilon)$ może prowadzić do pojawienia się grubych ogonów funkcji PTD $\psi(t)$. W naturalny sposób rodzi się pytanie, czy te dwa typy rozkładów (określone równaniami (3.5) i (3.9)) prowadzą do multifraktalności.

Dla rozkładu jednostajnego $\rho(\varepsilon) = 1/(2\Delta)$ ($-\Delta \leq \varepsilon \leq \Delta$) mamy:

$$\langle t^q \rangle = \frac{\Gamma(q)}{2\Delta\beta} (\tau_+^q - \tau_-^q), \quad (3.16)$$

gdzie $\tau_{\pm}^q = \tau_0 \exp(\pm q\Delta\beta)$. Równanie (3.16) opisuje w przybliżeniu zachowanie monofraktalne, gdy $\tau_+ \gg \tau_-$ lub (równoważnie) $\Delta\beta \gg 1$.

Dla rozkładu Laplace'a $\rho(\varepsilon) = (1/2\sigma)e^{-|\varepsilon|/\sigma}$ otrzymujemy

$$\langle t^q \rangle = \frac{\Gamma(1 + q)}{2\sigma} \tau_0^q \int_{-\infty}^{\infty} e^{q\beta\varepsilon - |\varepsilon|/\sigma} d\varepsilon.$$

W tym przypadku q -momenty istnieją tylko wtedy, gdy $\beta q < \sigma^{-1}$. Wówczas,

$$\langle t^q \rangle = \frac{\Gamma(1 + q)}{1 - (q\beta\sigma)^2} \tau_0^q, \quad (3.17)$$

co oznacza, że także i w tym przypadku mamy do czynienia ze strukturą monofraktalną przedziałów czasu. A zatem, **żadna z obu rozpatrywanych funkcji wagowych generujących rozkłady bezwarunkowe posiadające grube ogony nie prowadzi do multifraktalnej struktury q -momentów**. Takiego wyniku należało oczekiwać, gdyż wspomniane rozkłady jako jądra całkowe nie prowadzą do pojawienia się wielu singularności (czego, jak zobaczymy poniżej, wymaga wielofraktalność).

Aby uzyskać multifraktalność należy rozważać jako gęstość rozkładu np. funkcję rozciągnięty eksponens

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{2\sigma\Gamma(1 + 1/\alpha)} \exp\left[-\left|\frac{\varepsilon - \mu}{\sigma}\right|^{\alpha}\right], \quad (3.18)$$

gdzie $\alpha > 0$ i $\sigma > 0$; tutaj σ jest bezpośrednio związana z dyspersją zmiennej ε a nie z jej wartością oczekiwaną, jak to ma miejsce dla rozkładu Laplace'a (3.8).

Podstawiając równanie (3.18) do (3.13) uzyskujemy, po prostej zamianie zmiennych, wyrażenie na momenty rzędu q w postaci pośredniej:

$$\langle t^q \rangle = \frac{\Gamma(1+q)}{2\Gamma(1+1/\alpha)} \tau_0^q l^q I_0(q), \quad (3.19)$$

gdzie l zostało już zdefiniowane wcześniej w równaniu (3.15), natomiast

$$I_0(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|y|^\alpha + q\sigma\beta y) dy. \quad (3.20)$$

Powyższa całka jest zbieżna dla $\alpha > 1$. Innymi słowy, bezwarunkowe momenty $\langle t^q \rangle$ istnieją dla $\alpha > 1$ oraz $q > -1$ (dolne ograniczenie na q wynika z istnienia nieusuwalnej funkcji gamma Eulera w wyrażeniu (3.19)).

Całkowanie w równaniu (3.20) można przeprowadzić ściśle za pomocą rozwinięcia wyrażenia podcałkowego w szereg potęgowy. Uzyskujemy wówczas:

$$I_0(q) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^\alpha} \cosh(q\sigma\beta y) dy = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q\sigma\beta)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} y^{2n} e^{-y^\alpha} dy.$$

Zatem,

$$\langle t^q \rangle = \frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1/\alpha)} \tau_0^q l^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma((2n+1)/\alpha)}{(2n)!} (q\sigma\beta)^{2n}, \quad (3.21)$$

jest ścisłym wyrażeniem na q -momenty. Jednakże, ze względu na czynnik $\Gamma((2n+1)/\alpha)$ pojawiający się w liczniku zbieżność powyższej sumy jest wolna, a zatem uciążliwa nawet do numerycznego stosowania. Pomimo tego, tytułem przykładu, obliczyłem q -moment dla stu wyrazów szeregu (obliczenie dla tysiąca nie zmieniło zauważalnie wyniku w zdolności rozdzielczej rys. 3.2). Należy podkreślić, że tylko dla małych i pośrednich wartości q ma miejsce przedstawiona na rysunku dobra zgodność przewidywań wzoru (3.21) (czerwona krzywa ciągła) z danymi empirycznymi (czarne punkty na wykresie).

Dla $\alpha = 2$ (tzn. dla gaussowskiego rozkładu ε) całka $I_0(q)$ może zostać obliczona bezpośrednio dając:

$$\langle t^q \rangle = \Gamma(1+q) \tau_0^q l^q e^{\sigma^2 \beta^2 q^2 / 4},$$

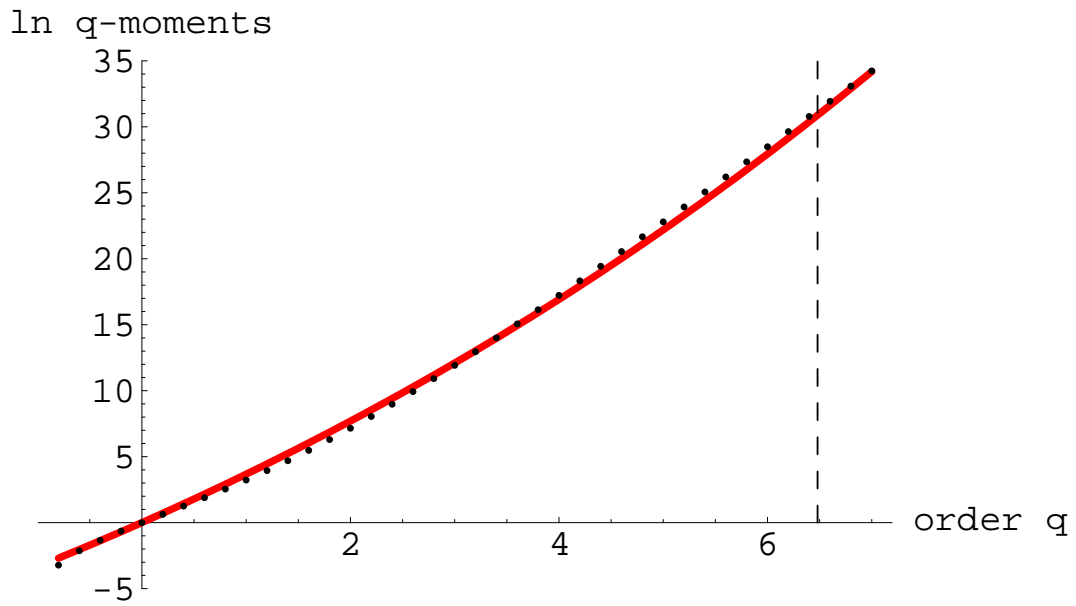
co po wprowadzeniu oznaczenia

$$L \equiv e^{(\sigma\beta)^2 / 4}$$

proceedzi do multifraktalnego ale niesingularnego zachowania q -momentów:

$$\langle t^q \rangle = \Gamma(1+q) \tau_0^q l^q L^{q^2}. \quad (3.22)$$

Dla $\alpha \neq 2$, całka $I_0(q)$ nie daje się wyznaczyć ściśle, w zamkniętej postaci. Aby rozstrzygnąć możliwość zachowania multifraktalnego q -momentów konieczne jest przeprowadzenie obliczeń przybliżonych.



Rysunek 3.2: Przykładowe porównanie przewidywań wzoru (3.21) (czerwona krzywa ciągła) z danymi empirycznymi (czarne punkty) dla kontraktów terminowych futures na kurs wymiany USDM w zakresie $-0.8 \leq q \leq 7.0$. Na osi rzędnych odłożono $\ln(\langle t^q \rangle / \Gamma(1+q))$. Krzywą teoretyczną poprowadzono dla wykładnika $\alpha = 1.818$, $\tau_0 l = 3.5$, $\beta\sigma = 0.78$.

Definiuję w tym celu nową zmienną całkowania x w równaniu (3.20) poprzez zmianę skali $y = (\beta\sigma)^{1/(\alpha-1)}x$. Mamy wówczas:

$$I_0(q) = \lambda^{1/\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\lambda[|x|^\alpha - qx]\right\} dx, \quad (3.23)$$

gdzie

$$\lambda \equiv (\beta\sigma)^{\alpha/(\alpha-1)}. \quad (3.24)$$

Założmy, że fluktuacje zmiennej losowej ε (związane z parametrem σ) są większe od "energii termicznej" otoczenia β^{-1} , tzn. $\beta\sigma > 1$. Wówczas bezwymiarowy parametr λ jest wystarczająco duży aby możliwe było bezpieczne zastosowanie przybliżenia punktu siodłowego [85] (ang. *Saddle-Point Approximation*) do obliczenia całki $I_0(q)$. Obliczenia te przeprowadzono w Dodatku A, co ostatecznie dało:

$$I_0(q) \simeq A(q) \exp\left[b|q|^{\alpha/(\alpha-1)}\right], \quad (3.25)$$

gdzie wolnozmienny czynnik przedwykładniczy $A(q)$ dany jest wyrażeniem (A.9) (patrz Dodatek A), natomiast

$$b = (\alpha - 1) (\beta\sigma/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)} > 0. \quad (3.26)$$

Podstawiając równanie (3.25) do (3.19) otrzymujemy przybliżone wyrażenie analityczne dla momentów rzędu q przedziałów czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami. Poniżej przedstawiamy to wyrażenie w postaci jawnej, pozwalającej zauważyć jego multifraktałny i singularny⁴ charakter

$$\langle t^q \rangle \simeq \Gamma(1 + q) \tau_0^q l^q L^{|q|^{\alpha/(\alpha-1)}}, \quad (3.27)$$

gdzie charakterystyczne bazy l oraz L występują tutaj jednocześnie. Pierwsza z nich - $l = e^{\mu\beta}$ - określona w równaniu (3.15), związana jest z dyssypacją, ponieważ zależy (w jawny sposób) od czynnika dyssypacyjnego μ pochodzącego z gęstości wagowej (3.18). Z kolei druga baza, związana z multifraktałnym i w ogólności singularnym zachowaniem momentów,

$$L \equiv e^b \quad (3.28)$$

dotyczy fluktuacji poprzez parametr b (zdefiniowany w równaniu (3.26)) zależny od σ , który odnosi się do wariancji zmiennej ε (wyrażonej wzorem $[\Gamma(3/\alpha)/\Gamma(1/\alpha)]\sigma^2$).

Wynik (3.27) jest kluczowym w niniejszej pracy - dalsza analiza jest tego konsekwencją.

Zauważmy, że wszystkie funkcje momentów rozważane w tej pracy zachowują właściwą normalizację, tzn. są równe 1 dla $q = 0$.

⁴Mówiąc o charakterze singularnym mam na myśli fakt, że w ogólności wykładnik potęgi $\alpha/(\alpha - 1)$ nie jest całkowity.

Obie bazy (dyssypatywna i fluktuacyjna) stają się tożsame dla $b = \mu\beta$. Równość ta oznacza, że dyssypacja μ i fluktuacja σ są ze sobą powiązane poprzez równanie:

$$\mu = k\sigma^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad (3.29)$$

gdzie $k = (1 - 1/\alpha)(\beta/\alpha)^{1/(\alpha-1)}$.

Dla $\alpha = 2$ (przypadek gaussowski) związek ten przyjmuje prostą postać:

$$\mu = (\sigma/2)^2$$

co stanowi pełną analogię standardowej relacji dyssypacyjno-fluktuacyjnej (będącej treścią twierdzenia fluktuacyjno-dyssypacyjnego). To stwierdzenie pozwala nam na spojrzenie na równanie (3.29) jak na fraktalne uogólnienie twierdzenia fluktuacyjno-dyssypacyjnego odpowiednie do stosowanego tutaj podejścia. Przy okazji zauważmy, że gdy powyższa relacja zachodzi, to monofrakalna i multifrakalna część wyrażenia na q -momenty jest opisywana pojedynczą skalą dając:

$$\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)\tau_0^q} \simeq L^{q+|q|^{\alpha/(\alpha-1)}},$$

czyli wyrażenie bardziej jednolite i prostsze od (3.27).

Rozdział 4

Systematyczna analiza charakterystycznych danych empirycznych

Niniejszy rozdział ma na celu pokazanie, iż **niezależnie od sposobu normalizowania (standaryzowania), skalowania lub detrendowania danych, efekt multifraktalności jest wciąż wyraźnie widoczny**. Mówiąc prościej, niezależnie od tego czy dane empiryczne są czy też nie są zdetrendowane multifraktalność jest wciąż dobrze widoczna w danych empirycznych¹. Jest to kluczowa obserwacja empiryczna (patrz rysunki 4.13 - 4.16 oraz 4.18), dzięki której **celowym było uogólnienie przeze mnie standardowego formalizmu CTRW do wymaganego w niniejszej pracy wariantu MF-CTRW** (ang. *Multifractal Continuous-Time Random Walk*).

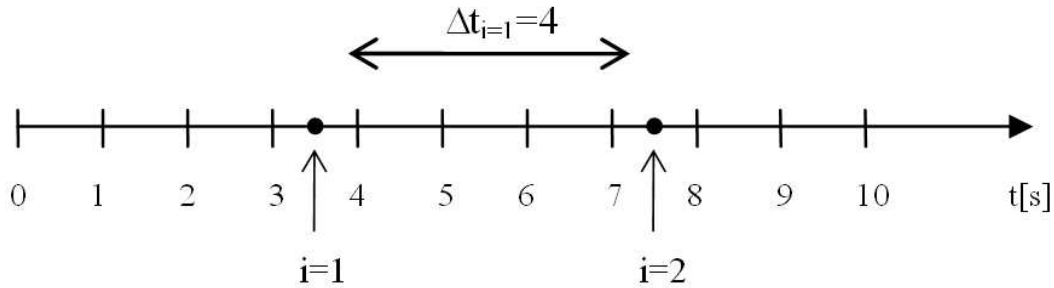
W niniejszym rozdziale przeanalizowane zostały odstępy czasowe obserwowane między kolejnymi transakcjami, Δt , na rynkach finansowych². Tytułem charakterystycznego przykładu, rozważono szczegółowo akcje KGHM³ (z indeksu WIG20), jednej z najintensywniej handlowanych spółek na GPW⁴. Analiza opierała się tutaj na 316997 obserwacjach obejmujących okres od 05.01.2009 r. do 16.10.2009 r. Transakcje były rejestrowane z częstotliwością jednej sekundy (patrz rys. 4.1); jeżeli w ciągu jednej sekundy pojawiło się więcej transakcji, to były one zapisywane jako pojedyncza transakcja z odpowiednio większym wolumenem. Nie jest to jednak zbyt restrykcyjne ograniczenie, ponieważ przeciętny odstęp międzytransakcyjny wahał się w granicach 5 - 25 sekund (w zależności od pory dnia - patrz rozdz. 4.1.2).

¹Dane empiryczne analizowane w tym rozdziale zaczerpnięto ze strony <http://www.bossa.pl>.

²Teraz wygodniej będzie się posługiwać oznaczeniem Δt a nie t .

³Pełna nazwa: *KGHM Polska Miedź*, dawniej *Kombinat Górniczo-Hutniczy Miedzi*.

⁴Pełna nazwa: *Warszawska Giełda Papierów Wartościowych*.



Rysunek 4.1: Graficzne przedstawienie sposobu obliczania międzytransakcyjnych odstępów czasu.

4.1 Przykładowa analiza czasów międzytransakcyjnych spółki KGHM

4.1.1 Pierwsze wyniki - wizualizacja danych

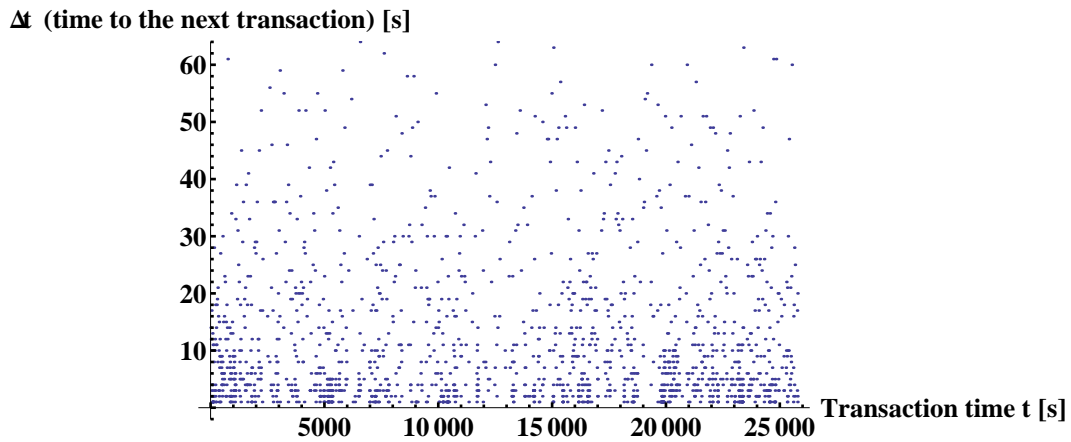
Na rys. 4.2 przedstawiono czasy międzytransakcyjne, Δt , dla transakcji akcjami spółki KGHM z dnia (przykładowo) 18.08.2009 r. jako funkcję czasu transakcji t wyrażonego w sekundach liczonego od godz. 9:00:00. Zatem, np. jeśli pierwsza transakcja nastąpiła o 9:00:03, a druga o 9:00:07, to pierwszy punkt ma współrzędne ($t_1 = 3, \Delta t_1 = t_2 - t_1 = 7 - 3 = 4$). A zatem, czas międzytransakcyjny liczony jest wprzód do następnego punktu (a nie wstecz do poprzedniego):

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad (4.1)$$

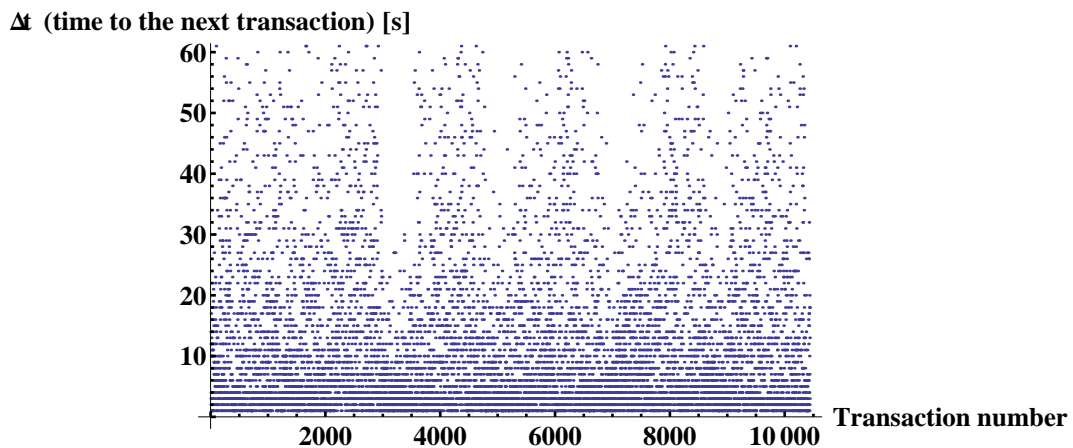
gdzie t_i oznacza czas bieżącej transakcji o numerze i , natomiast t_{i+1} oznacza czas wystąpienia kolejnej transakcji (patrz rys. 4.1). Z obliczeń czasów międzytransakcyjnych Δt_i dla całego zbioru danych empirycznych wyłączono, oczywiście, przerwy w funkcjonowaniu giełdy (w tym przerwy od zakończenia danej sesji do początku kolejnej).

Na rys. 4.2 widać, że transakcje są częstsze na początku i na końcu sesji, natomiast w środku sesji (od ok. 10 000 s. do 15 000 s.) widoczny jest tzw. "efekt lunchu", czyli wyraźne obniżenie aktywności inwestorów w godzinach południowych.

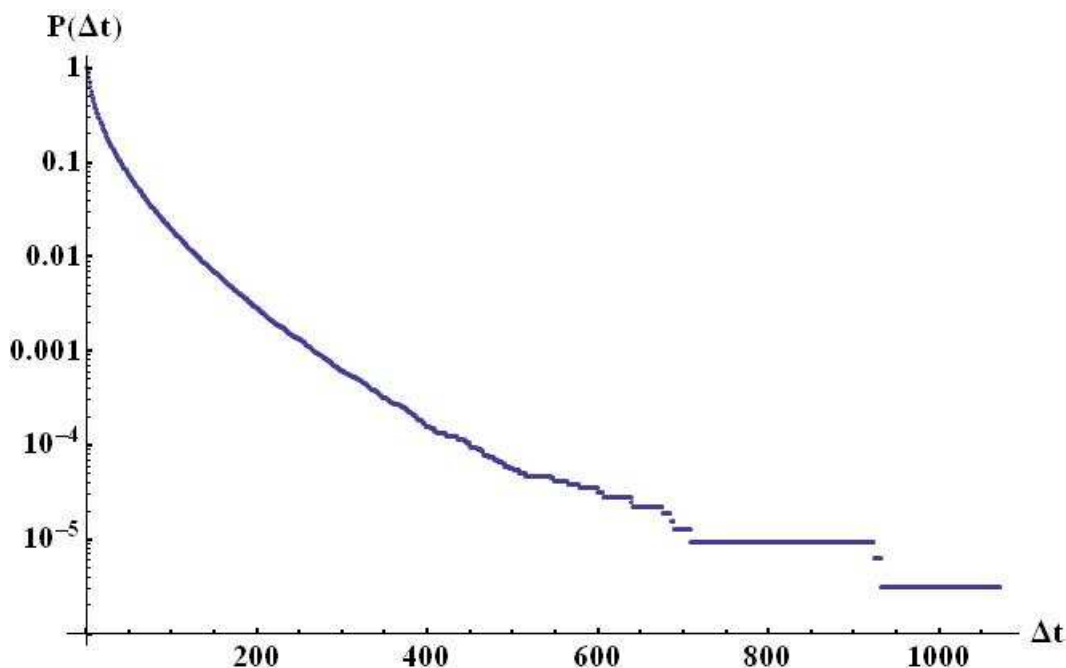
Analogiczny wykres przedstawiono na rys. 4.3, tym razem dla 6 kolejnych dni transakcyjnych (od 18.08.2009 do 25.08.2009). Teraz na osi odciętych umieszczono kolejny numer transakcji (a więc, pierwszy punkt ma tutaj współrzędne ($i = 1, \Delta t_{i=1} = 4$)). Dzienna struktura aktywności jest teraz dobrze widoczna.



Rysunek 4.2: Wykres przedstawiający czasy międzytransakcyjne, Δt , w funkcji czasu transakcji t liczonego w sekundach od godz. 9:00:00, dla transakcji akcjami KGHM z dnia 18.08.2009 r. Punkty są gęściej rozłożone (co odpowiada krótszym czasom międzytransakcyjnym) zwłaszcza na początku i na końcu sesji.



Rysunek 4.3: Wykres czasów międzytransakcyjnych, Δt , w funkcji numeru transakcji dla handlu akcjami spółki KGHM w dniach od 18.08.2009 do 25.08.2009.



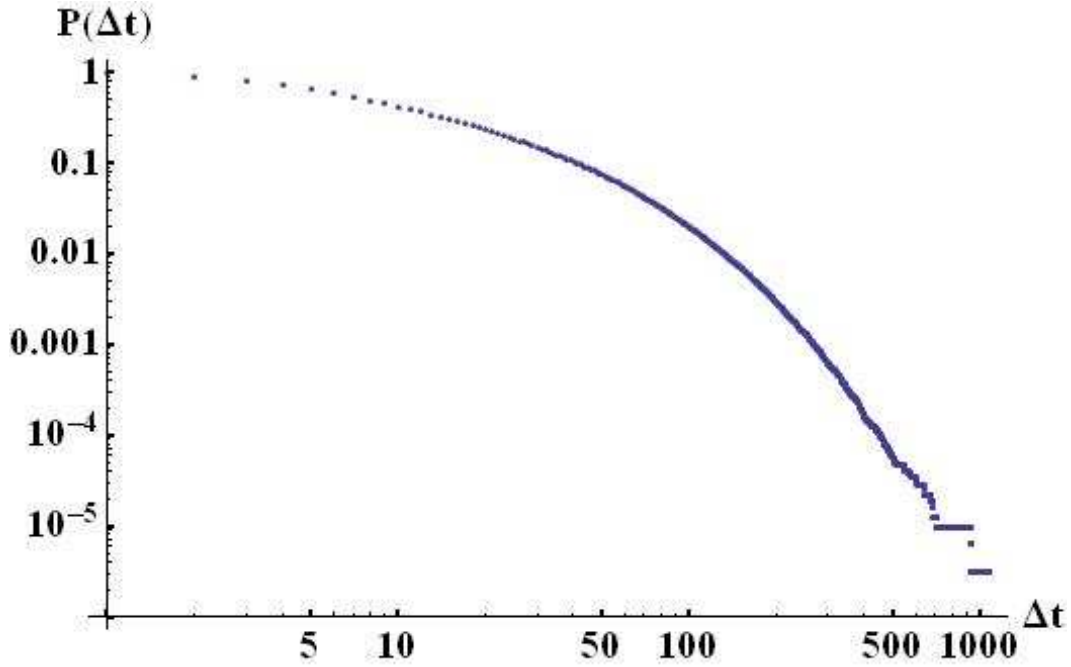
Rysunek 4.4: Wykres prawdopodobieństwa przetrwania dla czasu międzytransakcyjnego w skali półlogarytmicznej. Nieliniowość zależności od czasu wskazuje na niepoissonowski charakter rozkładu.

Jedną z podstawowych wielkości charakteryzujących własności statystyczne analizowanej zmiennej losowej Δt jest funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej. Na rysunkach 4.4 i 4.5 przedstawiono (odpowiednio w skali półlogarytmicznej oraz log-log) prawdopodobieństwo (skumulowane) braku transakcji przez czas dłuższy od Δt , tzn. prawdopodobieństwo przekroczenia przez obserwowany czas międzytransakcyjny odstępu Δt ⁵. Na rysunkach tych możemy zaobserwować, że statystyka odstępów czasu pomiędzy sąsiednimi transakcjami ma charakter niepoissonowski oraz odznacza się pogrubionym ogonem, tzn. względnie wysokimi prawdopodobieństwami wystąpienia dużych wartości Δt .

4.1.2 Lokalna średnia i dyspersja międzytransakcyjnych odstępów czasowych

W celu wizualizacji dziennego wzorca (dziennej struktury) aktywności inwestorów warto przeanalizować lokalną średnią i dyspersję czasów międzytransakcyjnych. Aby

⁵Prawdopodobieństwo to w ramach formalizmu CTRW nosi nazwę (przypomnijmy) prawdopodobieństwa przetrwania i oznaczane jest przez Φ lub Ψ .



Rysunek 4.5: Wykres tego samego prawdopodobieństwa przetrwania dla czasu międzytransakcyjnego co przedstawiony na poprzednim rysunku, ale w skali log-log.

rozważać wystarczająco liczne zbiory (tzn. posiadać wystarczającą statystykę czasów międzytransakcyjnych) podzielono każdą sesję (od 9:00:00 do 16:10:00) na $N = 43$ odcinki 10-minutowe (tj. przedział od 9:00 do 9:10 jest oznaczony numerem 1, itd.). Wówczas, dla każdego s -tego odcinka ($1 \leq s \leq N$), obliczono średni (po dniach handlowych) czas między transakcjami μ_s oraz dyspersję σ_s :

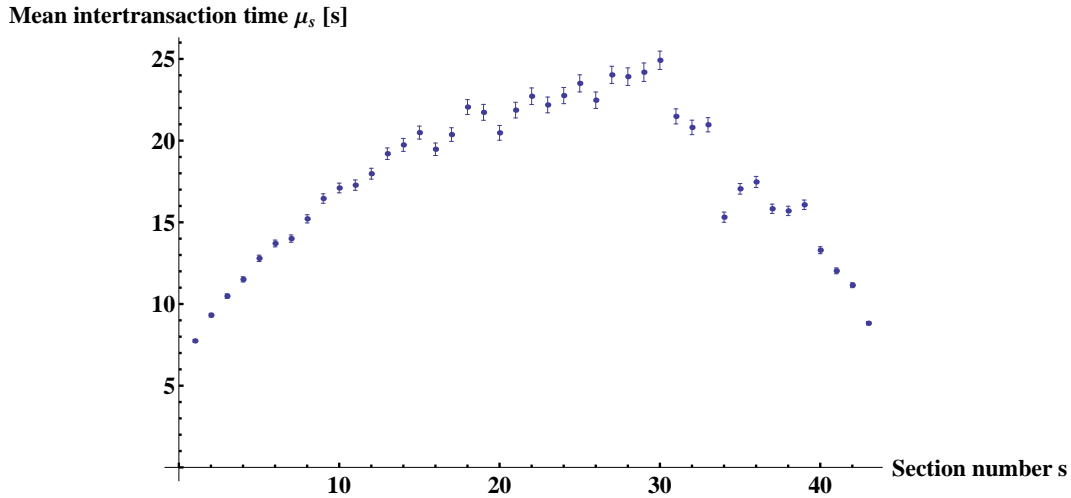
$$\mu_s = \frac{1}{N_s} \sum_{i \in s} \Delta t_i^s, \quad (4.2)$$

$$\sigma_s = \sqrt{\sum_{i \in s} \frac{(\Delta t_i^s - \mu_s)^2}{N_s - 1}}, \quad (4.3)$$

gdzie N_s oznacza całkowitą liczbę transakcji zaobserwowanych w s -tym, 10-minutowym odcinku (sektorze) dla wszystkich dni handlowych; w dalszym ciągu opuszczamy, dla prostoty, wskaźnik s indeksujący i -ty przedział czasu międzytransakcyjnego należący do sektora s .

Jak wiadomo, odpowiadające tym wielkościom błędy statystyczne (estymaty) mają następującą postać:

$$\Delta_{\mu_s} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{N_s}}, \quad (4.4)$$



Rysunek 4.6: Wykres zależności średniego czasu międzytransakcyjnego dla s -tego sektora (odcinka) w funkcji numeru odcinka s dla akcji spółki KGHM. Dobrze widoczny jest spadek aktywności inwestorów (czyli wydłużenie się wspomnianej średniej) w godzinach południowych, jak tego należało oczekiwać.

$$\Delta\sigma_s = \sigma_s \sqrt[4]{\frac{2}{N_s - 1}}. \quad (4.5)$$

Rysunki 4.6 i 4.7 przedstawiają uzyskane wyniki (odpowiednio dla wyrażeń (4.2) i (4.3)) w zależności od numeru kolejnego, 10-minutowego odcinka wraz z odpowiadającymi im błędami (danymi odpowiednio wzorami (4.4) i (4.5)). Dobrze widoczny jest spadek aktywności inwestorów czyli "efekt lunchu" w godzinach południowych, zgodny z poprzednimi wynikami.

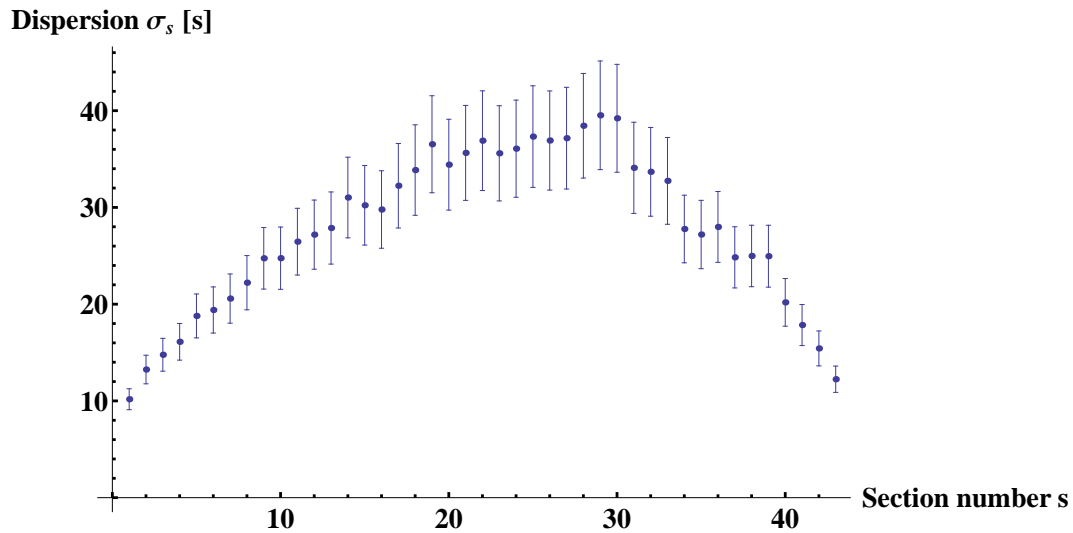
Po znormalizowaniu (zredukowaniu) lokalnej dyspersji do lokalnej średniej, σ_s/μ_s , otrzymujemy bezwymiarowy parametr przyjmujący (z ok. 10-cio procentową dokładnością) stałą wartość (równą ok. 1.5) niezależnie od numeru s odcinka a więc od pory dnia (patrz rys. 4.8). Właśność stałości tak zredukowanej dyspersji posiadają np. rozkład wykładniczy, odwrotny rozkład Gamma, jak też rozkład Pareto.

4.1.3 Normalizacja czasów międzytransakcyjnych

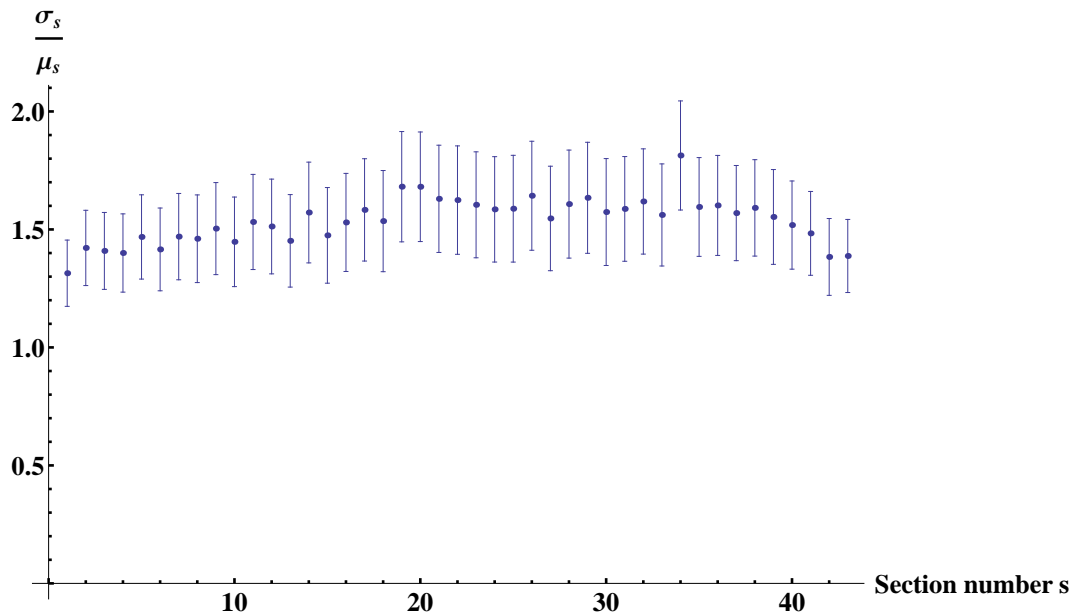
Dzięki wynikom uzyskanym w rozdz. 4.1.2 jest sensownym zdefiniowanie na trzy różne sposoby znormalizowanych (standaryzowanych) czasów międzytransakcyjnych τ_i^s , mianowicie:

- poprzez odjęcie lokalnego średniego czasu międzytransakcyjnego

$$\tau_i^s = \Delta t_i - \mu_s, \quad (4.6)$$



Rysunek 4.7: Wykres zależności dyspersji czasów międzytransakcyjnych w s -tym odcinku w funkcji numeru odcinka s dla akcji spółki KGHM. Wymownym jest wzrost fluktuacji bezwzględnych w godzinach południowych, czego można było oczekiwać.



Rysunek 4.8: Wykres zredukowanej dyspersji w s -tym odcinku w funkcji numeru odcinka dla akcji spółki KGHM. Widoczne jest znaczne osłabienie "efektu lunchu".

- podzielenie przez lokalną dyspersję

$$\tau_i^s = \frac{\Delta t_i}{\sigma_s}, \quad (4.7)$$

- poprzez odjęcie lokalnego średniego czasu międzytransakcyjnego i podzielenie przez lokalną dyspersję

$$\tau_i^s = \frac{\Delta t_i - \mu_s}{\sigma_s}, \quad (4.8)$$

gdzie we wszystkich trzech powyższych wzorach s jest (tak jak i poprzednio) numerem odcinka, w którym pojawiła się transakcja definiująca początek odstępu Δt_i . W dalszych rozważaniach pominięto indeksy i oraz s a więc rozważa się zmienną losową oznaczoną po prostu jako τ .

Najpierw, poniżej

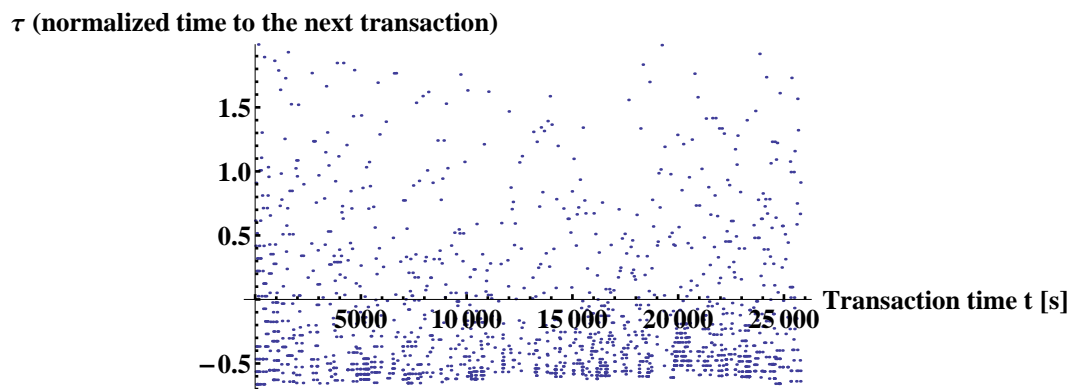
- analizowane są wyniki uzyskane dla trzeciego, najbardziej rozbudowanego sposobu normalizacji (danego wzorem (4.8)) natomiast,
- porównanie q -momentów dla wszystkich typów normalizacji (danych wzorami (4.6) - (4.8)) przedstawiono w podrozdz. 4.1.4, a
- analizę porównawczą dotyczącą 10-ciu wybranych spółek z indeksu WIG20 w rozdz. 4.2.

Na rysunkach 4.9 i 4.10 przedstawiono wykresy analogiczne do tych przedstawionych na rysunkach 4.2 i 4.3 (odpowiednio dla zmiennej τ zamiast Δt). Dla pojedynczego dnia (patrz rys. 4.9) struktura dzienna w zasadzie znika, jednak dla wykresu 6 kolejnych dni (patrz rys. 4.10) nadal obserwuje się jej pozostałość. Można powiedzieć, że na tej drodze został usunięty jedynie główny wzorec aktywności dziennej inwestorów.

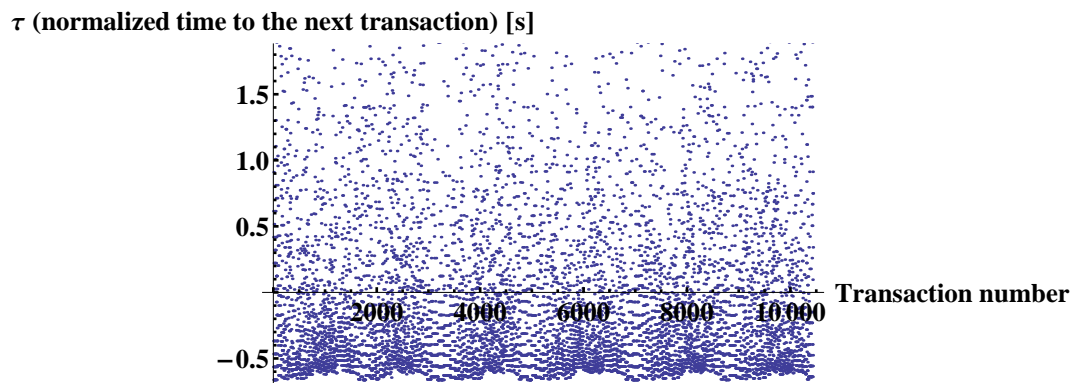
Na rysunkach 4.11 i 4.12 przedstawiono wykresy odpowiadające tym na rysunkach 4.4 i 4.5 ale po unormowaniu czasów międzytransakcyjnych (zgodnie ze wzorem (4.8)). Widać, że pomimo przeskalowania zmiennej losowej kształt odpowiadających sobie wykresów jest zbliżony.

4.1.4 q -momenty

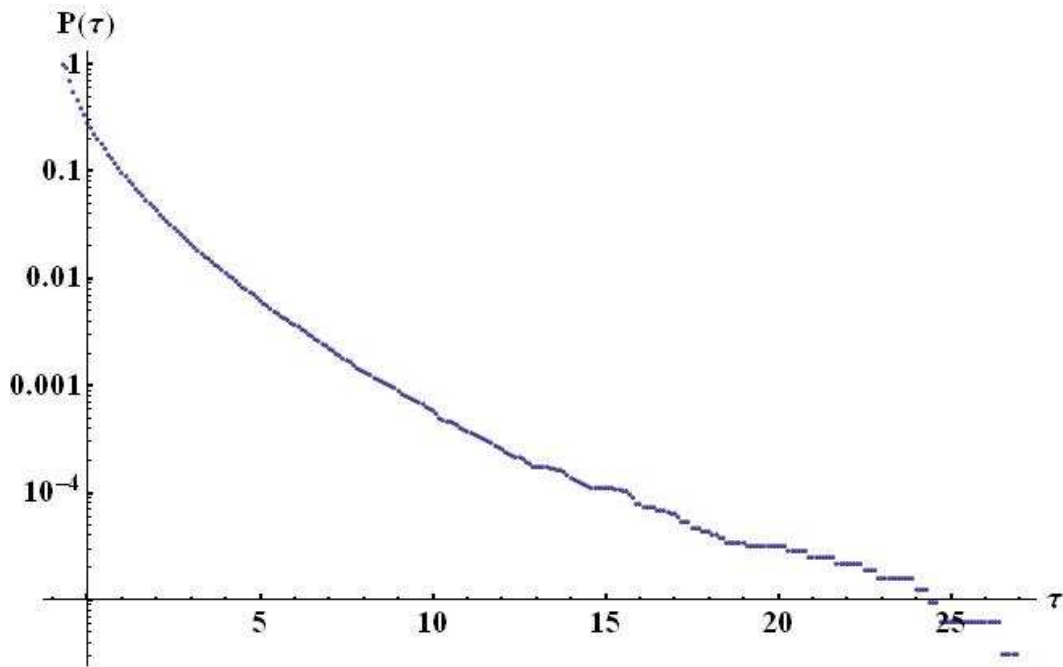
Na rysunkach 4.13 - 4.16 przedstawiono q -momenty czasów międzytransakcyjnych, odpowiednio, nieunormowanych (rys. 4.13) oraz znormalizowanych według wzorów: (4.6) rys. 4.14, (4.7) rys. 4.15 i (4.8) rys. 4.16. Z porównania wykresów na powyższych rysunkach wynika, że usunięcie głównego dziennego trendu widocznego w



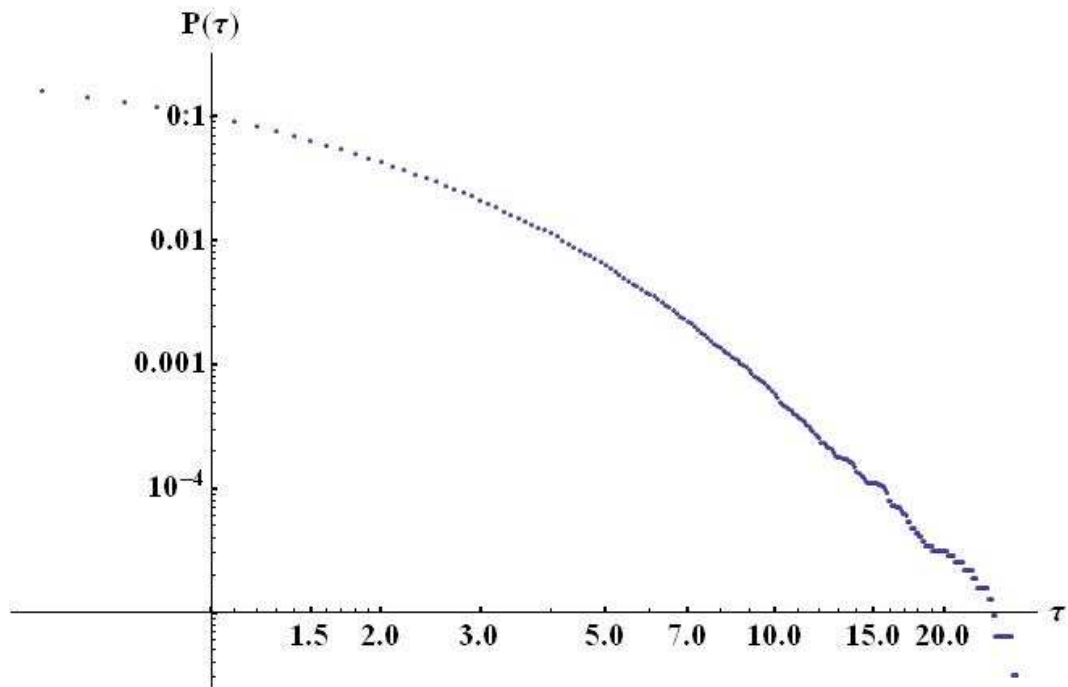
Rysunek 4.9: Wykres znormalizowanych czasów τ (danych wzorem (4.8)) w funkcji czasu transakcji t liczonego w sekundach od godz. 9:00:00, dla handlu akcjami spółki KGHM z dnia 18.08.2009. Jak widać podstawowy wzorec dzienny został usunięty, jednakże nadal można tutaj dostrzec dzienną strukturę resztkową. Być może, jest ona związana z godzinowym rytmem pracy.



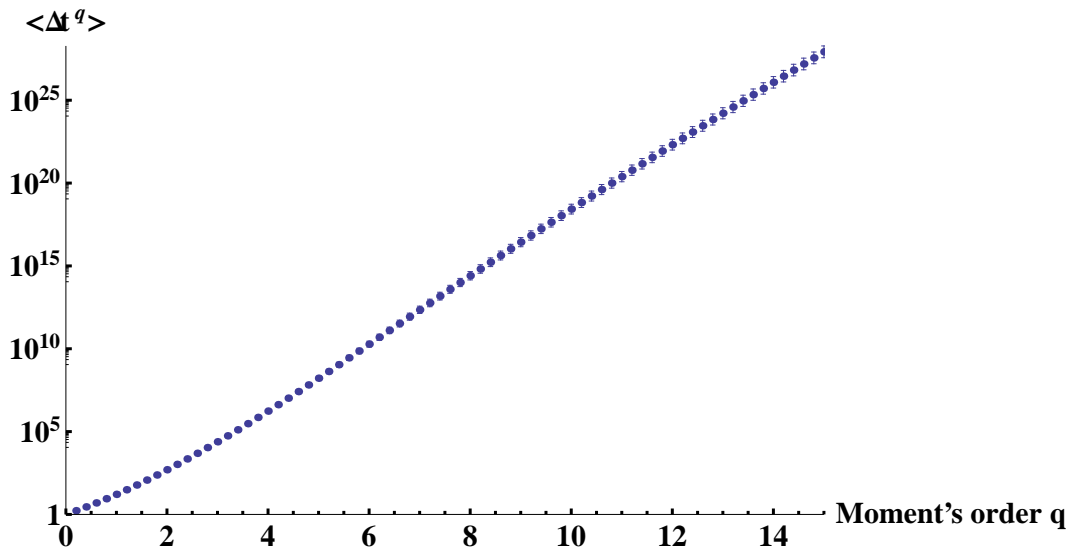
Rysunek 4.10: Wykres unormowanych czasów międzytransakcyjnych τ (danych wzorem (4.8)) w funkcji numeru transakcji, dla handlu akcjami spółki KGHM w dniach od 18.08.2009 do 25.08.2009. Nawet po normalizacji wciąż wyraźnie widoczna jest struktura dzienna.



Rysunek 4.11: Wykres prawdopodobieństwa przetrwania dla unormowanego czasu międzytransakcyjnego w skali półlogarytmicznej. Nieliniowość wskazuje na niepoissonowski charakter rozkładu.



Rysunek 4.12: Wykres prawdopodobieństwa przetrwania dla unormowanego czasu międzytransakcyjnego w skali log-log.



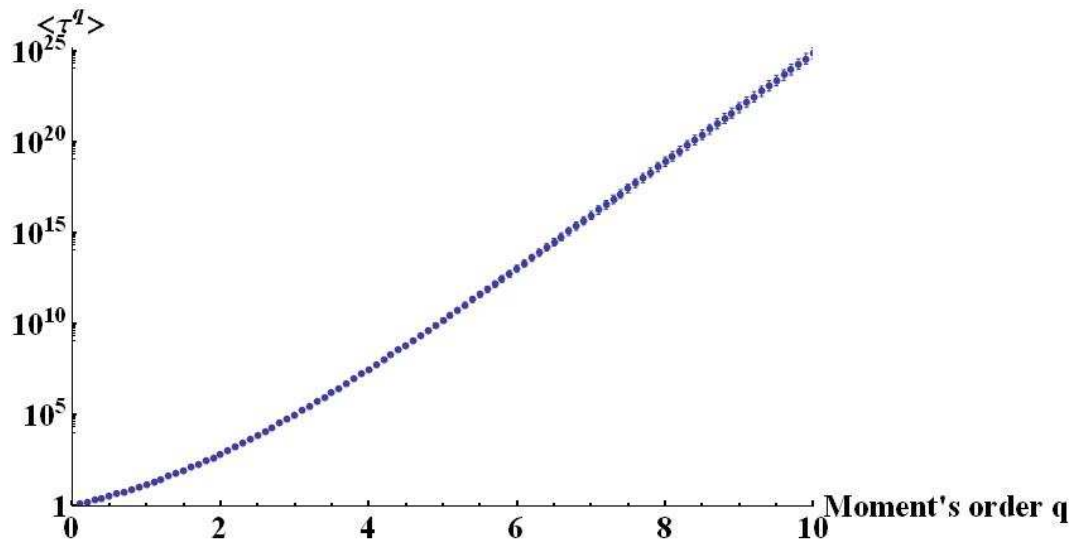
Rysunek 4.13: Wykres zależności q -momentów czasów międzytransakcyjnych, $\langle \Delta t^q \rangle$, w funkcji rzędu q dla akcji KGHM. Nieliniowa zależność jest widoczna, jednak nie jest ona tak wyraźna jak po unormowaniu zmiennej (patrz np. rys. 4.16).

aktywności inwestorów i/albo unormowanie czasów międzytransakcyjnych wzmacnia efekt multifraktalności, tzn. nieliniową zależność logarytmu q -momentu od rzędu momentu q (patrz także rys. 4.17). Zauważmy, że dla normalizacji danej wzorem (4.8) krzywa q -momentów posiada nawet lokalne minimum w pobliżu punktu $q = 1$ (czyli dodatkową strukturę) dobrze widoczne na rysunkach 4.16 i 4.17. Innymi słowy, **multifraktalność jest widoczna nawet bez usuwania trendu i/albo wprowadzania normalizacji czasów międzytransakcyjnych**. Jest to kluczowa obserwacja umożliwiająca zastosowanie MF-CTRW.

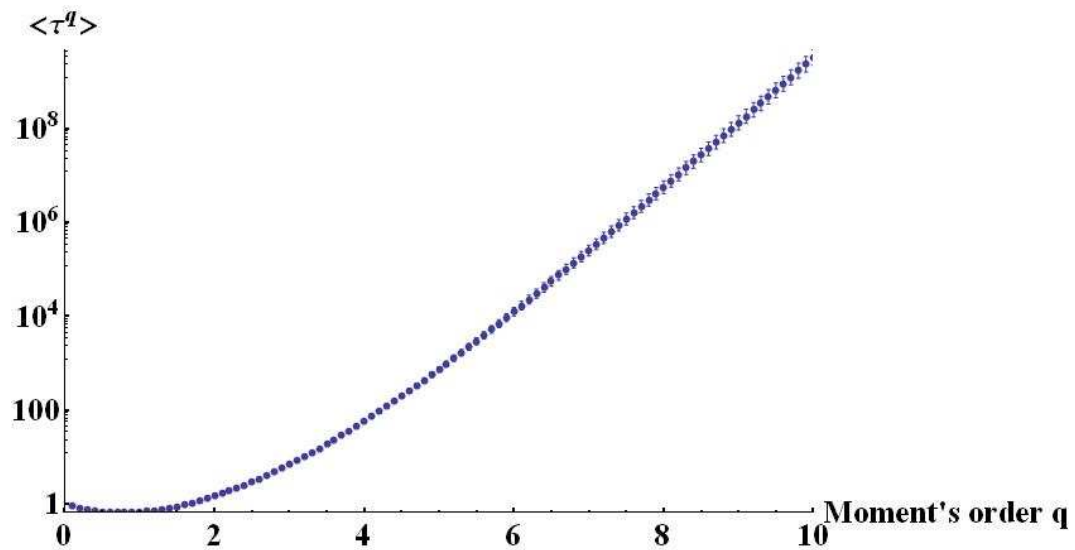
4.2 Analiza innych spółek

W sposób analogiczny jak powyżej (tzn. korzystając ze wzoru (4.8)) zbadałem 10 spółek z indeksu WIG20 (tzn. 5 największych oraz 5 najmniejszych). Na rysunkach 4.18 i 4.19 przedstawiłem dla nich funkcje q -momentów. Można zauważyć, że kształt w tych wszystkich przypadkach jest zbliżony do analogicznego dla spółki KGHM - w tym sensie można go traktować jako uniwersalny.

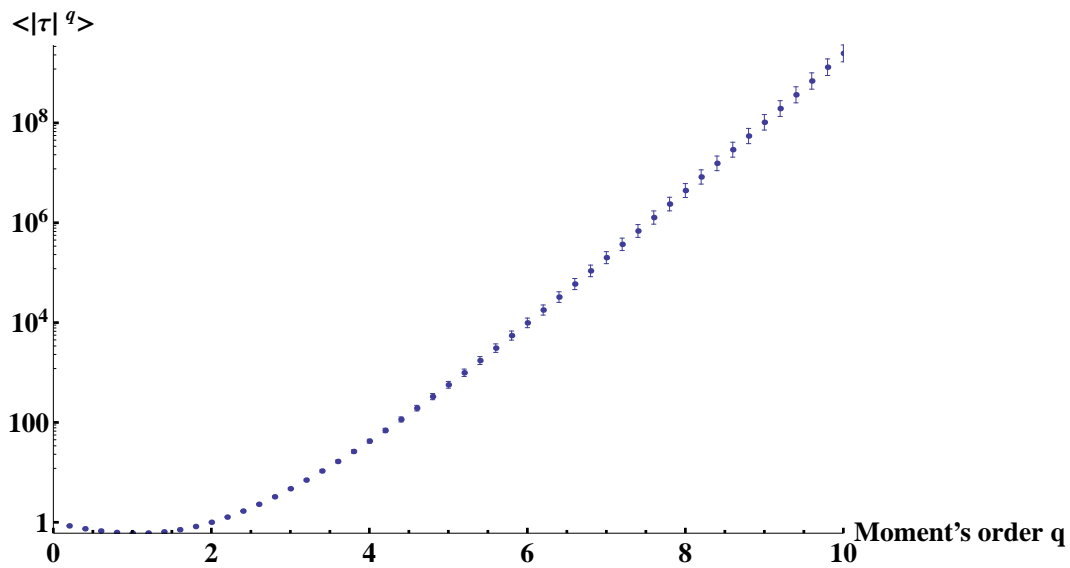
Ostatni rys. 4.20 przedstawia strukturę q -momentów wokół minimum w pobliżu punktu $q = 1$. Przy okazji zauważmy, że dla wszystkich spółek ma miejsce "zakotwiczenie" krzywych w jednym punkcie dla $q = 2$, czyli zachodzi równość $\langle |\tau|^{q=2} \rangle = 1$ - oczywiście, jest to bezpośrednią konsekwencją definicji τ :



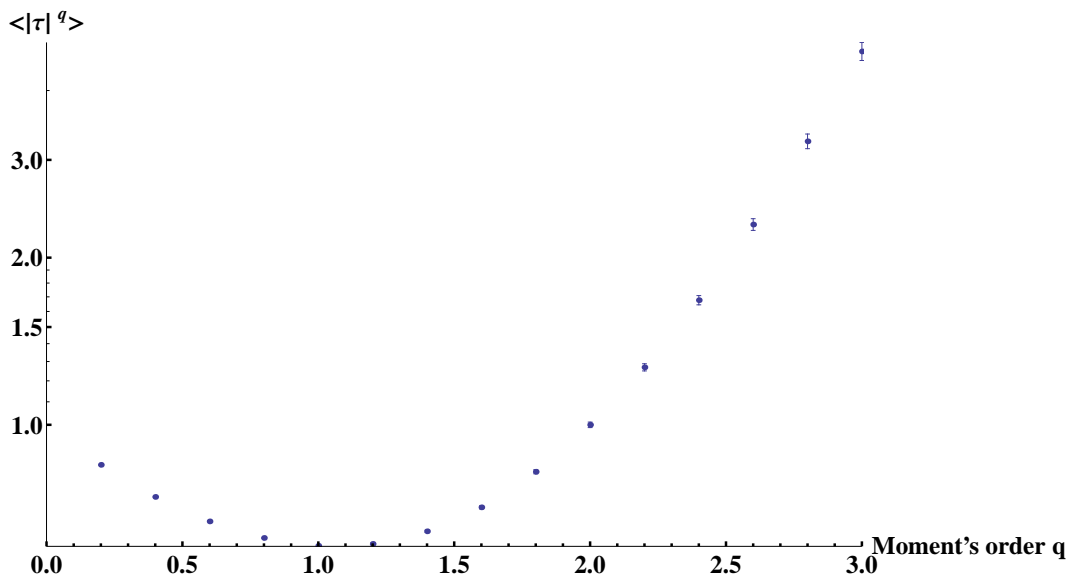
Rysunek 4.14: Wykres zależności q -momentów unormowanej zmiennej τ (równanie 4.6), $\langle |\tau|^q \rangle$, w funkcji rzędu q dla akcji KGHM. Wyraźnie widoczna jest zależność nieliniowa dla $0 \leq q < 4$.



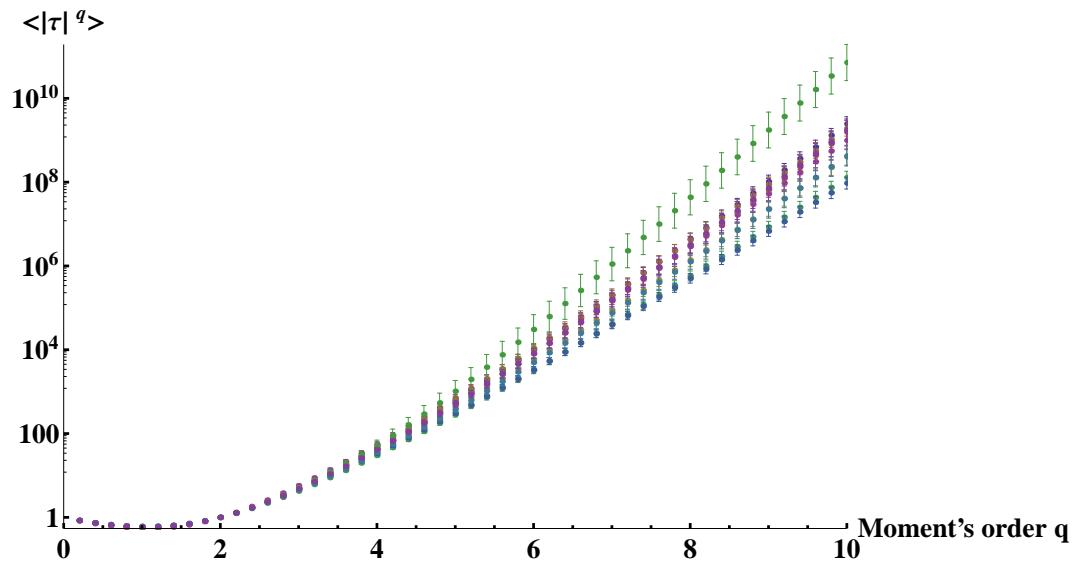
Rysunek 4.15: Wykres zależności q -momentów unormowanej zmiennej τ (równanie (4.7)), $\langle |\tau|^q \rangle$, w funkcji rzędu q dla akcji KGHM. Wyraźnie widoczna jest zależność nieliniowa dla $0 \leq q < 4$.



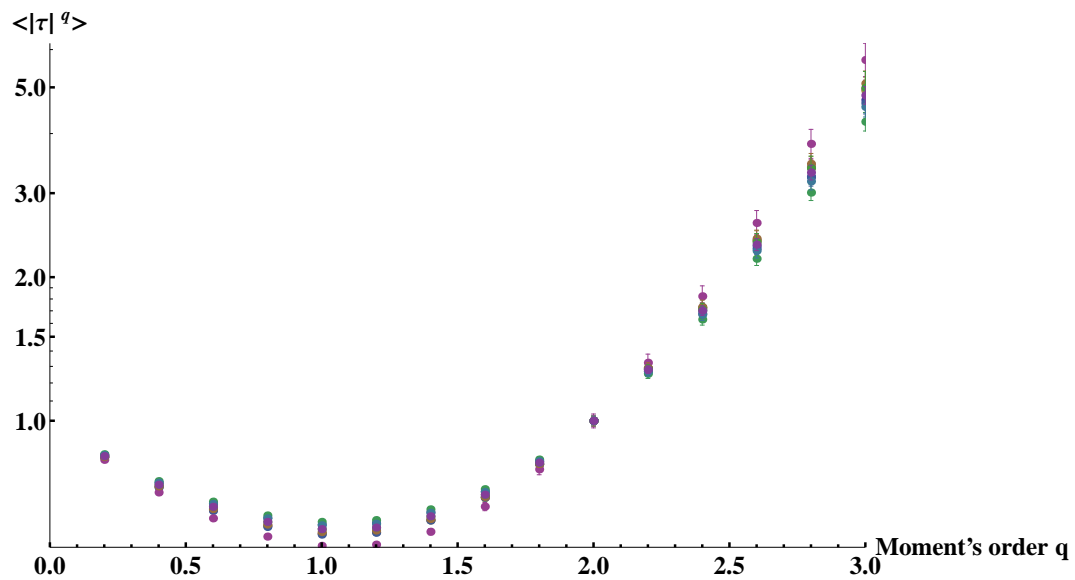
Rysunek 4.16: Wykres zależności q -momentów unormowanej zmiennej τ (równanie 4.8), $\langle |\tau|^q \rangle$, w funkcji rzędu q dla spółki KGHM. Wyraźnie widoczna jest zależność nieliniowa dla $0 \leq q < 4$.



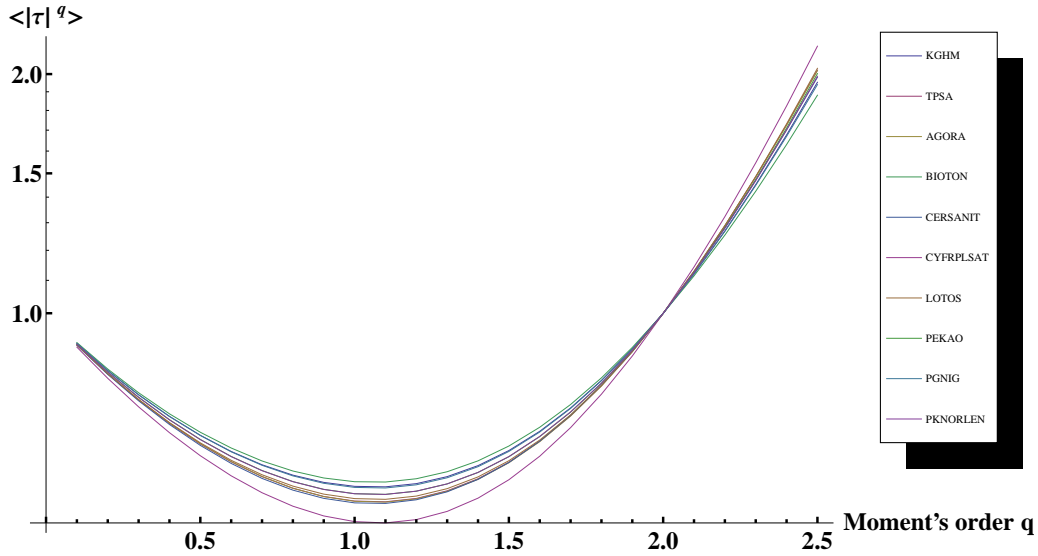
Rysunek 4.17: Wykres zależności q -momentów unormowanej zmiennej τ (równanie (4.8)), $\langle |\tau|^q \rangle$, w funkcji rzędu q dla spółki KGHM. Przedstawiono zależność dla małych wartości q .



Rysunek 4.18: Wykres zależności q -momentów, $\langle |\tau|^q \rangle$, od rzędu q momentu dla 10 spółek z WIG20. Dobrze widoczne są nieliniowe zależności od rzędu q .



Rysunek 4.19: Wykres zależności q -momentów, $\langle |\tau|^q \rangle$, od rzędu q dla 10 spółek w zakresie $0 \leq q \leq 3.0$.



Rysunek 4.20: Wykres zależności q -momentów, $\langle |\tau|^q \rangle$ w funkcji rzędu q dla 10 spółek z WIG20 w zakresie $0 \leq q \leq 2.5$.

$$\langle |\tau|^{q=2} \rangle = \left\langle \frac{(\Delta t - \mu)^2}{\sigma^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \right\rangle = 1. \quad (4.9)$$

Pojawiają się teraz przynajmniej dwa istotne pytania:

- czy dane empiryczne dotyczące różnych spółek mogą być opisane jednakową, uniwersalną zależnością funkcyjną od q a jeśli tak, to jaka jest ta zależność?
- Jaki model stochastyczny prowadzi do obserwowanej zależności danych empirycznych od q ?

Między innymi na te właśnie pytania odpowiadamy w kolejnych rozdziałach niniejszej części.

4.3 Porównanie danych empirycznych dotyczących q -momentów z przewidywaniami modelu

W rozdziale tym dokonuję porównania wyników teoretycznych zbudowanego w niniejszej pracy modelu MF-CTRW z danymi empirycznymi. Kon-

centrują się tutaj na badaniu funkcji q -momentów i towarzyszących im multifraktalnościom oraz tkwiących w nich singularnościom.

Jednym z technicznych powodów zastosowania przedstawionego tutaj podejścia do rynków finansowych jest powszechna dostępność oraz znacząca wielkość rekordów danych (umożliwiających budowanie zadowalających statystyk). W szczególności, rozważam dane empiryczne⁶ zawierające pojedyncze transakcje na:

- 1) kontraktach terminowych typu *futures* opartych na kilku indeksach giełdowych z różnych rynków,
- 2) na kursach wymiany walut, jak również
- 3) dane dotyczące obrotu akcjami.

Wybrane aktywa (patrz Tabela 4.1) należą do różnych grup cechując się znacznym zróżnicowaniem, co zapewnia wystarczającą ogólność i uniwersalność prowadzonych rozważań.

Tabela 4.1: Charakterystyka danych empirycznych. Dane obejmują każdą transakcję dla kontraktów terminowych opartych na niemieckim indeksie giełdowym (DAX), amerykańskim indeksie Dow Jones (DJI), polskim indeksie (WIG20), na kursie wymiany walut dolar-marka niemiecka (USDM) oraz dolar-euro (EURUS). W analizie uwzględniono również przykładowo dane dla obrotu akcjami firmy Telefonica (TEF).

Nazwa	Okres analizy	Liczba transakcji
DAX	2007/02/13–2007/06/14	4 997 027
TEF	2006/01/02–2007/08/27	3 010 511
DJI	2006/03/01–2007/08/27	3 806 980
WIG20	2006/06/19–2007/03/16	282 007
USDM	1993/01/04–1997/07/31	1 048 590
EURUS	2007/08/01–2007/08/27	4 176 362

Wykres na rys. 4.21 przedstawia empiryczne wartości logarytmu naturalnego unormowanych⁷ q -momentów aż do rzędu $q = 20$ ⁸. Na podstawie tego wykresu możemy od razu stwierdzić, że wszystkie rozpatrywane zbiory danych charakteryzują

⁶Dane empiryczne dotyczące aktywów wymienionych w Tabeli 4.1 (za wyjątkiem dotyczących WIG20) zostały zakupione przez *Universitat de Barcelona* na potrzeby naszej pracy [6].

⁷Rozważamy tutaj jeszcze inne unormowanie niż wprowadzone w rozdz. 4.

⁸Jest to zakres tak duży, iż dotychczas nie był brany pod uwagę w kontekście analizy multifraktalnej.

Tabela 4.2: Dopasowane parametry $\hat{\tau}_i$ dla przypadku monofraktałnego opisywanego równaniem (4.10) w zakresie $10 \leq q \leq 20$. Błąd oszacowania jest znikomo mały.

i -ty zbiór danych	$\ln \hat{\tau}_i$
DAX	4.598 ± 0.004
TEF	5.458 ± 0.004
DJI	6.144 ± 0.005
WIG20	7.008 ± 0.003
USDM	5.217 ± 0.003
EURUS	6.697 ± 0.002

się monofraktałnością dla wystarczająco dużych q . Aby to dokładniej sprawdzić, wprowadzamy pomocniczą wielkość $\hat{\tau}_i$ zdefiniowaną następująco:

$$\hat{\tau}_i^q \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\langle t_i^q \rangle}{\Gamma(1+q)}, \quad (4.10)$$

gdzie $\langle t_i^q \rangle$ oznacza empiryczny moment rzędu q czasów międzytransakcyjnych⁹ dla i -tego zestawu danych¹⁰ (w naszym przypadku $1 \leq i \leq 6$). Następnie, przeprowadzamy regresję liniową:

$$\ln \left(\frac{\langle t_i^q \rangle}{\Gamma(1+q)} \right) = q \ln \hat{\tau}_i,$$

w wyniku czego możemy stwierdzić, że dla $10 \leq q \leq 20$ oszacowanie wielkości $\hat{\tau}_i$ jest niezależne od q . Stanowi to potwierdzenie monofraktałnego charakteru q -momentów dla dużych q (patrz Tabela 4.2). Warto tutaj zauważyć, że błąd oszacowania jest na wszystkich rynkach znikomy i wynosi ok. 0.03%.

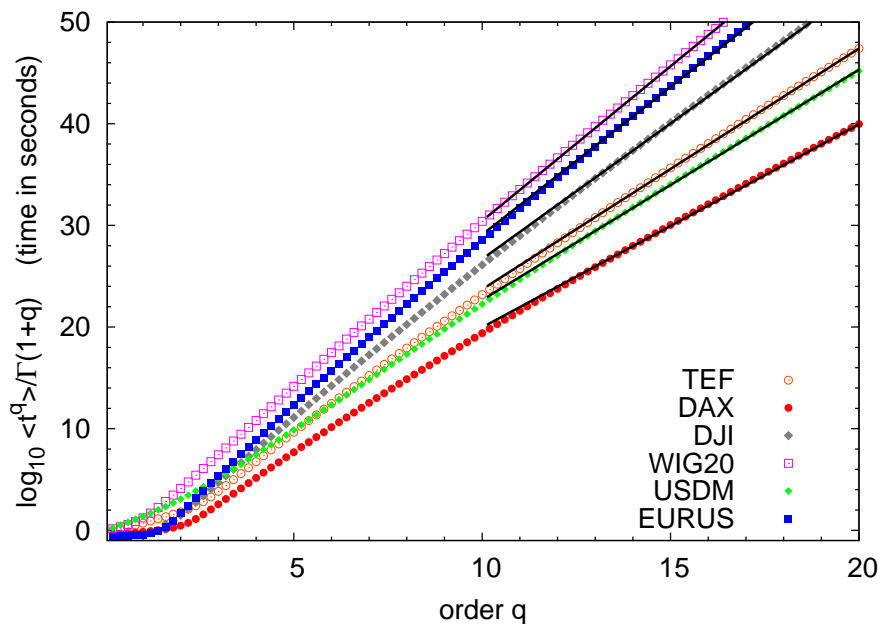
Możemy teraz sprawdzić obciążenie oszacowania $\hat{\tau}_i$ dla wszystkich sześciu szeregów czasowych. W tym celu obliczamy stosunek

$$\phi_i(q) \equiv \frac{\langle t_i^q \rangle}{\Gamma(1+q)} \left(\frac{\theta}{\hat{\tau}_i} \right)^q, \quad (4.11)$$

gdzie θ jest (dowolnym) dodatnim parametrem przyjmującym taką samą wartość dla wszystkich zbiorów danych, natomiast $\hat{\tau}_i$ oznacza wartość parametru otrzymanego, z powyżej przeprowadzonego, oszacowania monofraktałnego dla przedziału $10 \leq q \leq 20$ (patrz Tabela 4.2). Wybierzmy np. wartość parametru θ równą oszacowanej wartości $\hat{\tau}$ dla kontraktów terminowych na indeks Dow Jones, tzn. przyjmijmy

⁹Wróciliśmy do wygodniejszych tutaj oznaczeń czasów międzytransakcyjnych przez t a nie przez Δt .

¹⁰Przez i -ty zestaw danych empirycznych rozumiemy dane dotyczące określonego i -tego papieru wartościowego, np. kontraktu opartego na indeksie DAX.



Rysunek 4.21: Wykres unormowanych momentów $\langle t^q \rangle / \Gamma(1 + q)$ w funkcji rzędu q dla sześciu empirycznych finansowych szeregów czasowych w skali półlogarytmicznej. Linie ciągłe odpowiadają regresji funkcji postaci τ^q dla $10 \leq q \leq 20$. Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

$\theta = \hat{\tau}_{DJI} = \exp(6.144)$ (wartość podana w sekundach). Jeżeli spełniona jest hipoteza monofrakalna, to krzywe $\phi_i(q)$ powinny dla dużych q zbiegać do pojedynczej linii prostej (w skali półlogarytmicznej). Wyniki tego postępowania zostały przedstawione na wykresie na rys. 4.22 - rzeczywiście dla wszystkich danych, dla $q \geq 10$, krzywe zbiegają do pojedynczej linii prostej. Oczywiście przyjęcie innej, jednakowej dla wszystkich zestawów danych, wartości parametru θ prowadzi także do wspólnej linii prostej ale nachylonej pod innym kątem do osi odciętych.

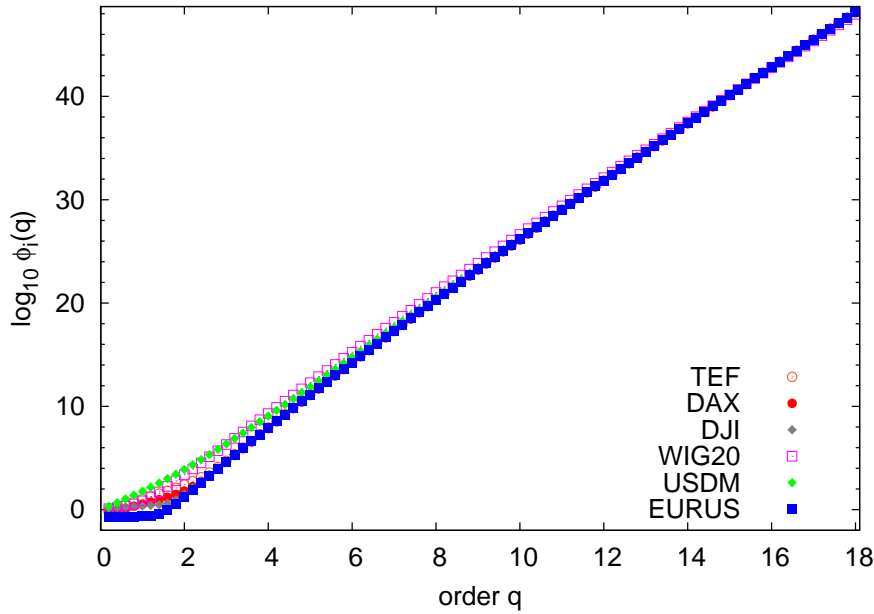
Ponadto, wykresy przedstawione na rys. 4.22 przejawiają odstępstwa od zachowania monofrakalnego dla $q < 10$. Odstępstwa od liniowości oraz różnice w przebiegu pomiędzy rozpatrywanymi krzywymi stają się wyraźne¹¹ dla $q < 5$.

Monofraktalność może zostać również sprawdzona w sposób inny od przedstawionego na rys. 4.22. Mianowicie można sporządzić wykres wielkości:

$$f_F(q) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{q \ln \tau_i} \ln \left(\frac{\langle t_i^q \rangle}{\Gamma(1 + q)} \right). \quad (4.12)$$

Dla danych monofrakalnych punkty na wykresie powinny być bliskie 1 niezależnie

¹¹Dokładniej mówiąc, dobrze widoczne są tylko trzy grupy krzywych: EURUS, TEF i USDM.



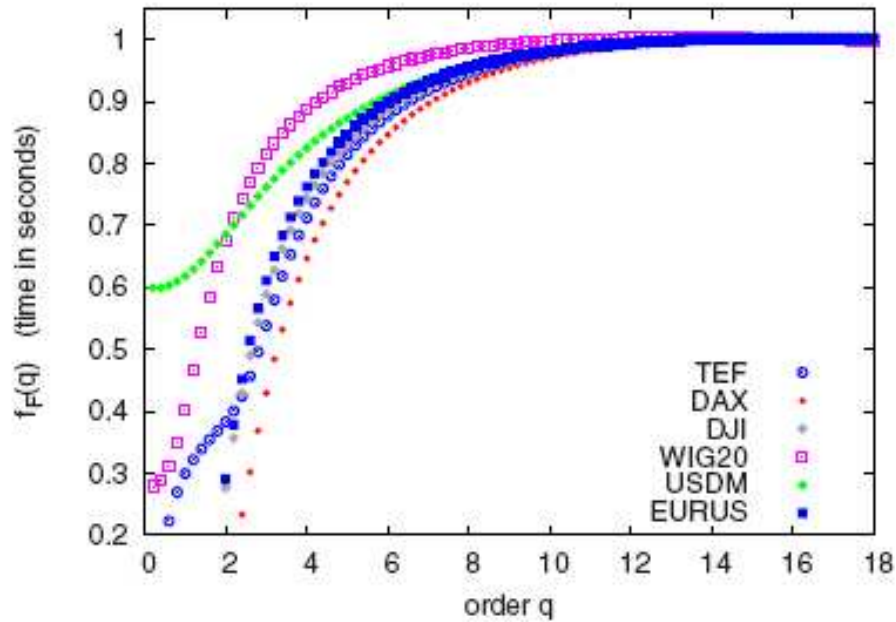
Rysunek 4.22: Wykres przedstawiający wielkości $\phi_i(q)$ zdefiniowane w równaniu (4.11) jako funkcje rzędu q dla sześciu empirycznych finansowych szeregów czasowych w skali półlogarytmicznej. Widoczne jest zbieganie się wszystkich krzywych do jednej wspólnej dla $q \geq 10$. Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

od wartości q jednak, jak to zostało pokazane na rys. 4.23, ma to miejsce jedynie dla $q \geq 10$. Warto również zauważyć, że punkty monotonicznie zbiegają do wartości 1 przy wzrastającym rzędzie momentów q . Daje to wskazówki (analogiczne do tych, jakie dostarcza przebieg krzywych na rys. 4.22) co do multifraktalnego charakteru modelu mogącego opisać zachowanie rozpatrywanych funkcji dla małych i pośrednich rzędów q . Opis zaproponowany w równaniu (3.19), gdzie użyty został rozciągnięty rozkład wykładniczy dla $\rho(\varepsilon)$ dany równością (3.18), wydaje się być dobrym kandydatem, co widać dzięki równaniu (3.21), którego przewidywania zostały porównane z danymi empirycznymi na rys. 3.2.

Własność multifraktalności modelu reprezentowaną dla małych i pośrednich q równaniem (4.14) można również sprawdzić za pomocą funkcji

$$f_{\text{MF}}(q) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{q} \ln \left(\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)} \right) - [\ln(\tau_0) + \mu\beta]. \quad (4.13)$$

W tym celu, do równania (4.13) możemy podstawić parametry uzyskane dla każdego rozważanego zbioru danych z osobna (patrz Tabela 4.3) a następnie przedstawić tak otrzymane funkcje $f_{\text{MF}}(q)$ w zależności od $bq^{1/(\alpha-1)}$. Zbieganie tych sześciu funkcji

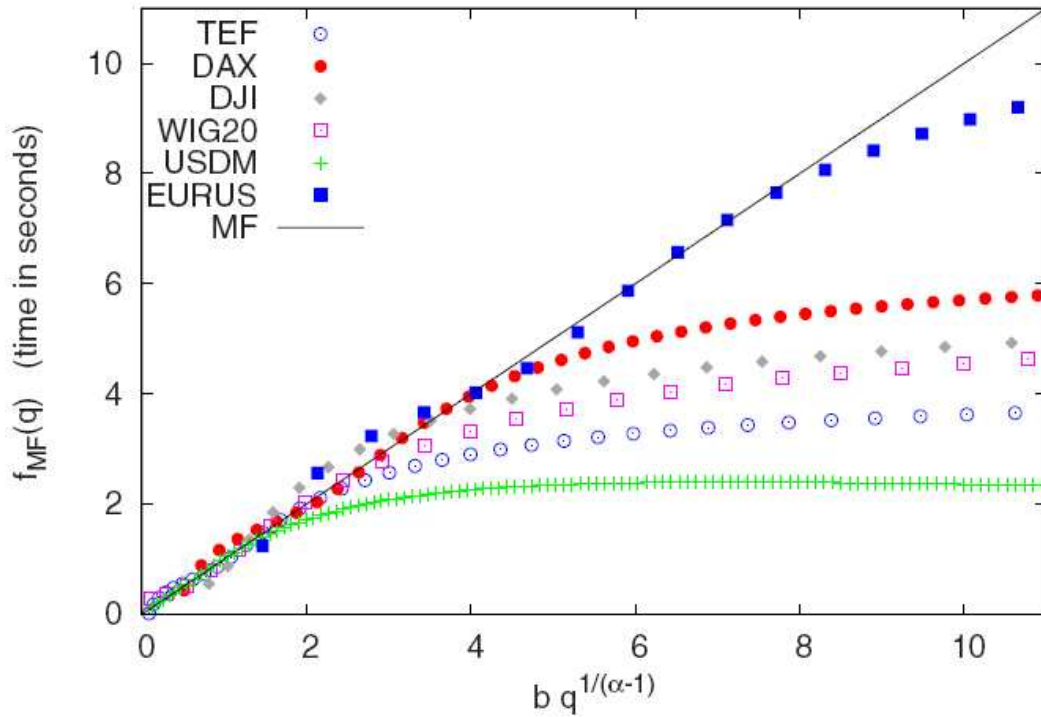


Rysunek 4.23: Wykres funkcji $f_F(q)$ zdefiniowanej w równaniu (4.12) w zależności od rzędu q dla sześciu empirycznych finansowych szeregów czasowych. Ponownie można zaobserwować zbliżanie się do siebie krzywych dla $q \geq 10$. Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

do wspólnej linii prostej o jednostkowym nachyleniu (bez wyrazu wolnego) prowadzi do wniosku, że nasz model multifraktałny MF-CTRW (z funkcją gęstości $\rho(\varepsilon)$ w postaci rozciągniętego rozkładu wykładniczego) jest dobrym kandydatem do właściwego opisu rozważanych efektów. Wyniki takiego postępowania przedstawiono na rys. 4.24. Zbieganie funkcji (dla małych i pośrednich wartości q) pokazuje użyteczność modelu MF-CTRW nie tylko do analiz rozpatrywanych w niniejszej pracy szeregów czasowych, ale stwarza uzasadnioną nadzieję na znacznie szersze zastosowania.

Rysunek 4.25 przedstawia przykładowe wyniki uzyskane dla wspomnianych wcześniej wszystkich danych empirycznych, przy czym przewidywania modelu przedstawiono przykładowo dla danych związanych z transakcjami dla spółki Telefonica oraz dla kontraktów na indeksie DAX. Natomiast Tabela 4.3 przedstawia wartości odpowiednich, obliczonych w tym modelu wielkości dla wszystkich zbiorów danych.

Możemy stwierdzić, że **empiryczne q -momenty czasów międzytransakcyjnych na rynkach finansowych cechują się wyraźną multifraktałnością dla zakresu $q \leq 3.5$. Właśnie w tym najistotniejszym zakresie q model anali-**



Rysunek 4.24: Wykres funkcji $f_{MF}(q)$ zdefiniowanej równaniem (4.13) jako funkcja przeskalowanego rzędu momentu $bq^{1/(\alpha-1)}$ dla sześciu empirycznych finansowych szeregów czasowych. Można tutaj zaobserwować zbieganie dla małych wartości q wszystkich krzywych do linii prostej o jednostkowym nachyleniu. Wykres zaczerpnięty z naszej publikacji [6].

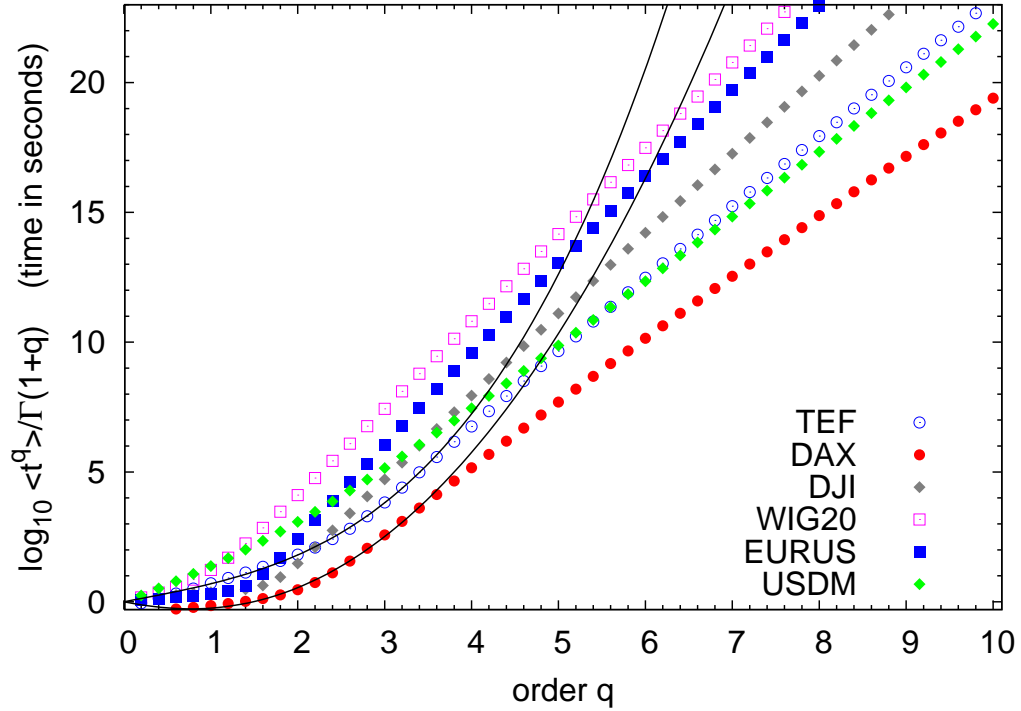
tyczny prowadzący do równania w postaci skalującej (3.27),

$$\langle t^q \rangle \simeq \Gamma(1+q) \tau_0^q l^q L^{|q|^{\alpha/(\alpha-1)}}, \quad (4.14)$$

(gdzie, przypomnijmy, $l = \exp(\mu\beta)$ oraz $L = \exp(b)$) **pozostaje w zgodzie z danymi empirycznymi** (patrz Tabela 4.3). Z drugiej strony, dla dużych wartości q dane zbiegają do zachowania monofrakalnego (zostało to przedstawione na rysunkach 4.22 i 4.23).

Jeżeli jednak chcemy opisać wszystkie zaobserwowane efekty za pomocą pojedynczej funkcji, powinniśmy dokonać uogólnienia zależności (4.14) w taki sposób, aby uwzględniało ono także monofrakalne zachowanie dla dużych wartości q . Wymagania stawiane takiej heurystycznej multifrakalnej zależności (ang. *Heuristic Multifractal Function*, HMF) są następujące:

- musi ona spełniać warunek normalizacji (tzn. powinna przyjąć wartość 1 dla $q = 0$),



Rysunek 4.25: Wykres przedstawiający zależność unormowanych q -momentów od rzędu q dla sześciu empirycznych finansowych szeregów czasowych. Przykładowe krzywe ciągłe odpowiadają teoretycznym, zgodnym z multifraktalną formułą (3.27), przebiegom funkcji dla kontraktów na indeks DAX oraz dla spółki Telefonica (TEF) - parametry otrzymane z dopasowania do danych empirycznych zamieszczono w Tabeli 4.3. Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

- dla małych i pośrednich wartości q powinna odtwarzać zależność daną równaniem (4.14),
- dla dużych wartości q powinna przybierać postać monofraktalną.

Stosunkowo łatwo można teraz zaproponować poszukiwaną HMF spełniającą powyższe trzy warunki:

$$\langle t^q \rangle = \Gamma(1 + q) \tau_0^q l^q L^{\varphi(q)}, \quad (4.15)$$

gdzie

$$\varphi(q) = \frac{1}{b_1} \left[1 - \exp\left(-b_1 |q|^{1/(\alpha-1)}\right) \right] |q|.$$

Zauważmy, że wprowadziliśmy tutaj dodatkowy czwarty parametr, $b_1 > 0$, który modyfikuje bazę $L = \exp(b)$ do postaci L^{1/b_1} (patrz równanie (4.14)). Zależność (4.15) nadal zachowuje właściwą normalizację (tzn. $\langle t^{q=0} \rangle = 1$). Co więcej, dla małych q

Tabela 4.3: Dopasowane wartości parametrów dla multifraktałnego obszaru małych q . Dla każdego szeregu czasowego określono osobny przedział fitowania obejmujący przedział od $q = 0$ do $q = 3.5$. Wartość wykładnika α charakteryzuje się stosunkowo mniejszym błędem w porównaniu do pozostałych parametrów.

	Przedział q	α	$\ln \tau_0 + \mu\beta$	b
DAX	0-3.5	1.85 ± 0.13	-1.5 ± 0.4	0.9 ± 0.3
TEF	0-3.5	1.47 ± 0.06	1.45 ± 0.12	0.14 ± 0.05
DJI	0-3.0	1.47 ± 0.08	0.34 ± 0.16	0.3 ± 0.2
WIG20	0-2.0	1.65 ± 0.06	1.67 ± 0.14	1.19 ± 0.14
USDM	0-3.0	1.89 ± 0.03	2.82 ± 0.02	0.32 ± 0.02
EURUS	0-2.5	2.1 ± 0.2	-4.6 ± 1.1	3.4 ± 1.1

Tabela 4.4: Zestaw wyznaczonych parametrów dla HMF określonej wyrażeniem (4.15).

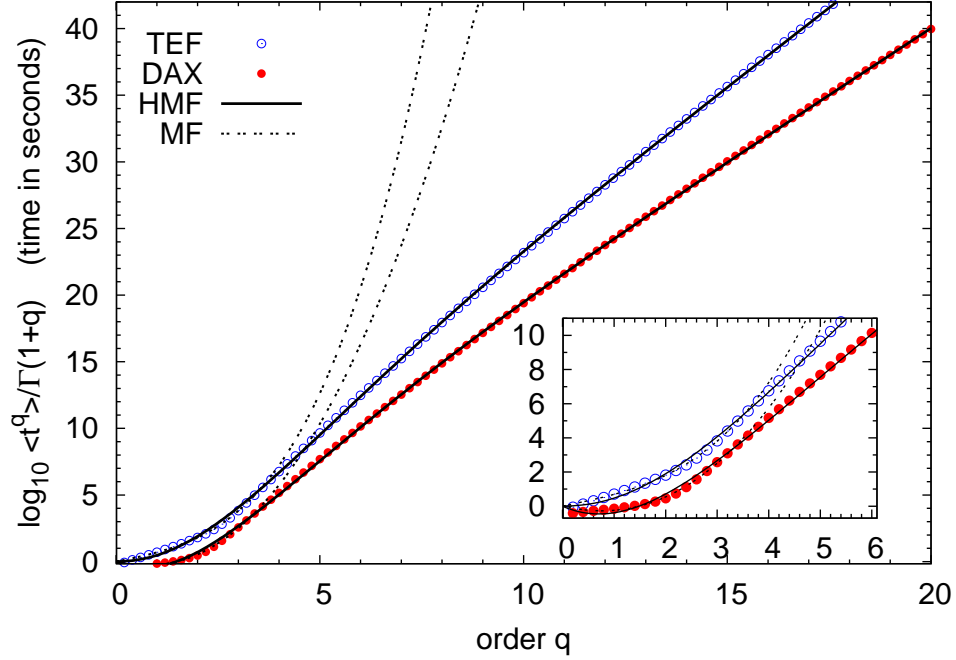
	α	$\ln \tau_0 + \mu\beta$	b	b_1
DAX	1.91 ± 0.03	-3.0 ± 0.3	2.5 ± 0.3	0.33 ± 0.02
TEF	1.78 ± 0.02	0.1 ± 0.2	1.07 ± 0.11	0.20 ± 0.01
DJI	1.60 ± 0.02	0.18 ± 0.12	0.29 ± 0.05	0.091 ± 0.012
WIG20	1.96 ± 0.05	0.5 ± 0.5	3.3 ± 0.6	0.50 ± 0.05
USDM	1.69 ± 0.02	2.97 ± 0.06	0.26 ± 0.03	0.115 ± 0.009
EURUS	2.21 ± 0.03	-9.5 ± 0.7	11.7 ± 1.1	0.71 ± 0.03

zachodzi $1 - \exp(-b_1|q|^{1/(\alpha-1)}) \approx b_1|q|^{1/(\alpha-1)}$, dzięki czemu możemy odtworzyć równanie (4.14). Natomiast dla dużych wartości q ma miejsce $1 - \exp(-b_1|q|^{1/(\alpha-1)}) \approx 1$ i zależność (4.15) przyjmuje postać monofraktałną:

$$\langle t^q \rangle \simeq \Gamma(1 + q)\tau_0^q l^q L^{|q|/b_1}.$$

Krzywe ciągłe na rys. 4.26 pokazują przykładowe dopasowanie zależności HMF do danych empirycznych dla akcji spółki Telefonica oraz kontraktów opartych na indeksie DAX dla pełnego zakresu wartości q . Również w przybliżeniu (także przedstawionym na tym wykresie) uzyskujemy dobrą zgodność z danymi empirycznymi. Dla $q < 2$ przewidywania formuł MF-CTRW oraz HMF są (praktycznie rzecz biorąc) nierozróżnialne. Wartości parametrów oszacowanych w modelu HMF przedstawiono w Tabeli 4.4.

Predykcje równania (4.15) dla rozpatrywanych zbiorów danych zostały spraw-



Rysunek 4.26: Wykres przedstawiający zależność logarytmu znormalizowanych momentów $\langle t^q \rangle / \Gamma(1 + q)$ od rzędu momentu q przykładowo dla akcji spółki Telefonica oraz kontraktów na indeks DAX. Krzywe ciągłe odpowiadają regresji danej równaniem (4.15) (heurystyczna formuła multifraktalna) z parametrami podanymi odpowiednio w Tabeli 4.4. Krzywa przerywana raz jeszcze przedstawia przewidywania modelu multifraktalnego, MF-CTRW, gdzie superstatystyka oparta została na rozciągniętym rozkładzie wykładniczym (3.27) i parametrach podanych w Tabeli 4.2. Przedstawiono również powiększenie dla małych i pośrednich wartości rzędu momentów q . Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

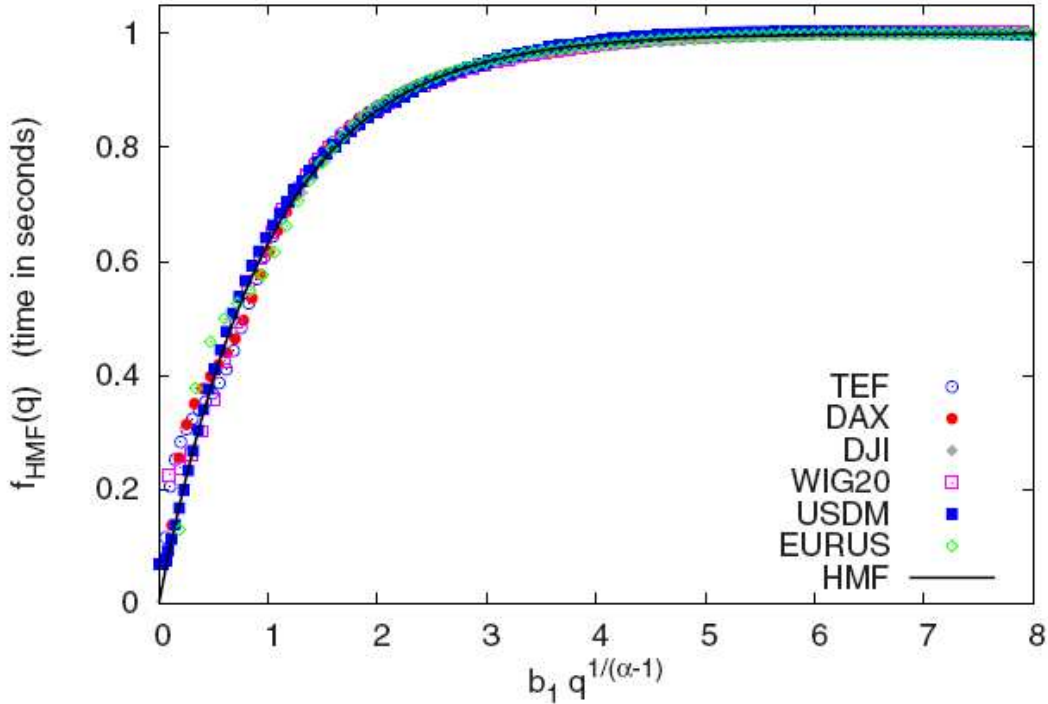
dzone poprzez zbadanie zależności funkcji

$$f_{\text{HMF}}(q) = \frac{b_1}{b} \left[\frac{1}{q} \ln \left(\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1 + q)} \right) - \ln \tau_0 - \mu\beta \right]. \quad (4.16)$$

od $b_1 q^{1/(\alpha-1)}$. Jeśli model HMF dobrze opisuje dane, to powinniśmy zaobserwować pokrywanie się wszystkich linii wzdłuż krzywej $1 - \exp(-x)$, gdzie $x = b_1 q^{1/(\alpha-1)}$ (patrz równania (4.15) i (4.16) oraz rys. 4.27).

Podójście to pozwala również na zbadanie w jawnej postaci zależności przekształconych q -momentów

$$b_1 \left[\frac{1}{q} \ln \left(\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1 + q)} \right) - \ln \tau_0 - \mu\beta \right]. \quad (4.17)$$



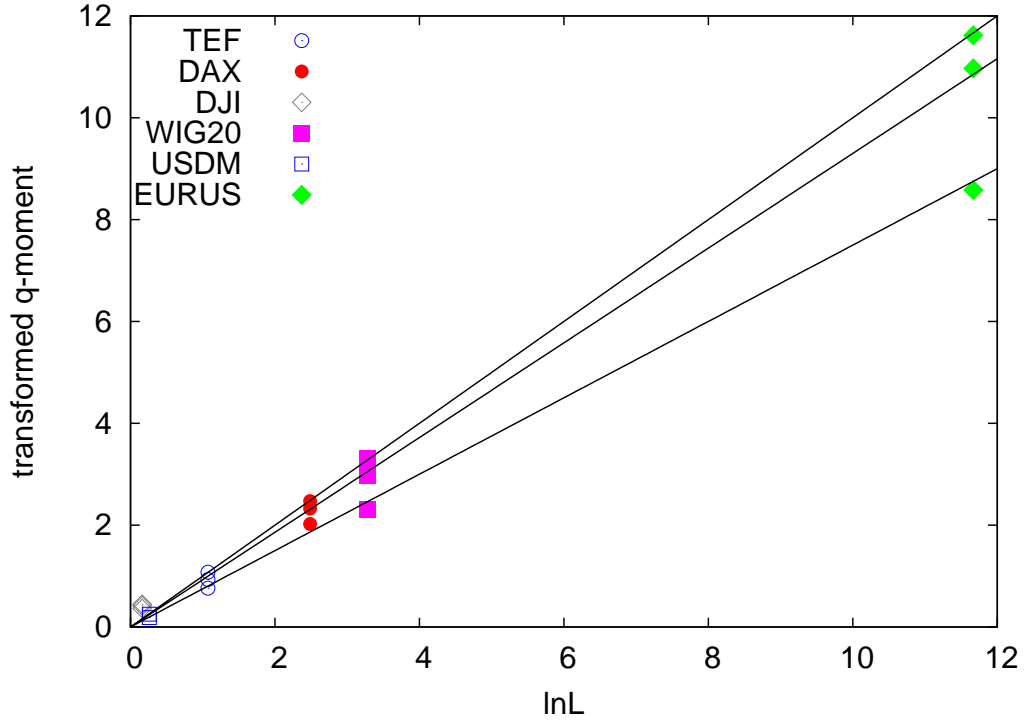
Rysunek 4.27: Wykres przedstawiający zależność $f_{\text{HMF}}(q)$ zdefiniowaną równaniem (4.16) od rzędu $b_1 q^{1/(\alpha-1)}$ dla sześciu empirycznych finansowych szeregów czasowych dla dopasowanych parametrów przedstawionych w Tabeli 4.4. Widoczne jest układanie się (z dobrym przybliżeniem) wszystkich zależności na krzywej postaci $1 - \exp(-x)$, gdzie $x = b_1 q^{1/(\alpha-1)}$. Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

od wielkości $\ln L (= b)$). Jeśli model dobrze odtwarza dane empiryczne, to powinna mieć miejsce wspólna dla wszystkich (badanych przez nas) rynków liniowa zależność pomiędzy tymi przekształconymi wartościami q -momentów a b (patrz rys. 4.28). Podkreślmy, że oba rysunki 4.27 i 4.28 pokazują zależności w pełni potwierdzające adekwatność i uniwersalność heurystycznej formuły multifraktalnej. Trzeba jednak zwrócić uwagę na fakt, że znalezienie jawnej, zamkniętej postaci warunkowej PTD, $\psi(t|\varepsilon)$, oraz funkcji rozkładu $\rho(\varepsilon)$ prowadzących do heurystycznej formuły multifraktalnej (4.15), stanowi nadal problem nierozwiązany.

Można teraz porównać prawdopodobieństwa przetrwania SP (ang. *sojourn probability*) otrzymane w ramach modelu MF-CTRW

$$\Psi(t) = \int_t^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi(t'|\varepsilon)\rho(\varepsilon)dt'd\varepsilon \quad (4.18)$$

z rozkładem empirycznym.

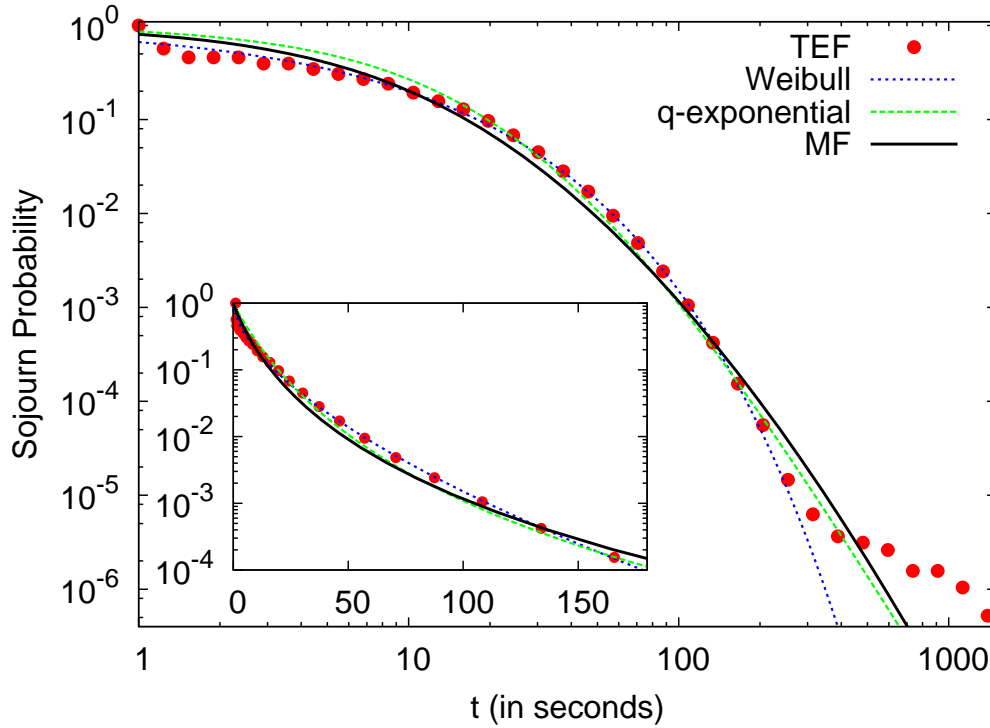


Rysunek 4.28: Wykres zależności przekształconych q -momentów wyrażonych równaniem (4.17) od wielkości $\ln L$ dla $q=2$ (dolna linia), $q=5$ i $q=15$ (linie powyżej) oraz dla sześciu empirycznych zbiorów danych z rynków finansowych. Krzywe ciągłe przedstawiają zależność liniową, wspólną dla różnych rynków. Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

Rozpatrujemy tutaj prawdopodobieństwo przetrwania ze względu na większą stabilność danych empirycznych w porównaniu z samą gęstością rozkładu prawdopodobieństwa. Przypomnijmy, że model MF-CTRW zakłada wykładniczy rozkład $\psi(t|\varepsilon)$ (patrz równanie (3.2)) oraz rozciągnięty rozkład wykładniczy $\rho(\varepsilon)$ (patrz równanie (3.18)). Podstawiając te wyrażenia do równania (4.18) otrzymujemy

$$\Psi_{\text{MF}}(t) = \frac{1}{2\Gamma(1 + 1/\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-|x|^\alpha - \frac{t}{\tau_0 e^{\mu\beta}} e^{-\beta\sigma x}\right) dx. \quad (4.19)$$

Powyższe wyrażenie może być obliczone na drodze numerycznej - jako przykład wybraliśmy spółkę Telefonica. Po dopasowaniu wyrażenia (4.19) do danych empirycznych wartości podanych w Tabeli 4.3 parametrów uległy stosunkowo nieznacznej (ok. 10-cio procentowej) zmianie. Linia ciągła na rys. 4.29 przedstawia wynikową krzywą dla tych obliczeń; tytułem porównania na wykresie przedstawiono także krzywą empiryczną (czerwone punkty).



Rysunek 4.29: Prawdopodobieństwo przetrwania $\Psi(t)$ przedstawione przykładowo dla danych dotyczących akcji spółki Telefonica (TEF). Krzywa ciągła jest wynikiem obliczeń numerycznych $\Psi(t)$ w ramach modelu MF-CTRW - patrz równanie (4.19) z parametrami $\alpha = 1.6$, $\ln(\tau_0) + \mu\beta = 1.7$ i $b = 0.12$. Przerywane i kropkowane linie przedstawiają dopasowania, odpowiednio, dla rozkładu q -wykładniczego (z parametrami $m = 0.94 \pm 0.07$ oraz $q = 1.3 \pm 0.2$) i dla rozkładu Weibulla (z parametrami $a = 1.53 \pm 0.02$ oraz $c = 0.459 \pm 0.004$). Wykres zaczerpnięto z naszej publikacji [6].

Analiza empiryczna funkcji PTD oraz prawdopodobieństwa przetrwania SP dla danych finansowych była w ostatnich latach tematem intensywnych badań [36, 37, 38, 39, 40]. Niedawne prace sugerują, że $\Psi(t)$ może być opisane także za pomocą funkcji q -eksponencjalnej¹² Tsallisa [39, 40]

$$\Psi_q(t) = \frac{1}{[1 + m(q-1)t]^{1/(q-1)}}, \quad q > 1$$

lub za pomocą rozkładu Weibulla [39, 40]

$$\Psi_W(t) = \exp(-at^c), \quad a, c > 0.$$

¹²Proszę nie mylić występującego tutaj indeksu q z rzędem momentu q używanym wcześniej.

Te zależności również zostały przedstawione na rys. 4.29 - jakość dopasowań jest tutaj porównywalna do krzywej (patrz wyrażenie (4.19)) uzyskanej w modelu MF-CTRW. Widać, że model ten dostarcza jedynie zgrubnego rozwiązania, przy czym należy zaznaczyć, że prawdopodobieństwo przetrwania jest jednak wielkością słabo czułą (podatną) na zmianę modelu.

4.4 Krótkie podsumowanie części II i pierwsze wnioski

W niniejszej części został rozszerzony (uogólniony) formalizm CTRW używający modelu dolinowego Montrolla-Weissa-Schera-Laxa. Ten uogólniony formalizm, nazwany przeze mnie **MF-CTRW**, umożliwił **analityczny opis statystyki czasów międzytransakcyjnych**. Dokładniej rzecz biorąc, **został on w tej części zastosowany do opisu finansowych szeregów czasowych, chociaż jak wykazałem podejście to może mieć szersze zastosowanie, np. w szeroko rozumianej komunikacji międzyludzkiej a w tym zwłaszcza w zagadnieniach typu kolejowania**.

Zaproponowane podejście MF-CTRW bazuje na wykorzystaniu superstatystyki (będącej konwolucją) do skonstruowania PTD. Z kolei konstrukcja superstatystyki wymaga wprowadzenia bieżącej zmiennej losowej ε o odpowiednim rozkładzie $\rho(\varepsilon)$ stanowiącym jej jądro całkowe - ta zmienna losowa posiada (w zależności od tego jakiego zagadnienia dotyczy) dobrą interpretację. Dopiero to realizuje pierwszy krok zmierzający w kierunku efektywnego wyznaczenia podstawowej funkcji modelu, czyli $\psi(t)$, oraz momentów $\langle t^q \rangle$ rzędu q dla przedziałów międzytransakcyjnych. Podkreślmy, że to właśnie postać rozkładu ρ jest odpowiedzialna np. za istnienie bądź nieistnienie wspomnianych momentów. Dodajmy, że dokładna interpretacja zmiennej losowej ε zależy od konkretnego analizowanego problemu.

W oryginalnej pracy Schera-Montrolla [32] zmienna ε oznaczała głębokość studni potencjału, w której pułapkowane były nośniki prądu. W podejściach typu procesów kolejowania ε oznacza priorytet przypisany danemu zadaniu, natomiast dla rozpatrywanych tutaj rynków finansowych możliwą interpretacją dla ε jest traktowanie jej jako wielkości proporcjonalnej do wolumenu danej transakcji, głębokości rynku bądź różnicy pomiędzy najlepszą ofertą kupna i sprzedaży (*bid-ask spread*) [41, 42, 43].

Niezależnie od interpretacji zmiennej ε , w podejściu tym przyjmuje się, jako drugi krok, określoną postać warunkowej funkcji PTD, $\psi(t|\varepsilon)$, zdefiniowanej dla zadanej wartości zmiennej ε . Jeżeli rozpatrywane przedziały międzytransakcyjne pojawiają się w sposób przypadkowy i są od siebie statystycznie niezależne, to naturalnym wyborem dla warunkowej PTD jest rozkład wykładniczy określony w równaniu (3.2).

Jednocześnie zakłada się tutaj, że dla określonego ε średni czas pomiędzy kolejnymi zdarzeniami, $\tau(\varepsilon)$, jest związany ze zmienną ε poprzez zależność wykładniczą określoną w (3.3). Wówczas możemy, wykorzystując Hipotezę o Mieszaniu Rozkładów w Finansach, wyznaczyć w postaci zamkniętej (dzięki zastosowaniu metody SPA) rozkład bezwarunkowy, czyli PTD (dane równaniem 3.1) oraz jego q -momenty (patrz równanie (4.14)).

Zatem, **podejście zaproponowane w niniejszej części pozwala, dzięki odpowiedniemu wyborowi jądra całkowego, uzyskać**

- 1) **funkcję PTD cechującą się grubymi ogonami tak ważną dla teorii kolejek, jak również**
- 2) **multifraktalny charakter jej q -momentów tak istotny dla rynków finansowych.**

Na przykład, dla $\rho(\varepsilon)$ w postaci gęstości rozkładu Laplace'a otrzymujemy:

$$\psi(t) \sim \frac{1}{t^\delta}, \quad (\delta > 1),$$

co pozwala opisać wiele obserwacji (empirycznych) dotyczących różnorodnych zjawisk zarówno w świecie kolejek [23] jak i szeroko rozumianych finansach [38].

Natomiast, w analizie q -momentów wybór funkcji gęstości dla zmiennej ε w postaci rozciągniętej funkcji wykładniczej prowadzi do multifraktalnej postaci q -momentów:

$$\langle t^q \rangle \sim L^{|q|^\eta}, \quad (\eta > 1),$$

gdzie L jest wielkością, której interpretację podałem w części III.

Pragnę podkreślić, że w części II analizowałem multifraktalne zachowanie czasów międzytransakcyjnych na dużych zbiorach danych empirycznych wziętych z rynków finansowych [44, 45, 46]. **Ogólny wniosek jaki stąd wypływa jest taki, że q -momenty cechują się multifraktalnością dla małych i pośrednich wartości q ($q \lesssim 5$), natomiast dla wyższych rzędów $\langle t^q \rangle$ stają się monofraktalne.** W związku z tym, zaproponowana została w tej części heurystyczna formuła multifraktalna HMF pozwalająca na odtworzenie przebiegu q -momentów w pełnym zakresie q .

Część III

Analogie przemian fazowych na rynkach finansowych

Strategicznym celem niniejszej części jest ostateczne wykazanie oraz wyciągnięcie konsekwencji z faktu, że obecna w danych finansowych multifraktalność oraz zawarta w niej singularność są wywołane fluktuacjami wolumenu. Oczywiście sugerowane to już było w części II - w niniejszej części przedstawiłem i przedyskutowałem dalsze argumenty wzmacniające wspomniane sugestie. Zatem niniejsza, III część pracy stanowi bezpośrednią, pogłębioną konsekwencję wyników uzyskanych w części II; omawiam w niej:

- dalsze własności statystyczne anomalnej, multifraktalnej, losowej struktury czasów międzytransakcyjnych oraz wynikające stąd
- jej własności "termodynamiczne", przy użyciu rozszerzonego w poprzedniej części (standardowego) formalizmu CTRW Montrolla-Weissa-Schera-Laxa; przypomnijmy, ten rozszerzony formalizm został przez nas nazwany w części II multifraktalnym formalizmem CTRW (MF-CTRW).

Podejście nasze ma na tyle ogólny charakter, że jak wskazaliśmy w części II, może być zastosowane np. do zdarzeń generowanych przez ludzką aktywność cechującą się określonym uporządkowaniem podejmowanych działań.

W pracy tej koncentrujemy się jednak przede wszystkim na zastosowaniu naszego podejścia do rynków finansowych, na których aktywność różnorodnych (heterogenicznych) uczestników gry rynkowej (inwestorów) może przejawiać się w bardzo różnych skalach czasowych. **Głównym wnioskiem płynącym z rozważań przeprowadzonych w niniejszej części jest to, że suma statystyczna (funkcja rozdziału) $Z(q)$ jest rozbieżna dla ujemnych wartości wykładników potęgi q (co uzasadnia nazwę "anomalna"), natomiast dla dodatnich wartości tych wykładników $Z(q)$ skaluje się jak $L^{-\tau(q)}$, gdzie wykładnik potęgi $\tau(q)$ jest singularną funkcją q ¹³.**

Punktem wyjścia części III jest analizowana w części II funkcja PTD przyjmująca postać konwolucji (czyli superstatystyki używanej np. do opisu rozwiniętej turbulencji). Jądro tej konwolucji jest dane przez rozciągnięty rozkład wykładniczy (często używany w układach chaotycznych i nieuporządkowanych) będący uogólnieniem zarówno rozkładu wykładniczego (zastosowanego w oryginalnej wersji modelu CTRW do opisu relaksacji fotoprądów w materiałach amorficznych i szklistych) jak też rozkładu Gaussa (używanego np. do opisu dyfuzji wodoru w materiałach amorficznych).

Najważniejszym wynikiem tej części pracy jest uzyskanie przemian fazowych wyższych rzędów (trzeciego i wyższych) - mogą być one interpretowane

¹³Nie należy mylić wykładnika τ ze średnim czasem występującym w definicji (3.2). W niniejszej części czas ten oznaczany jest przez γ (patrz wyrażenie (5.4) oraz (5.5)) i nie ma nic wspólnego z analogicznym oznaczeniem wprowadzonym przez wyrażenie (2.53) w rozdz. 2.2.1 w części I.

jako przejścia pomiędzy fazami o wysokiej i niskiej aktywności inwestorów. Rząd przejścia fazowego zależy tutaj bezpośrednio od wykładnika α definiującego rozciągnięty rozkład wykładniczy (im ten wykładnik jest większy tym rząd przemiany jest wyższy). Na tej podstawie **sformułowano proste, praktyczne wskazówki dla inwestorów, związane z zaproponowaną w pracy globalną miarą ryzyka rynkowego.**

Rozdział 5

Analiza momentów

5.1 Wprowadzenie

Od kilku dekad analiza szeregów czasowych cieszy się wciąż rosnącym zainteresowaniem społeczności naukowej [6], [47]-[51]. Dzięki rozwojowi metod półanalitycznych - włączając w to różnorodne metody detrendowania opracowane przez fizyków [52]-[57] - jak również dzięki ciągłemu doskonaleniu metod numerycznych, teoria szeregów czasowych znajduje zastosowanie w stale rosnącej liczbie ważnych i interesujących zagadnień. W szczególności dynamika wielu układów złożonych analizowanych w ramach nauk przyrodniczych, ekonomicznych i socjologicznych jest przedstawiana w postaci stochastycznych szeregów czasowych [58, 59]. Często stanowią one realizację multifraktalnych procesów stochastycznych [60] generowanych np. przez zaszumione wieloskalowe kaskady multiplikatywne [61] obserwowane np. na rynkach spekulacyjnych [62]. Zmiany indeksów, cen akcji czy kursów wymiany walut wykazują zachowanie intermitentne (czyli z przerwaniem) [63], ujawniają hierarchiczne i samopodobne struktury oraz cechują się dużymi niegaussowskimi odchyleniami związanymi z występowaniem rzadkich zdarzeń i grubych ogonów rozkładów. Od pewnego czasu jest jasne [64], że zachowanie się rynków finansowych można modelować poprzez stochastyczne szeregi czasowe - wówczas zmiennymi losowymi są nie tylko takie wielkości jak ceny (lub ich zmiany), ale również charakterystyki czasowe (czasy międzytransakcyjne czy czasy pierwszego kontaktu, ang. *the first passage time*). Tego typu modelowanie jest szeroko stosowane w ramach formalizmu CTRW - jest to obiecujące narzędzie służące np. fenomenologicznemu opisowi dynamiki danych finansowych obserwowanych na najniższym możliwym poziomie agregacji - tzn. transakcja po transakcji.

W ciągu ostatnich dwóch dekad daje się zaobserwować gwałtowny wzrost zainteresowania zastosowaniem podejść, metod i technik fizyki statystycznej, fizyki materii skondensowanej oraz teorii pola do analizy zagadnień dotyczących rynków

finansowych i innych układów złożonych: od badań kardiologicznych dotyczących rytmu serca czy epilepsji do modelowania pogody, zagadnień ekologicznych a nawet polityki (związanej np. z procesem wyborów) [65]. Model wykorzystany w tej pracy ma swoje umocowanie (przypomnijmy)

- w Hipotezie o Mieszaniu Rozkładów w Finansach, a w tym w prognozowaniu, sięgającej lat 70-ych ubiegłego wieku [66, 67], czyli w rozkładach konstruowanych za pomocą superstatystyk (konwolucji),
- zasadzie wariacyjnej dla dyssypacji energii poprzez różne skale czasowe i przestrzenne w teorii rozwiniętej turbulencji z lat 90-ych [68, 69],
- w entropii nieekstensywnej Tsallisa [28].

Kanoniczny formalizm CTRW został wprowadzony (przypomnijmy) przez Montrolla i Weissa w roku 1965 [29] w celu uwzględnienia w błędzeniu losowym przypadkowych zmian w czasie pomiędzy kolejnymi przemieszczeniami. Od czasu jego pierwszego zastosowania przez Schera i Laxa w 1973 roku [17], [29], [30], [70], [71], [72], [73], [74], (i zamieszczone tam odnośniki) oraz niezależnie przez Moora rok później [75] do opisu potęgowej relaksacji fotoprądu w materiałach amorficznych i szklistych, model ten znalazł liczne zastosowania znacznie przekraczające pierwotne zamierzenia jego autorów. W końcu poprzedniego oraz w bieżącym stuleciu został on zastosowany do rynków finansowych ([6], [37], [38]) do opisu ich dynamiki (w sensie stochastycznym, patrz również [15], [76], [77]).

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa dla czasów między kolejnymi zdarzeniami, PTD, jest w modelu CTRW (jak wiadomo) kluczowa. W wyjściowym modelu była ona zdefiniowana w ramach modelu dolinowego, w którym "krajobraz" potencjału składa się tylko z dolin (nie ma tam gór). Dynamiczną część PTD stanowi funkcja warunkowa $\psi(t | \varepsilon)$ opisująca (przypomnijmy) gęstość rozkładu prawdopodobieństwa czasu przebywania przez nośnik w studni potencjału o określonej głębokości ε - właśnie względem tej zmiennej losowej następuje warunkowanie rozkładu. Funkcja ta posiada łatwą interpretację w kontekście rynków finansowych poprzez odpowiednią interpretację zmiennych losowych t oraz ε (patrz część II). Tytułem przykładu zauważmy, że jeżeli rozkład ten opisuje filtrację sygnałów stochastycznych - wówczas ε może oznaczać parametr definiujący dany filtr. Kolejnym przykładem może być (jak wiemy) zarządzanie kolejką zadań np. w systemie komputerowym lub sieci komputerowej - tutaj parametr ε może oznaczać flagę pomagającą w synchronizacji zachodzących procesów, natomiast t to czas pracy CPU. W naszej pracy [6] podajemy szerszą listę możliwych zastosowań tego modelu.

W pracy tej zbadałem własności statystyczne czasów międzytransakcyjnych ponieważ zawierają one istotne informacje dotyczące komunikacji międzyludzkiej (w

szczególności aktywności rynków finansowych), np. mogą nawet dostarczać informacji o "temperaturze" emocji towarzyszącej kontaktom międzyludzkim. Pomimo tego, są one znacznie mniej zbadane od własności statystycznych zmiennych "przestrzennych" (np. zmiany cen). Między innymi dlatego właśnie rozszerzyliśmy formalizm CTRW umożliwiając opis multifraktalnej struktury czasów międzytransakcyjnych. Na tej podstawie jesteśmy w stanie wykonać kolejny krok - wykorzystając formalizm termodynamiczny (poprzez transformację Legendre'a) i przeprowadzić dyskusję dotyczącą możliwych przejść fazowych wyższych rzędów - zjawisk niezwykle rzadko obserwowanych w przyrodzie [78].

5.1.1 Lista głównych zagadnień

W części II, w rozdz. 3.3.1 niniejszej pracy wyprowadzone zostały wzory ścisłe (3.21) i przybliżony (3.27) na średnie dowolnego rzędu q (tzn. q -momenty) czasów międzytransakcyjnych $\langle t^q \rangle$ w ramach MF-CTRW (wyprowadzenia te zaczerpnięto z naszej publikacji [6]). W rozdz. 3.3.1 pokazano, że $\ln\langle t^q \rangle$ jest nieanalityczną, singularną funkcją q . Zostało to sprawdzone za pomocą danych empirycznych dotyczących obrotu pochodnymi instrumentami finansowymi obejmującymi szeroki zakres skal czasowych - od sekund do wielu miesięcy. Jak pokazuję w niniejszej części, właśnie **odkrycie tego nieanalitycznego zachowania stworzyło podstawę, na której możliwe było zaobserwowanie przemian fazowych rzędów wyższych niż drugi - jest to ostateczny cel do jakiego dążę w niniejszej części.**

Poniżej, w rozdz. 5.2 dowodzę tytułem uzupełnienia, że momenty czasów międzytransakcyjnych spełniają relację skalowania (5.25) z dobrze określoną, interpretowalną bazą. **Pokazuję, że funkcja podziału również przybiera postać skalującą.** Wybiegając wprzód powiem, że postać ta wynika z odpowiedniości pomiędzy całką $I(q)$ (zdefiniowaną w (5.10)) budującą q -momenty a całką $J(q')$ (z równania (6.10)) tworzącą poszukiwaną sumę statystyczną, mianowicie

$$J(q+1) = \sigma \frac{\exp(-q\beta\mu)}{(q+1)^{1/\alpha}} I\left(-\frac{q}{(q+1)^{1/\alpha}}\right), \quad (5.1)$$

gdzie $q' = q + 1 > 0$ lub inaczej $q > -1$. Tzn. jeśli $I(q)$ można zapisać w postaci skalującej, to również $J(q')$ posiada odpowiednią postać skalującą i *vice versa*. Zatem **istnieje relacja pomiędzy q -momentami a funkcją rozdziału - m.in. dlatego właśnie tyle miejsca poświęcamy tym pierwszym.**

W niniejszym rozdziale rozwijamy dalej wyniki uzyskane w części II, a mianowicie:

- w ramach modelu MF-CTRW oraz używając heurystycznej formuły multifraktalnej HMF rozważane są q -momenty czasów międzytransakcyjnych $\langle t^q \rangle$ dla

nieco szerszego niż w części II zakresu $-1 < q \leq 20$, a więc również dla ujemnych wartości q , co jest potrzebne do analizy przemian fazowych w punkcie $q = 0$,

- rozważana jest uogólniona funkcja podziału [81, 82], $Z(q')$, wyrażona za pomocą $q' (= q + 1)$ -momentu PTD, co stanowi motyw przewodni niniejszej części.

Analiza funkcji $Z(q')$ prowadzi do

- związku pomiędzy MF-CTRW a termodynamiką wyrażonego poprzez
 - i) spektrum singularności, które stanowi multifrakalny odpowiednik zależności entropii od energii w termodynamice
 - ii) przemiany fazowe 3-go i wyższych rzędów, które mogą być interpretowane jako przejścia pomiędzy fazą handlu z wysoką oraz z niską częstotliwością.

Niniejsza, III część pracy składa się z dwóch nieformalnych części. W rozdz. 5.2 (część pierwsza) rozważana jest dokładniej niż w części II relacja skalowania dla q -momentów $\langle t^q \rangle$ w ramach formalizmu MF-CTRW, jak również w ramach ogólniejszej formuły heurystycznej. Przeprowadzono tam także bardziej szczegółowe porównanie przewidywań teoretycznych z danymi empirycznymi. Kolejny rozdz. 6.1 opisuje skalowanie funkcji podziału $Z(q')$ zdefiniowanej w ramach modelu MF-CTRW oraz obejmuje opis uzyskanego na tej podstawie formalizmu termodynamicznego. Rozdział 6.2 zawiera dyskusję przemian fazowych 3-go i wyższych rzędów. Ostatnie dwa rozdziały (spośród wyżej wymienionych) stanowią drugą, nieformalną część niniejszej III części. W rozdz. IV przedstawiono podsumowanie wraz z praktycznymi sugestiami dla inwestorów giełdowych. Natomiast w Dodatku zamieszczono wybrane, najważniejsze szczegółowe obliczenia. Na końcu zamieszczono bibliografię.

5.2 q -momenty czasów międzytransakcyjnych: multifraktalność generowana przez fluktuacje

Głównym zadaniem tego rozdziału jest obliczenie w ramach formalizmu MF-CTRW momentów czasów międzytransakcyjnych, $\langle t^q \rangle$, dla dowolnego rzędu $q > -1$. Jest to rachunek pogłębiony w stosunku do przedstawionego w rozdz. 3.3, gdyż umożliwia fizyczną interpretację oraz bezpośredni pomiar wszystkich tworzących te momenty wielkości. Dla porównania przedstawiono tutaj (analogicznie jak w rozdz. 4.3) pogłębione rozważania dotyczące heurystycznej formuły multifraktalnej HMF oraz jej predykcje. Rozdział ten - wraz z

6.1 - jest niezbędny do wprowadzenia formalizmu termodynamicznego (patrz rozdz. 6.2).

5.2.1 Superstatystyki i q-momenty

Obliczenia ścisłe

Przypomnijmy, że q-momenty definiujemy w standardowy sposób (dla dowolnego rzędu q) jako,

$$\langle t^q \rangle = \int_0^\infty t^q \psi(t) dt = \int_{-\infty}^\infty \langle t^q | \varepsilon \rangle \rho(\varepsilon) d\varepsilon = \langle \langle t^q | \varepsilon \rangle \rangle, \quad (5.2)$$

gdzie funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa dla czasów międzytransakcyjnych, $\psi(t)$, dana jest poprzez następującą superstatystykę [79, 80],

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^\infty \psi(t | \varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (5.3)$$

Warunkowa funkcja PTD jest zdefiniowana w postaci rozkładu wykładniczego (Poissona)

$$\psi(t | \varepsilon) = \frac{1}{\gamma(\varepsilon)} \exp\left(-\frac{t}{\gamma(\varepsilon)}\right). \quad (5.4)$$

Oznacza to, że warunkowe czasy międzytransakcyjne są od siebie statystycznie niezależne, co można przyjąć jako rozsądną hipotezę zerową (ang. *null hypothesis*). Zdarzenie warunkujące ε oznacza, że ostatnia transakcja została zrealizowana z wolumenem ε . Zmienna poissonowska t oznacza czas pomiędzy kolejnymi transakcjami, podczas gdy przeciętny czas międzytransakcyjny dla wolumenu ε (tzn. $\gamma(\varepsilon)$ ¹) jest warunkową średnią arytmetyczną dla tych czasów. Tę zależność również zakładamy w postaci wykładniczej²

$$\gamma(\varepsilon) = \gamma_0 \exp(\beta \varepsilon). \quad (5.5)$$

Dane empiryczne wskazują, że β jest (co najwyżej) wolnozmienną funkcją ε . Jednakże występujące przy jej pomiarze błędy statystyczne są zbyt duże aby wyciągać na tej podstawie znaczące wnioski. Na szczęście, (jak się wydaje) superstatystyka (5.3) słabo zależy od konkretnej postaci $\gamma(\varepsilon)$. Należy zaznaczyć, że zmienna ε

¹Zauważmy, że oznaczenie $\gamma(\varepsilon)$ odpowiada wcześniejszemu oznaczeniu $\tau(\varepsilon)$ (patrz rozdział II) i nie ma nic wspólnego z oznaczeniem w rozdziale I.

²Wprowadzona tutaj wielkość γ_0 nie ma nic wspólnego z analogicznie oznaczoną, użytą w wyrażeniu (2.52).

przyjmuje wartości dodatnie dla transakcji o charakterze kupna (tzn. gdy transakcja następuje bezpośrednio po wprowadzeniu zlecenia kupna), natomiast ujemne dla transakcji o charakterze sprzedaży (bezpośrednio po wprowadzeniu zlecenia sprzedaży). Możliwość przyjmowania przez zmienną losową ε zarówno wartości dodatnich jak i ujemnych stanowi rozszerzenie modelu dolinowego. Dodajmy, że najbardziej stabilnymi wielkościami w tym modelu wydają się być (bezwarunkowe) q -momenty (5.2).

Z równania (5.4) otrzymujemy (jak należało oczekiwać) wyrażenie na warunkową funkcję momentów:

$$\langle t^q | \varepsilon \rangle = \int_0^\infty t^q \psi(t | \varepsilon) dt = \Gamma(1 + q) \gamma^q(\varepsilon) \quad (5.6)$$

w postaci identycznej do (3.12) otrzymanej w rozdz. 3.3 w części II. Zaznaczmy, że występujący tutaj czynnik $\Gamma(1 + q)$ ogranicza nasze podejście do zakresu $q > -1$, co jednak jest wystarczające do analizy przemiany fazowej w punkcie $q = 0$ (taką właśnie przemianę analizuję poniżej w rozdziałach 6.1 i 6.2). Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że pomiar wielkości warunkowych (5.4) oraz (5.6) jest równie trudny, jak średniego czasu (5.5).

Kolejnym, niezwykle istotnym krokiem w analizie jest właściwy wybór funkcji wagowej $\rho(\varepsilon)$ - tutaj w postaci rozciągniętego rozkładu wykładniczego, często używanego w analizie układów nieuporządkowanych (mówiliśmy już o tym w części II)³:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{2^{1+1/\alpha} \sigma \Gamma(1 + 1/\alpha)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{|\varepsilon - \mu|}{\sigma}\right)^\alpha\right), \quad (5.7)$$

co pozwala na uzyskanie wyników obliczeń (choć przybliżonych) w zamkniętej postaci. **Rozkład ten jest jedną z najbardziej istotnych wielkości statystycznych rozważanych w niniejszej pracy, ponieważ występujący w tym rozkładzie parametr α decyduje o zasadniczych własnościach całego układu.**

Podstawiając wyrażenia (5.7), (5.4) i (5.5) do (5.3) otrzymujemy funkcję PTD w jawnej, całkowej postaci

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2^{1+1/\alpha} \sigma \Gamma(1 + 1/\alpha) \gamma_0} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{|\varepsilon - \mu|}{\sigma}\right)^\alpha\right) \exp(-\beta \varepsilon) \exp\left(-\frac{t}{\gamma_0} \exp(-\beta \varepsilon)\right) d\varepsilon, \end{aligned} \quad (5.8)$$

³Wygodniej teraz będzie się posługiwać jądrem całkowym $\rho(\varepsilon)$, w którym σ stojące we wzorze (3.18) w rozdz. 3.3.1 zostało przeskalowane za pomocą czynnika $2^{1/\alpha}$.

Poprzez połączenie wyrażenia (5.8) i pierwszej równości w (5.2) (lub podstawiając drugą równość w (5.6) i wyrażenia (5.5) oraz (5.7) do drugiej równości w (5.2)) otrzymujemy wzór na bezwarunkowy q -moment $\langle t^q \rangle$ (dla $q > -1$) w postaci pośredniej, przygotowanej do dalszej analizy

$$\langle t^q \rangle = \frac{\gamma_0^q \Gamma(1+q)}{2^{1+1/\alpha} \sigma \Gamma(1+1/\alpha)} I(q), \quad (5.9)$$

gdzie całkę będącą funkcją rzędu momentu q

$$I(q) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{|\varepsilon - \mu|}{\sigma}\right)^\alpha + q\beta\varepsilon\right) d\varepsilon \quad (5.10)$$

można przedstawić w postaci następującego szeregu [6]⁴:

$$I(q) = 2^{1+1/\alpha} \frac{\sigma}{\alpha} \left(\frac{\gamma(\mu)}{\gamma_0}\right)^q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{1/\alpha} q \beta \sigma)^{2n}}{(2n)!} \Gamma((2n+1)/\alpha). \quad (5.11)$$

Wówczas, dowolny moment rzędu q jest postaci

$$\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)} = \frac{(\gamma(\mu))^q}{\Gamma(1/\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{1/\alpha} q \beta \sigma)^{2n}}{(2n)!} \Gamma((2n+1)/\alpha), \quad (5.12)$$

która była już dyskutowana wcześniej⁵, w części II.

Prawdopodobieństwo przetrwania

Prawdopodobieństwo przetrwania SP zdefiniowane jest (przypomnijmy) w następujący sposób

$$\Psi(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t | \varepsilon) \rho(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5.13)$$

gdzie warunkowe SP dane jest przez

$$\Psi(t | \varepsilon) = \int_t^{\infty} \psi(t' | \varepsilon) dt' = \exp(-t/\gamma(\varepsilon)). \quad (5.14)$$

W powyższym równaniu wykorzystana została jawna postać warunkowej funkcji PTD dana wyrażeniem (5.4). Wykorzystując w powyższych zależnościach równanie

⁴Całka ta posiada, wspomniane we wcześniejszym przypisie, przeskalowane σ w stosunku do odpowiadającej jej a rozważanej przez nas wcześniej całki I_0 (patrz wyrażenie (3.20) w rozdz. 3.3.1).

⁵Wyrażenie (5.12) jest analogiczne do (3.21) w rozdz. 3.3.1 ale posiada σ przeskalowane za pomocą czynnika $2^{1/\alpha}$, co jest bezpośrednią konsekwencją analogicznego przeskalowania gęstości $\rho(\varepsilon)$.

(5.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \frac{1}{2^{1+1/\alpha} \sigma \Gamma(1+1/\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{|\varepsilon - \mu|}{\sigma}\right)^\alpha\right) \exp(-t/\gamma(\varepsilon)) d\varepsilon \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\gamma(\mu)}\right)^n \frac{\langle t^n \rangle}{\Gamma^2(1+n)} \left(\frac{t}{\gamma(\mu)}\right)^n,\end{aligned}\quad (5.15)$$

gdzie użyto rozwinięcia w szereg wyrażenia $\exp(-t/\gamma(\varepsilon))$ oraz wzory (5.9) - (5.12). Widać jak bardzo skomplikowane jest SP, gdyż jest ono *de facto* sumą podwójną, a więc trudną nawet do numerycznego obliczenia.

Obliczenia przybliżone

Całka (5.10) została obliczona w Dodatku B⁶ z wykorzystaniem przybliżenia punktu siodłowego (SPA). Stąd (dla $\alpha > 1$) otrzymujemy kluczowe wyrażenie⁷

$$\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)} \approx \frac{\langle t^q \rangle_l}{\Gamma(1+q)} L^{|q|^{\alpha/(\alpha-1)}}, \quad (5.16)$$

istotne dla rozważań⁸ prowadzonych w tej części pracy. Wyrażenie

$$\frac{\langle t^q \rangle_l}{\Gamma(1+q)} = \gamma_0^q l^q \quad (5.17)$$

podlega skalowaniu z

$$l \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(\beta\mu), \quad (5.18)$$

co oznacza, że jest ono związane z dyssypacją, ponieważ zależy od wielkości⁹ $\beta\mu (= \langle \beta\varepsilon \rangle)$, gdzie $\langle \dots \rangle$ oznacza wartość oczekiwaną względem rozkładu $\rho(\varepsilon)$.

Z drugiej strony wielkość

$$L \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(b) \quad (5.19)$$

(użyta w równaniu (5.16)) jest odpowiedzialna za fluktuacje - wynika to z następującej zależności:

$$b = \omega_0^{-1} (2^{1/\alpha} \beta \sigma)^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad (5.20)$$

⁶Pomimo, że całka $I(q)$ jest analogiczna do $I_0(q)$, przytoczyliśmy jej obliczenie ze względu na fakt, iż jest ona inaczej (alternatywnie) sparametryzowana.

⁷Takiej postaci wyrażenia należało oczekiwać (patrz wzór (3.27) w rozdz. 3.3.1).

⁸Warto zauważyć, że wszystkie q -momenty (zarówno uzyskane ze wzorów (5.16) i (5.17), jak również z ogólnych wyrażeń (5.2) i (5.6)) zachowują warunek normalizacji, tzn. są równe 1 dla $q = 0$.

⁹Niestety, w naszym podejściu nie jest możliwe wyznaczenie osobno parametru β .

(tutaj czynnik $\omega_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha^{\alpha/(\alpha-1)}/(\alpha-1)$), gdzie dyspersja

$$\beta\sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{2^{2/\alpha}} \frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\Gamma(3/2)}} \sigma_{\beta\varepsilon}, \quad (5.21)$$

wyraża się za pomocą bardziej charakterystycznej dyspersji $\sigma_{\beta\varepsilon} = \sqrt{\langle(\beta\varepsilon - \beta\mu)^2\rangle}$.

Przyjmując w równaniu (5.16) rząd $q = 1$ otrzymujemy podstawę L w zredukowanej, bezwymiarowej postaci

$$L = \frac{\langle t \rangle}{\langle t \rangle_l}. \quad (5.22)$$

Pozwala to wyłączyć zachowanie monofrakalne (patrz niżej) co oznacza, że baza L wskazuje jednocześnie jaki ułamek oczekiwanego czasu między transakcjami jest związany z fluktuacjami.

Zauważmy, że q -moment $\langle t^q \rangle_l$ jest wielkością charakteryzującą monofraktal, ponieważ może być otrzymany przy założeniu $\rho(\varepsilon) = \delta(\varepsilon - \mu)$, czyli jako granica ρ gdy $\sigma \rightarrow 0$ w (5.7); oznacza to nierealistyczny przypadek braku fluktuacji wolumenów transakcji. Analogicznie, zależność (5.17) daje możliwą interpretację bazy l przy założeniu $q = 1$, mianowicie

$$l = \frac{\langle t \rangle_l}{\gamma_0}. \quad (5.23)$$

Wówczas równanie (5.17) można zapisać jako

$$\frac{\langle t^q \rangle_l}{\Gamma(1+q)} = (\langle t \rangle_l)^q. \quad (5.24)$$

Podstawiając zależności (5.24) oraz (5.22) do (5.16) otrzymujemy ogólny związek

$$\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)} = (\langle t \rangle_l)^q \left(\frac{\langle t \rangle}{\langle t \rangle_l} \right)^{|q|^{\alpha/(\alpha-1)}}, \quad (5.25)$$

gdzie wszystkie występujące w nim wielkości mają już dobrze określoną interpretację. Zatem, q -momenty można (w ogólności) wyrazić poprzez singularną (czyli niecałkowitą) potęgę q ; skalują się one ze stosunkiem dwóch różnych momentów pierwszego rzędu średnich czasów międzytransakcyjnych. Równanie (5.25) sugeruje, że rozważana PTD jest tak szerokim rozkładem, że do jej właściwej charakterystyki potrzebne jest spektrum wykładników. To właśnie wskazuje na multifrakalny charakter układu. Jednakże, w przedstawionej tutaj **analizie momentów nie napotykamy na żaden wyraźny ślad przemiany fazowej - aby ją dostrzec wymagane jest podejście komplementarne.**

5.2.2 Kolejne wyniki dla q -momentów

W Tabeli 5.1 przedstawiono:

- i) cztery wartości wykładnika kształtu α i parametrów a ($\stackrel{\text{def.}}{=} \ln(\gamma_0) + \beta\mu$) oraz b otrzymane z dopasowania wyrażenia¹⁰

$$\ln\left(\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)}\right) \approx aq + b |q|^{\alpha/(\alpha-1)} \quad (5.26)$$

do danych empirycznych (kontrakty futures dla kursu wymiany walut USDM) dla czterech zakresów q , oraz

- ii) odpowiadające wartości kontrolnych parametrów dopasowania, χ^2/m (gdzie m jest liczbą stopni swobody).

W tabeli tej przedstawiono wyniki dopasowania dla zakresu $0 \leq q \leq 3.0$ ponieważ jedynie wtedy dopasowania dają wiarygodne (z punktu widzenia ich błędów statystycznych) wartości wykładnika kształtu α . Dla zakresów obejmujących mniejsze wartości q różnica pomiędzy danymi empirycznymi a linią prostą są niewystarczające (patrz rysunki 5.1 i 5.2) do analizy multifraktalności. Jednakże, dla dłuższych zakresów q wartość χ^2/m jest zbyt wysoka, dlatego też wykładnik $\alpha = 1.754 \pm 0.080$ oraz odpowiadające mu wartości pozostałych parametrów, otrzymane z dopasowania w ramach pierwszego zakresu q wydają się być optymalnym wyborem, używanym w dalszej części rozważań, np. w Tabeli 5.2.

Tabela 5.1: Wartości parametrów α , a oraz b dla modelu MF-CTRW wraz z parametrem kontrolnym χ^2/m otrzymane z dopasowania równania (5.26) do danych empirycznych dla czterech przykładowych zakresów q .

Zakres q	α	a	b	χ^2/m
0 – 3	1.754 ± 0.080	3.008 ± 0.011	0.2268 ± 0.0087	0.00012
0 – 4	2.041 ± 0.123	2.827 ± 0.039	0.394 ± 0.031	0.00049
0 – 5	2.481 ± 0.469	2.490 ± 0.20	0.710 ± 0.170	0.00131
0 – 6	3.179 ± 0.282	1.890 ± 0.150	1.270 ± 0.140	0.00261

Dla $\alpha < 2$ wyrażenie (5.26) odtwarza punkt przegięcia¹¹ w $q = 0$ (dobrze widoczny w danych empirycznych). Przedłużenie przeprowadzonych na jego podstawie

¹⁰Równanie (5.26) zostało otrzymane z (5.16) z wykorzystaniem (5.17), (5.18) oraz (5.19).

¹¹Punkt przegięcia danej funkcji $\zeta(q)$ zdefiniowany jest przez warunek $\frac{d^2\zeta(q)}{dq^2} = 0$ w tym punkcie oraz przez dodatkowe ograniczenie na niezerową wartość drugiej pochodnej w otoczeniu tego punktu. W naszym przypadku oba warunki są spełnione dla $q = 0$ o ile $\alpha < 2$; zauważmy, że wówczas $\frac{d\zeta(q)}{dq} |_{q=0} > 0$.

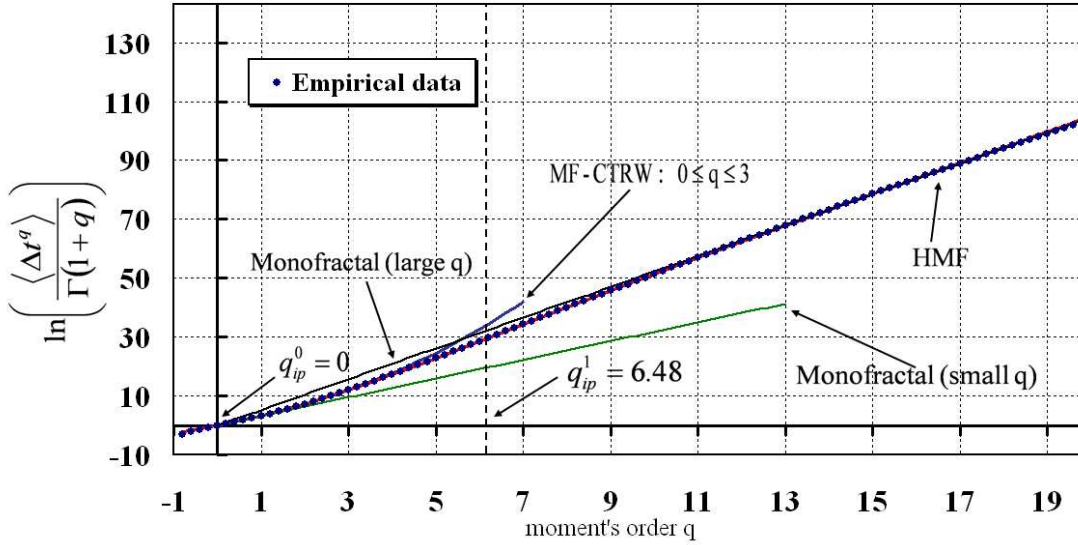
predykcji dla ujemnych wartości $q > -1$ daje satysfakcjonujące wyniki dla $q \gtrsim -0.5$ (patrz rysunki 5.1 i 5.2). Stwierdzenie to jest istotne z punktu widzenia rozważań (w ramach modelu MF-CTRW) dotyczących przemian fazowych wyższych rzędów zachodzących właśnie w $q = 0$.

Na rysunkach 5.1 oraz 5.2 przedstawiono predykcje wyrażenia (5.26) (górną linią ciągłą) otrzymaną z dopasowania do danych empirycznych (oznaczonych punktami) należących do najkrótszego zakresu q (tzn. $0 \leq q \leq 3.0$). Na znajdujących się tam wykresach zaznaczono również dwa punkty przegięcia otrzymane dla $q = q_{ip}^0 \approx 0$ oraz $q = q_{ip}^1 \approx 6.48$ (ten drugi znajduje się na przecięciu linii punktów z pionową linią przerywaną). Te punkty przegięcia są bardzo istotne ponieważ dzielą pełen zakres q na trzy rozłączne obszary. Pierwszy obszar to $-1 < q < q_{ip}^0$ - tutaj q -moment jest funkcją wklęsłą; drugi obszar to zakres $q_{ip}^0 \leq q \leq q_{ip}^1$ gdzie funkcja ta jest wypukła i wreszcie trzeci obszar $q > q_{ip}^1$ gdzie ponownie funkcja q -momentów jest wklęsła. W ramach MF-CTRW analizujemy (z dobrym przybliżeniem) zachowanie się tej funkcji w drugim najważniejszym obszarze q , natomiast wnikliwe zbadanie pozostałych obszarów nadal stanowi wyzwanie. Warto jednak zaznaczyć, że model MF-CTRW pozwolił na skonstruowanie heurystycznego wyrażenia HMF, które bardzo dobrze odtwarza przebieg danych empirycznych w całym zakresie q - była już o tym mowa w rozdz. 4.3. W niniejszej części kontynuujemy dyskusję (zapoczątkowaną w rozdz. 4.3) tego oraz wspomnianych powyżej wyników.

Dalsza dyskusja heurystycznej formuły multifraktalnej

W części II w rozdz. 4.3 wprowadzona została zaawansowana HMF, która prowadzi do odtworzenia danych empirycznych w całym dostępnym zakresie q (tzn. $-1 < q \leq 20$). Oznacza to, że HMF, będąca wzorem określającym $\ln \left(\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)} \right)$, spełnia następujące warunki:

- i) warunek normalizacji, tzn. przyjmuje wartość 1 dla $q = 0$,
- ii) dla małych (nieujemnych) wartości q wyrażenie to (z dobrym przybliżeniem) pokrywa się z logarytmem równania (5.16), który jest wypukłą funkcją q ,
- iii) dla ujemnych wartości q (w naszym przypadku dla $-1 < q < 0$) wyrażenie to jest wklęsłą funkcją q aby dobrze opisywać dane empiryczne (patrz rys. 5.2),
- iv) $q = q_{ip}^0$ jest pierwszym punktem przegięcia, natomiast dla pośredniego q (w naszym przypadku dla $q = q_{ip}^1 = 6.48$) tworzy drugi punkt przegięcia,
- v) dla dużych wartości q wyrażenie przyjmuje postać monofraktalną (opisaną w rozdz. D).



Rysunek 5.1: Wykres porównujący dane empiryczne dla q -momentów $\langle t^q \rangle / \Gamma(1+q)$ (obejmujące kontrakty futures dla kursu wymiany walut USDM, oznaczone granatowymi punktami) z dwoma przewidywaniami teoretycznymi danymi przez równania (5.26) (krzywa górna) oraz (5.27) (krzywa dolna dobrze dopasowana do pełnego zakresu q danych empirycznych). Dodatkowo zaznaczono punkty przegięcia krzywej empirycznej, czyli $q = q_{ip}^0 \approx 0$ oraz $q = q_{ip}^1 \approx 6.48$, definiujące zakres q budzący nasze szczególne zainteresowanie. Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7], w której przedziały międzytransakcyjne zostały oznaczone jako Δt .

Poniżej przytaczam odgadniętą funkcję spełniającą wszystkie powyższe warunki (stanowiącą nieco inny zapis tej podanej w rozdz. 4.3)

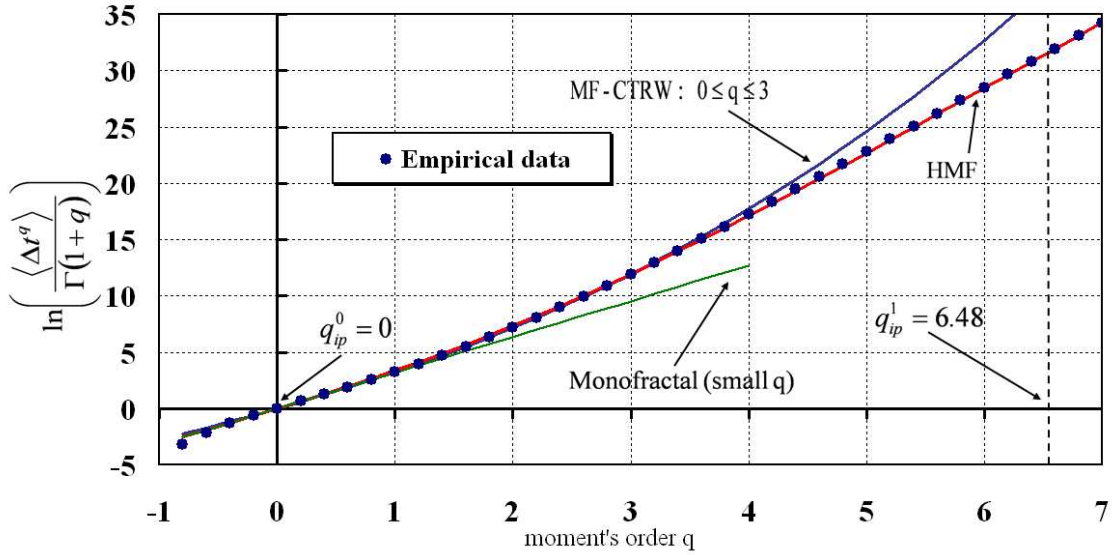
$$\begin{aligned}
\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)} &\approx \gamma_0^q \exp \left\{ \beta \mu q + b_1 \left[1 - \exp \left(-b_2 |q|^{1/(\alpha-1)} \right) \right] q \right\} \\
&= (\langle t \rangle_l)^q \exp \left\{ b_1 \left[1 - \exp \left(-b_2 |q|^{1/(\alpha-1)} \right) \right] q \right\} \\
&= (\langle t \rangle_l)^q L_2^{b_2^{-1} [1 - \exp(-b_2 |q|^{1/(\alpha-1)})] |q|} \\
&= (\langle t \rangle_l)^q L_1^{\left[1 - L_2^{-|q|^{1/(\alpha-1)}} \right] q}, \tag{5.27}
\end{aligned}$$

gdzie wykładnik b (zdefiniowany w równaniu (5.20)) można przedstawić jako

$$b = b_1 b_2; \tag{5.28}$$

w powyższych równaniach wykorzystano następujące definicje czynników bazowych

$$L_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(b_1), \quad L_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(b_2). \tag{5.29}$$



Rysunek 5.2: Wykres przedstawiający powiększenie pierwszej części rys. 5.1 dla małych i pośrednich q . Porównanie danych empirycznych (zaznaczonych punktami) z przewidywaniami teoretycznymi: i) górną krzywą daną przez wyrażenie (5.26) oraz ii) dolną krzywą określoną przez (5.27), jest wyraźniejsze niż na rys. 5.1. Pozwala to bardziej precyzyjnie określić zakres stosowalności omawianych w niniejszej pracy modeli. Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7].

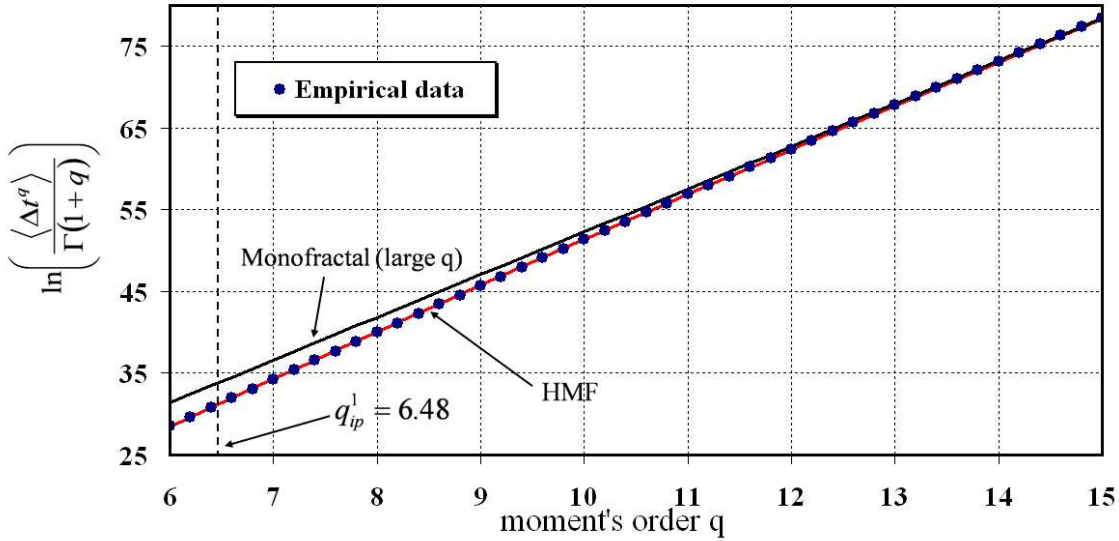
Przewidywania wyrażenia HMF (5.27) przedstawiono na wykresie 5.1 w postaci krzywej bardzo dobrze dopasowanej do danych empirycznych w całym zakresie q . Jakość tego dopasowania jest lepiej widoczna na powiększeniu tego wykresu dla początkowych i pośrednich wartości q zamieszczonym na rys. 5.2 oraz dla dużych wartości q na rys. 5.3. Zgodnie z oczekiwaniami (patrz również dane w Tabeli 5.2), dla zakresu $-0.5 \lesssim q \lesssim 3.5$ (najbardziej istotnego dla dalszych rozważań) przewidywania równań (5.26) oraz (5.27) są w zasadzie nierozróżnialne. W tabeli 5.2 przedstawiono porównanie parametrów określających obie krzywe. Parametry te są

Tabela 5.2: Zestawienie parametrów pochodzących z dopasowania wyrażań (5.26) modelu MF-CTRW oraz HMF (5.27) do danych empirycznych.

Model	α	a	b
MF-CTRW	1.754 ± 0.080	3.008 ± 0.011	0.227 ± 0.009
HMF	1.676 ± 0.018	3.074 ± 0.063	0.228 ± 0.028

do siebie zbliżone - dla ustalenia uwagi w dalszej części pracy będą używane wartości otrzymane dla wyrażenia (5.26) (pierwszy wiersz). Dodajmy, że wspomniane powyżej dopasowanie pozwoliło także wyznaczyć wielkości cząstkowe $b_1 = 2.152 \pm 0.063$ oraz $b_2 = 0.106 \pm 0.010$.

Co więcej, na tych rysunkach przedstawiono przewidywania HMF (5.27) dla początkowych i pośrednich (rysunki 5.1 i 5.2) oraz asymptotycznych (rys. 5.3) wartości q , zbiegające do linii prostych definiujących monofraktale. Wykresy te potwierdzają konieczność rozróżnienia trzech różnych struktur czasów międzytransakcyjnych. **Głównym celem niniejszej pracy jest analiza środkowego, multifraktalnego obszaru.**



Rysunek 5.3: Powiększenie zakresu dużych wartości q z rys. 5.1; dobrze widoczne jest tutaj zarówno odchylenie od asymptotycznej linii prostej (czarna linia ciągła) jak również zbieganie do niej danych empirycznych (granatowe punkty) i przewidywań HMF (czerwona linia ciągła). Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7].

Zauważmy, że znajomość wszystkich q -momentów w postaci analitycznej nie pozwala jeszcze na jednoznaczne określenie funkcji $\psi(t)$. Dlatego dodatkowym wyzwaniem jest otwarty problem znalezienia jawnej, zamkniętej postaci warunkowej funkcji $\psi(t | \varepsilon)$ oraz rozkładu $\rho(\varepsilon)$ pozwalających na wyprowadzenie HMF danej wyrażeniem (5.27).

W dalszym ciągu zajmujemy się wyprowadzeniem jawnej, zamkniętej postaci sumy statystycznej, jako wyjściowym krokiem rozwiniętej analizy własności statystycznych MF-CTRW.

Rozdział 6

Multifraktalność a formalizm termodynamiczny

6.1 Suma statystyczna w formalizmie MF-CTRW

W rozdz. 5.2 pokazano, że q -momenty czasów międzytransakcyjnych skalują się w sposób singularny z fluktuacjami (dyspersją) parametru ε , który - przypomnijmy - może być interpretowany na rynku finansowym np. jako wolumen transakcji (patrz wzór (5.16) i wspomagające go wyrażenia). Pojawia się tutaj pytanie czy suma statystyczna posiada analogiczne własności skalowania. **Zasadniczym celem tej części** (realizowanym w rozdziałach 6.1 i 6.2) **jest wyprowadzenie** (przynajmniej w sposób przybliżony) **uogólnionej funkcji podziału** [81, 82] **w postaci zamkniętej w ramach modelu MF-CTRW** i przy jej pomocy rozważenie:

- i) istotnych (uzupełniających w stosunku do tych rozważanych w rozdz. 5.2) własności multifrakalnych losowej struktury czasów międzytransakcyjnych, oraz
- ii) ich termodynamicznych konsekwencji, a mianowicie przemian fazowych wyższych rzędów¹.

Analizę rozpoczynam, tak jak to się zwykle czyni w statystycznej analizie multifraktalnej, od zdefiniowania uogólnionej funkcji podziału, stanowiącej tutaj analogię wielkiej sumy statystycznej,

$$Z(q') = \frac{1}{\theta^{q'-1}} Z_0(q') = \left\langle \left(\frac{p_i}{\theta} \right)^q \right\rangle, \quad q' = q + 1, \quad (6.1)$$

¹Przypomnę, że mówiąc w tego typu kontekście o termodynamice mam na myśli jedynie formalizm termodynamiki stanów równowagowych, a mówiąc o przemianach fazowych jedynie ich analogie.

gdzie funkcja podziału $Z_0(q')$ zdefiniowana jest następująco:

$$Z_0(q') = \sum_{\underline{i}} p_{\underline{i}}^{q'}, \quad (6.2)$$

natomiast parametr $\theta(> 0)$ (znaleziony poniżej w sposób samouzgodniony) jest jednoznacznie powiązany z odpowiednikiem potencjału termodynamicznego układu otwartego (zwanego też entalpią Gibbsa lub energią swobodną Gibbsa; potencjał ten w przeliczeniu na jedną cząsteczkę układu jest po prostu jego potencjałem chemicznym). W powyższym wyrażeniu wskaźnik dwuskładnikowy $\underline{i} = (i_1, i_2)$ indeksuje elementarne (jednostkowe) prostokąty (komórki) w przestrzeni fazowej (o długości boków odpowiednio Δ_t i Δ_ε), do których przypisane jest prawdopodobieństwo (miara) $p_{\underline{i}}$. Za pomocą tych prostokątów przestrzeń fazowa zostaje rozparcelowana. W naszym podejściu (opartym na modelu MF-CTRW) rozważamy dziedzinę miary będącą dwuwymiarową półprzestrzenią zdefiniowaną przez czas $t \geq 0$ i wolumen transakcji, ε . Tak wprowadzona miara znika (w naszym przypadku) jedynie w granicy $t \rightarrow \infty$ lub $|\varepsilon| \rightarrow \infty$.

Obie funkcje podziału zdefiniowane w równaniu (6.1) spełniają (jak trzeba) warunek normalizacji

$$Z(q' = 1) = Z_0(q' = 1) = 1, \quad (6.3)$$

co oznacza, że rzędy q' i q (użyty w definicji q -momentów (5.2)) są przesunięte względem siebie o 1, tzn. $q' = q + 1$ - co definiuje ich wzajemną kalibrację.

W świetle powyższych definicji spełniony jest następujący związek

$$Z(q' \rightarrow 0) = Z_0(q' \rightarrow 0) \rightarrow \infty, \quad (6.4)$$

gdyż dziedzina (zdefiniowana jako iloczyn kartezjański czasów międzytransakcyjnych i wolumenu transakcji) jest nieograniczona, a żadne z prawdopodobieństw $p_{\underline{i}}$ nie znika. Z tego samego powodu zachodzi $Z(q' < 0) = Z_0(q' < 0) = \infty$. Zatem korzystając z narzędzi (6.1) i (6.2) musimy ograniczyć nasze rozważania jedynie do wartości $q' > 0$.

Definicja funkcji podziału (6.1) (w połączeniu z (6.2)), gdzie suma po $i_1 \geq 0$ jest ograniczona jedynie od dołu (przez 0) a po i_2 jest nieograniczona, nie pozwala na obliczenie fraktalnego wymiaru pudełkowego bezpośrednio z definicji [82].

Warto zauważyć, że dla całkowitych wartości $q' \geq 2$ funkcja podziału $Z_0(q')$ wyraża prawdopodobieństwo znalezienia q' transakcji w jakiegokolwiek komórce \underline{i} . Dla ustalonego q' i heterogenicznych prawdopodobieństw $p_{\underline{i}}$ funkcja podziału $Z_0(q')$ rośnie, gdy zróżnicowanie pomiędzy prawdopodobieństwami wzrasta, a więc może stanowić miarę zróżnicowania struktury korelacji pomiędzy transakcjami. Zatem (jak to wynika z definicji (6.2)) dla pełnego zróżnicowania, tzn. przy zlokalizowaniu

prawdopodobieństwa do pojedynczej komórki \underline{j} w ściśle określonej chwili i dla ściśle określonego wolumenu (mamy wówczas $p_{\underline{i}} = \delta_{\underline{i}, \underline{j}}$), funkcja podziału przyjmuje swoją maksymalną wartość, $Z_0(q') = 1$. Co więcej, dla ustalonych $p_{\underline{i}} < 1$ a zmieniającego się wykładnika q' funkcja podziału maleje wraz z jego wzrostem, tzn. korelacje między transakcjami (lub ich zlokalizowanie w przestrzeni fazowej) maleją przy wzroście liczby tych transakcji q' , czego można się było spodziewać.

W poniższych rozważaniach prawdopodobieństwa $p_{\underline{i}}$ zostały wyrażone następująco, poprzez rozkłady zdefiniowane już wcześniej w ramach rozszerzonego formalizmu MF-CTRW,

$$p_{\underline{i}} = \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1} + \Delta t} dt \int_{\varepsilon_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2} + \Delta \varepsilon} d\varepsilon \psi(t | \varepsilon) \rho(\varepsilon). \quad (6.5)$$

Stąd, dla uogólnionej funkcji podziału $Z(q')$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} Z(q') &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\theta^{q'-1}} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_{i_1}}^{t_{i_1} + \Delta t} dt \int_{\varepsilon_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2} + \Delta \varepsilon} d\varepsilon \psi(t | \varepsilon) \rho(\varepsilon) \right]^{q'} \\ &= \frac{1}{\theta^{q'-1}} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \left[\int_{\varepsilon_{i_2}}^{\varepsilon_{i_2} + \Delta \varepsilon} d\varepsilon \rho(\varepsilon) \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1} + \Delta t} dt \psi(t | \varepsilon) \right]^{q'} \\ &\approx \frac{1}{\theta^{q'-1}} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} [\rho(\varepsilon_{i_2}) \Delta \varepsilon]^{q'} [\psi(t_{i_1} | \varepsilon_{i_2}) \Delta t]^{q'} \\ &= \frac{1}{(\theta / \Delta t \Delta \varepsilon)^{q'-1}} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} [\rho(\varepsilon_{i_2})]^{q'} \Delta \varepsilon \sum_{i_1=0}^{\infty} [\psi(t_{i_1} | \varepsilon_{i_2})]^{q'} \Delta t, \end{aligned} \quad (6.6)$$

gdzie $\Delta_\varepsilon \Delta_t$ oznacza powierzchnię elementarnej komórki z dowolnie małymi dodatnimi długościami boków $\Delta_t (\ll \gamma_0)$ oraz $\Delta_\varepsilon (\ll \sigma)$, natomiast $t_{i_1} = i_1 \Delta_t$ oraz $\varepsilon_{i_2} = i_2 \Delta_\varepsilon$.

W równaniu (6.6) suma po indeksie i_1 jest ograniczona od dołu (przez 0), natomiast po i_2 jest nieograniczona - oznacza to, że niemożliwe jest zbadanie własności skalowania funkcji podziału wraz ze zmianą wielkości obszaru zajmowanego przez układ i wyznaczenie jego pudełkowego wymiaru fraktalnego [82]. Niemniej, jak pokazują nadal **możliwa jest odpowiedź na pytanie o własności skalowania funkcji podziału wraz z fluktuacjami wolumenu - stanowi to główny punkt tej części pracy.**

Poprzez porównanie trzeciego wiersza w (6.6) z pierwszą równością w wyrażeniu (6.1) oraz wzorem (6.2) można stwierdzić, że

$$p_{\underline{i}} \approx \rho(i_2 \Delta_\varepsilon) \psi(i_1 \Delta_t | i_2 \Delta_\varepsilon) \Delta_\varepsilon \Delta_t. \quad (6.7)$$

Zauważmy, że ostatnia suma po zmiennej i_1 w równaniu (6.6) może zostać przepisana w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=0}^{\infty} [\psi(t_{i_1} | \varepsilon_{i_2})]^{q'} &= [\gamma(\varepsilon_{i_2})]^{-q'} \sum_{i_1=0}^{\infty} \exp(-i_1 q' \Delta_t / \gamma(\varepsilon_{i_2})) = \frac{[\gamma(\varepsilon_{i_2})]^{-q'}}{1 - \exp(-q' \Delta_t / \gamma(\varepsilon_{i_2}))} \\ &\approx \frac{[\gamma(\varepsilon_{i_2})]^{1-q'}}{q' \Delta_t}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

gdzie w ostatnim przejściu konieczne było wykorzystanie warunku $q' \Delta_t / \gamma(\varepsilon_{i_2}) \ll 1$; warunek ten można zawsze uzyskać ponieważ Δ_t jest dowolnie małe a q' jest ustalone. Podstawiając równanie (6.8) do 6.6) otrzymujemy (poprzez zamianę sumy po i_2 w ostatnim wierszu (6.6) na całkę) funkcję podziału w następującej postaci

$$\begin{aligned} Z(q') &\approx \left(\frac{\gamma_0 \sigma}{M}\right)^{q'-1} \frac{1}{q'} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon [\rho(\varepsilon)]^{q'} [\gamma(\varepsilon)]^{1-q'} \\ &= \left(\frac{\sigma}{M}\right)^{q'-1} \frac{1}{q'} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon [\rho(\varepsilon)]^{q'} \exp(\beta(1-q')\varepsilon) \\ &= N_{q'} \int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{q'}{2} \left|\frac{\varepsilon - \mu}{\sigma}\right|^\alpha + \beta(1-q')\varepsilon\right) \\ &= N_{q'} \exp(\beta\mu(1-q')) J(q'), \end{aligned} \quad (6.9)$$

gdzie całka

$$J(q') = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{q'}{2} |y|^\alpha + \beta\sigma(1-q')y\right) \quad (6.10)$$

oraz czynnik

$$N_{q'} = \frac{1}{q'} M^{1-2q'}, \quad (6.11)$$

zostały uzyskane, odpowiednio, po prostej zamianie zmiennych $y \stackrel{\text{def.}}{=} (\varepsilon - \mu)/\sigma$ w całce stojącej w trzecim wierszu równania (6.9) oraz po zdefiniowaniu bezwymiarowego parametru θ jako $\theta \stackrel{\text{def.}}{=} M\Delta_t \Delta_\varepsilon / \gamma_0 \sigma$, gdzie współczynnik $M \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{1+1/\alpha} \Gamma(1 + 1/\alpha)$, co pozwoliło wyeliminować (zbędne) pole prostokąta $\Delta_\varepsilon \Delta_t$.

W rozdz. 6.1.1 oraz w Dodatku D przeprowadzono rozważania dotyczące skalowania funkcji podziału oraz wprowadzono przydatne wielkości: wymiar Rényi, informację Rényi na jednostkę objętości oraz zredukowaną informację Rényi.

6.1.1 Wieloskalowa postać funkcji podziału: wymiar Rényi

Całka $J(q')$, a więc również funkcja podziału $Z(q')$, zostały obliczone w Dodatku C, gdzie ponownie skorzystałem z przybliżenia punktu siodłowego (patrz równanie

(C.15)); uzyskano tam,

$$Z(q') \approx B(q') L^{-\tau(q')}, \quad (6.12)$$

gdzie czynnik

$$B(q') = M^{1-q'} q'^{(1-2\alpha)/2(\alpha-1)} \exp((bc - \beta\mu)(q' - 1)), \quad (6.13)$$

natomiast c jest stałą, która została dobrana w sposób samouzgodniony, czyli tak aby czynnik $B(q')$ był już niezależny od bazy² L . Zatem

$$c = \frac{\beta\mu}{b}. \quad (6.14)$$

Kluczowy dla rozważań w niniejszej części **uogólniony wykładnik skalowania** jest tutaj dany wzorem

$$\tau(q') = -c(1 - q') - |1 - q'| \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0} \right)^{1/(\alpha-1)} = (q' - 1)D(q'), \quad (6.15)$$

gdzie q'_0 jest (skończoną) stałą korygującą wprowadzoną *ad hoc*, której wartość należy znaleźć poprzez warunek samouzgodności przeprowadzanej procedury lub poprzez porównanie z danymi empirycznymi (zostało to szczegółowo omówione w rozdz. 6.1.2 i Dodatku E). Należy podkreślić, że uogólniony wykładnik skalowania zawiera, zasadniczy dla rozważań dotyczących przemian fazowych, składnik singularny rządony przez (w ogólności) niecałkowity wykładnik $1/(\alpha - 1)$. **Wykrycie tego singularnego składnika stanowi jedno z najważniejszych osiągnięć niniejszej pracy.**

Występujący w definicji $\tau(q')$ (dodatni) wymiar Rényi dany jest wzorem

$$D(q') = \frac{\tau(q')}{q' - 1} = c + \operatorname{sgn}(1 - q') \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0} \right)^{1/(\alpha-1)}. \quad (6.16)$$

Wymiar ten posiada następujące własności:

- i) $\lim_{q' \rightarrow 0} D(q') = c + \frac{1}{q'_0^{1/(\alpha-1)}} \equiv \frac{1}{[D(0) - c]^{\alpha-1}} \geq 0$, gdzie $D(0) = f(\eta(q' = 0)) > c$ (co otrzymano z porównania wyrażenia (6.15) z (6.22)); niestety (jak już mówiliśmy), wielkość $D(0)$ nie może być traktowana jako wymiar pudełkowy czy też jako pojemność informacyjna (zdefiniowane np. w [82]), wykres $D(q')$ został przedstawiony dla konkretnego przypadku (obrotu kontraktami na kursie wymiany USDM) na rys. 6.2.

²Mniej restrykcyjnym wymaganiem byłoby dopuszczenie możliwej, wolnozmienniej zależności od bazy.

ii) $\lim_{q' \rightarrow \infty} D(q') = c - 1 \geq 0$,

iii) $\lim_{q' \rightarrow 1} D(q') = c$,

iv) pierwsza pochodna $D(q')$ po q'

$$D'(q') \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{dD(q')}{dq'} = -\frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0} \right)^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} \frac{1 + q'_0}{(q' + q'_0)^2} \leq 0, \quad (6.17)$$

dla punktu $q' = 1$ i $\alpha < 2$ jest równa 0, w przeciwnym przypadku (dla $\alpha > 2$) rozbiega się w tym punkcie do nieskończoności. Wykres $D'(q')$ został przedstawiony także dla konkretnego przypadku (obrotu kontraktami na kursie wymiany USDM) na rys. 6.3.

v) druga pochodna $D(q')$ po q'

$$\begin{aligned} D''(q') &= \frac{2}{\alpha - 1} \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0} \right)^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} \frac{1 + q'_0}{(q' + q'_0)^3} + \\ &+ \frac{2 - \alpha}{(\alpha - 1)^2} \left(\frac{1 + q'_0}{(q' + q'_0)^2} \right)^2 \times \\ &\times \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0} \right)^{(3-2\alpha)/(\alpha-1)} \operatorname{sgn}(1 - q'), \end{aligned} \quad (6.18)$$

która dla $\alpha < 3/2$ znika w punkcie $q' = 1$, w przeciwnym przypadku (dla $\alpha > 3/2$) rozbiega się. Wykres $D''(q')$ został przedstawiony dla konkretnego przypadku (obrotu kontraktami na kursie wymiany USDM) na rys. 6.4.

Dla dużych wartości q' z równania (6.15) oraz ii) otrzymujemy następujące wyrażenie dla uogólnionego wykładnika skalowania

$$\tau(q') \approx (c - 1) q' = \eta_{min} q'; \quad (6.19)$$

odgrywa ono istotną rolę w analizie spektrum singularności, ponieważ $\eta_{min} = c - 1$ definiuje jego dolne ograniczenie (patrz podrozdz. 6.1.2). Co więcej, podstawiając równanie (6.19) do (6.12) i porównując uzyskany wynik z (6.1) oraz (6.2) uzyskujemy w granicy $q' \rightarrow \infty$:

$$p_{\underline{i}}^{max} \approx \theta L^{-\eta_{min}}. \quad (6.20)$$

W równaniu (6.20), $p_{\underline{i}}^{max}$ oznacza maksymalną wartość pośród lokalnych prawdopodobieństw $p_{\underline{i}}$. Stąd uogólniona funkcja podziału w granicy dużych wartości q jest zdominowana przez największe lokalne prawdopodobieństwo wyrażone za pomocą

pojedynczego wykładnika, zatem ma charakter monofraktalny. Potęga q' pełni rolę filtru wybierającego coraz większe wartości prawdopodobieństwa na maksymalnej kończą³. Samozgodność rozpatrywanego modelu wymaga przyjęcia hipotezy o skalowaniu (wraz z bazą L) wszystkich lokalnych prawdopodobieństw czyli założeniu, że

$$p_i \approx \theta L^{-\eta_i}. \quad (6.21)$$

Zatem ma sens wprowadzenie rozkładu (czyli spektrum) wszystkich lokalnych wykładników skalowania η_i . Innymi słowy, te lokalne wykładniki są singularnościami [82] charakteryzującymi odpowiadające im monofraktale znajdujące się na półprzestrzeni $(\Delta t, \varepsilon)$, patrz podrozdz. 6.1.2 poniżej; powiązane są one liniową zależnością z wymiarami tych monofraktali. Tak więc zwiększanie q' powoduje coraz słabszą widoczność coraz większych wymiarów lokalnych. Ten wynik wprowadza sprzężenie będące źródłem monotonicznej zależności η od q' widocznej w pierwszej relacji w (6.24) (patrz podrozdz. 6.1.2).

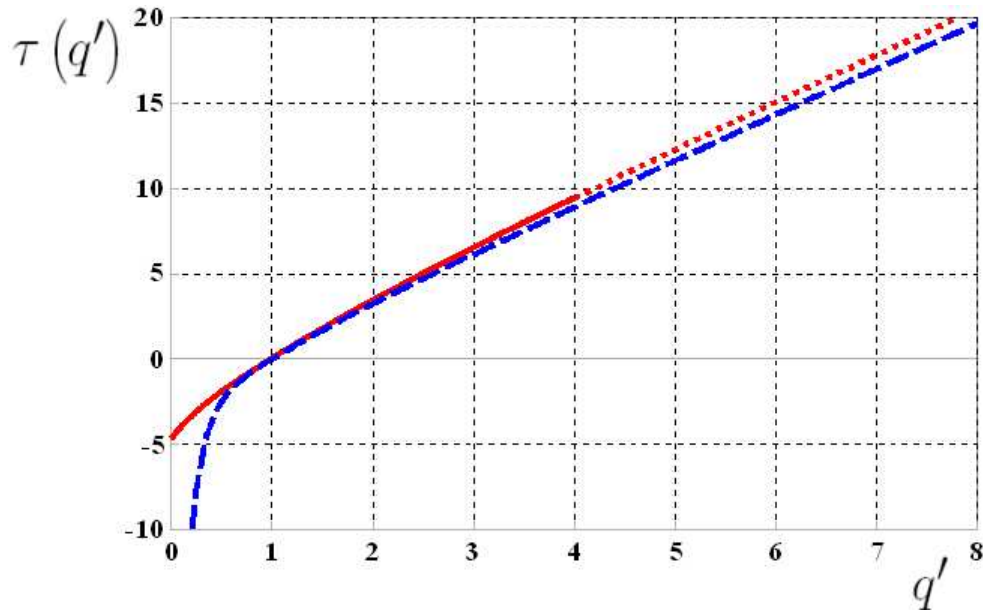
Na rys. 6.1 przedstawiono uogólniony wykładnik skalowania $\tau(q')$, przykładowo dla dwóch różnych wartości $q'_0 = 0$ i $q'_0 = 1$. Widać, że istnieje zasadnicza różnica pomiędzy nimi: dla pierwszego przypadku wykładnik rozbiega się (w sposób potęgowy) gdy $q' \rightarrow 0$ w przeciwieństwie do drugiego przypadku, dla którego w tej granicy wykładnik jest skończony. W obu przypadkach, dla $q' \rightarrow \infty$ uogólniony wykładnik skalowania rozbiega się liniowo, natomiast znika dla $q' = 1$.

Nawet z czysto technicznego punktu widzenia, wymiary Rényi są wielkościami przydatnymi, jako najbardziej istotne czynniki uogólnionego wykładnika skalowania, zawierające wspomnianą singularność, a więc potrafiące opisać różnorodne własności badanego układu. Przykładowo, dla $q' > 1$ opisują stopień skorelowanie pomiędzy transakcjami lub stopień ich gronowania (klastrowania), natomiast dla $q' = 1$ wymiar Rényi $D(1)$ jest tzw. informacją Shannona, zatem stała c ma dobrze określoną interpretację.

Własność ii) wynika bezpośrednio z równań (6.14) i (6.25). Zatem - zgodnie z ogólnymi definicjami [82] - wymiary Rényi są nieujemnymi, monotonicznie malejącymi funkcjami q' (patrz rys. 6.2). Rozbieganie się wymiarów Rényi dla zerowego q' w przypadku $q'_0 = 0$ jest związane z tym, że rozmiar substratu jest od samego początku nieograniczony (patrz równanie (6.4) i (6.6)), gdzie nie występuje żadne przejście graniczne z rozmiarem substratu do nieskończoności.

W celu łatwiejszej analizy wymiarów Rényi $D(q')$ (w szczególności w otoczeniu punktu $q' = 1$) na rys. 6.3 przedstawiono wykres pierwszej pochodnej $D'(q')$ da-

³Analogiczna rola q' dla malejących, ujemnych wartości polega na wyborze coraz to mniejszych wartości lokalnego wykładnika skalowania na minimalnej kończą. Ten przypadek nie dotyczy naszej sytuacji.



Rysunek 6.1: Przykładowe wykresy (tylko dla dodatnich wartości q') uogólnionego wykładnika skalowania τ w funkcji q' , dla $\alpha = 1.754$ (dotyczącego obrotu kontraktami *futures* na kurs wymiany USDM) i $q'_0 = 0$ (dolna niebieska krzywa przerywana) oraz $q'_0 = 1.0$ (górną czerwoną krzywą, której część ciągłą mieści się w zakresie stosowalności modelu MF-CTRW). Rysunek zaczerpnięto z naszej pracy [7].

nej równaniem (6.17), natomiast na rys. 6.4 przedstawiono drugą pochodną $D''(q')$ wyrażoną przez (6.18); oba wykresy skonstruowano dla wykładnika $\alpha = 1.754$ (dotyczącego obrotu kontraktami *futures* na kurs wymiany USDM) oraz $q'_0 = 1$.

Wykresy przedstawione na rysunkach 6.2 i 6.3 są spójne z wykresem na rys.6.4 pokazującym, że dla $3/2 < \alpha < 2$ druga pochodna $D''(q' \rightarrow 1_-) \rightarrow -\infty$ oraz $D''(q' \rightarrow 1_+) \rightarrow \infty$; oznacza to, że dla $q' = 1$ druga pochodna D'' jest nieokreślona, tzn. zawiera nieskończoną nieciągłość w tym punkcie. **Właśnie takie zachowanie wymiarów Rényi jest odpowiedzialne za występowanie przemiany fazowej trzeciego rodzaju** omawianej w rozdz. 6.2.

6.1.2 Spektrum wymiarów lokalnych

W ogólności baza L jest określona z dokładnością do dowolnej potęgi ω , tak więc uogólniony wykładnik skalowania oraz wymiary Rényi są określone z dokładnością do czynnika multiplikatywnego $1/\omega$. Zatem pojawia się pytanie o to jaka definicja bazy L jest najbardziej przydatna do opisu naszego układu. **W tym rozdziale konstruujemy i rozważamy, w ramach naszego modelu MF-CTRW, spektrum**

**lokalnych wymiarów fraktalnych jako kluczową wielkość analizy wielofrak-
talnej.** Wielkość tą uzyskujemy dzięki temu, że w ramach modelu MF-CTRW daje
się łatwo zdefiniować (niezbędną do tego celu) transformację Legendre'a (rzadziej
zwaną 'kontaktową').

Wprowadźmy transformację Legendre'a (tak jak to się zwykle robi) za pomocą
następującego równania

$$f(\eta) = q' \eta - \tau(q'), \quad (6.22)$$

łącącego poszukiwane spektrum (widmo, rozkład) lokalnych wymiarów fraktalnych
(singularności) $f(\eta)$ z uogólnionym wykładnikiem skalowania $\tau(q')$ poprzez syme-
tryczny iloczyn zmiennych,

$$\begin{aligned} \eta(q') &= \frac{d\tau(q')}{dq'}, \\ q' &= \frac{df(\eta)}{d\eta}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Połączenie równań (6.15) - (6.17) oraz (6.22) daje jawną zależność spektrum wy-
miarów lokalnych f oraz zmiennej η od zmiennej niezależnej q' ,

$$\begin{aligned} \eta(q') &= D(q') + (q' - 1)D'(q') \\ &= c + \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0} \right)^\nu \left(1 + \nu \frac{1 + q'_0}{q' + q'_0} \right) \operatorname{sgn}(1 - q'), \\ f(\eta(q')) &= D(q') + q'(q' - 1)D'(q') \\ &= c + \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0} \right)^\nu \left(1 + \nu q' \frac{1 + q'_0}{q' + q'_0} \right) \operatorname{sgn}(1 - q'), \end{aligned} \quad (6.24)$$

gdzie $\nu \stackrel{\text{def.}}{=} 1/(\alpha - 1)$.

Uzgodnienie równania (6.22) z (6.19) wymaga przyjęcia $f(\eta = \eta_{min}) = 0$. Do-
starcza to dodatkowego warunku na parametry modelu MF-CTRW. Korzystając z
drugiego równania w (6.24) otrzymujemy warunek

$$c = \frac{\alpha + q'_0}{\alpha - 1}, \quad (6.25)$$

który jest uzupełnieniem (6.14). Pierwsza zależność w (6.24) nie wprowadza już dla
 $\eta = \eta_{min}$ kolejnych zależności. Oczywiście oba warunki ((6.14) oraz (6.25)) redukują
liczbę wolnych parametrów modelu.

Pomimo uzyskania jawnej zależności f od q' (drugi wiersz w (6.24)), analogiczna
zależność f od η wymaga w ogólności rozwiązania uwikłanego równania przestę-
pnego. To równanie wyprowadzono poprzez połączenie obu równań w (6.24),

$$|\eta - c| = \omega_0 (1 + q'_0) \frac{\left(1 - \frac{f-c}{\eta-c}\right)^\nu}{\left(q'_0 + \frac{f-c}{\eta-c}\right)^{\nu+1}}, \quad \eta \neq c, \quad (6.26)$$

gdzie $\omega_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha^{\alpha/(\alpha-1)}/(\alpha-1)$ oraz $\text{sgn}(f-c) = \text{sgn}(\eta-c) = \text{sgn}(1-q')$. Równanie (6.26) pozwala na wyznaczenie (metodą kolejnych iteracji) zmiennej η jako wklęsłej funkcji f . Tzn. spełniona jest nierówność $f \leq \eta$, przy czym równość $\eta = f$ ma miejsce tylko w jednym punkcie $q' = 1$ (w tym punkcie zachodzi również $\eta = c$). Warto zauważyć, że dla rozwiązania równania (6.26) konieczna jest znajomość stałej kalibrującej q'_0 (jest to rozważane w dalszej części). Dla szczególnego przypadku znikającej stałej kalibrującej, powyższe równanie uzyskuje prostszą postać

$$\eta = f + \omega_0^{-(\alpha-1)} |f - c|^\alpha. \quad (6.27)$$

Z równań (6.26) oraz (6.27) otrzymujemy, dla wielkości zredukowanych według przepisu $\tilde{h} \stackrel{\text{def.}}{=} \omega_0^{-1} h$, odpowiednio, następujące zredukowane relacje,

$$|\tilde{\eta} - \tilde{c}| = (1 + q'_0) \frac{\left(1 - \frac{\tilde{f} - \tilde{c}}{\tilde{\eta} - \tilde{c}}\right)^\nu}{\left(q'_0 + \frac{\tilde{f} - \tilde{c}}{\tilde{\eta} - \tilde{c}}\right)^{\nu+1}}, \quad \tilde{\eta} \neq \tilde{c}, \quad (6.28)$$

oraz

$$\tilde{\eta} = \tilde{f} + |\tilde{f} - \tilde{c}|^\alpha. \quad (6.29)$$

Relacja (6.28) jest wykorzystana poniżej do konstrukcji wykresu przedstawionego na rys. 6.5. Co więcej, równania (6.24) przyjmują następującą postać

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(q') &= \tilde{D}(q') + (q' - 1)\tilde{D}'(q' + q'_0) \\ &= \tilde{c} + \omega_0^{-1} \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0}\right)^\nu \left(1 + \nu \frac{1 + q'_0}{q' + q'_0}\right) \text{sgn}(1 - q'), \\ \tilde{f}(\tilde{\eta}(q')) &= \tilde{D}(q') + q'(q' - 1)\tilde{D}'(q') \\ &= \tilde{c} + \omega_0^{-1} \left(\frac{|1 - q'|}{q' + q'_0}\right)^\nu \left(1 + \nu q' \frac{1 + q'_0}{q' + q'_0}\right) \text{sgn}(1 - q'), \end{aligned} \quad (6.30)$$

która nie jest przez nas dalej wykorzystywana, a którą przytoczyliśmy tutaj dla kompletności; ponadto, baza

$$\tilde{L} \stackrel{\text{def.}}{=} L^{\omega_0} = \exp(\omega_0 b). \quad (6.31)$$

Na rys. 6.5 przedstawiono wykres \tilde{f} w zależności od $\tilde{\eta}$ w oparciu o relację (6.28). Szerokość spektrum singularności (obejmowanego krzywą ciągłą) odpowiada zakresowi $0 < q' < 4 \equiv -1 < q < 3$, dla którego przewidywania modelu MF-CTRW dobrze zgadzają się z przebiegiem krzywej empirycznej $\ln(\langle t^q \rangle / \Gamma(1 + q))$ (patrz rysunki 5.1 oraz 5.2). Jest to zakres najbardziej istotny z punktu widzenia analizy multifraktalności (ponieważ wówczas nieliniowość zależności q -momentów od q jest najbardziej widoczna). Zatem, **model MF-CTRW może być wykorzystany do**

opisu danych empirycznych w zakresie $\tilde{\eta}(q' = 4) < \tilde{\eta} < \tilde{\eta}(q' = 0)$. To ograniczenie pozwala jednak na analizę wystarczająco szerokiego spektrum (gdyż pozostały obszar, obejmowany krzywą przerywaną, jest wąski). **Jest to jeden z argumentów na rzecz użyteczności modelu MF-CTRW do analizy multifrakalnych własności czasów międzytransakcyjnych generowanych przez fluktuacje.** Zauważmy jeszcze, że niektóre tzw. lewostronne multifraktale (których spektrum singularności $f(\eta)$ ma kształt lewej połowy \cap) były już rozważane z matematycznego punktu widzenia w [83], [84] gdzie autorzy badali nawet takie spektra, które posiadały maksimum w $\eta = \infty$.

Innym argumentem, niezwykle istotnym dla tej pracy jest to, że model MF-CTRW jest wystarczająco poprawnym w otoczeniu punktu $q' = 1$, gdzie właśnie rozważane są przemiany fazowe. Niestety spektrum singularności jest na nie nieczułe, dlatego **konieczna jest tutaj analiza przemian fazowych z czysto termodynamicznego punktu widzenia.** W tym celu musimy wykonać kolejny krok.

6.2 Finansowe przemiany fazowe wyższych rzędów

W tym rozdziale zostało pokazane, że dla kontraktów którymi intensywnie obraca się na rynku Forex (np. dla kontraktów na kurs USD/M - dane archiwalne) może występować przemiana fazowa trzeciego i wyższych rzędów⁴ dla $q' \rightarrow 1_{\pm}$ (równoważnie dla $q \rightarrow 0_{\pm}$). Związane jest to z singularnym składnikiem energii swobodnej (patrz Tabela 6.1 oraz równanie (6.15)). Przemianę tą analizujemy dla zakresu $\alpha > 3/2$ ponieważ

- (i) dla danych empirycznych uzyskana (w ramach formalizmu MF-CTRW) wartość parametru α należy do takiego właśnie przedziału (patrz Tabela 5.1),
- (ii) dla takiego zakresu α (poza przypadkiem gaussowskim $\alpha = 2$), jak wykazujemy, pojawia się przemiana fazowa trzeciego rodzaju (patrz równanie (6.34) oraz (6.35) wyprowadzone w rozdz. 6.2.1).

Zauważmy, że dla $\alpha \leq 3/2$ model przewiduje przemiany fazowe jeszcze wyższych rzędów, jednak empiryczne wartości wykładnika α otrzymane dla tego zakresu w niniejszej pracy obciążone są zbyt dużymi błędami statystycznymi aby na ich podstawie wyciągać wiążące wnioski (patrz Tabela III w naszej publikacji [6]).

⁴Zwróćmy uwagę, że termin 'rząd przemiany' oznacza co innego niż termin 'rząd momentu'.

6.2.1 Uwagi dotyczące ciepła właściwego

Nasze rozważania opierają się na dobrze znanych związkach (przedstawionych w Tabeli 6.1) pomiędzy wielkościami termodynamicznymi i multifraktałnymi. Wykorzystując

Tabela 6.1: Związki pomiędzy wielkościami termodynamicznymi i multifraktałnymi.

Termodynamika	Multifraktałność
β	q'
V	$b(= \ln(L))$
$E(\beta)/V$	$\eta(q')$
$\beta F(\beta)/V$	$\tau(q')$
$S(E)/V$	$f(\eta)$
$c_V(\beta)$	$c_b(q')$

te związki można wyprowadzić analogię ciepła właściwego (charakteryzującego fluktuacje) w języku modelu multifraktałnego

$$\begin{aligned}
 c_V(\beta) &= \left(\frac{\partial(E/V)}{\partial T} \right)_V = -T \left(\frac{\partial^2(F/V)}{\partial T^2} \right)_V \\
 &= -\beta^2 \left(\frac{\partial(E/V)}{\partial \beta} \right)_V = -\beta^2 \left(\frac{\partial^2(\beta F/V)}{\partial \beta^2} \right)_V \\
 &\equiv -q'^2 \left(\frac{\partial^2 \tau(q'; b)}{\partial q'^2} \right)_b = \left(\frac{\partial \eta(q'; b)}{\partial (1/q')} \right)_b = c_b(q'). \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy tutaj (i tylko tutaj) jawne indeksowanie wielkości multifraktałnych parametrem b , zaś w wyprowadzeniu skorzystaliśmy z następujących związków termodynamiczno-multifraktałnych

$$E/V = \left(\frac{\partial(\beta F/V)}{\partial \beta} \right)_V \equiv \eta(q') = \frac{d\tau(q')}{dq'}. \quad (6.33)$$

Ostatnia równość w (6.32) jest punktem wyjścia do wyprowadzenia jawnej zależności ciepła właściwego $c(q')$ od q' . Obliczając drugą pochodną $d^2\tau(q')/dq'^2$ (przy użyciu pierwszej równości w (6.15)) otrzymujemy ostatecznie z równania (6.32)

$$c(q') = \nu(\nu + 1) \left(q' \frac{1 + q'_0}{q' + q'_0} \right)^2 \frac{|1 - q'|^{\nu-1}}{(q' + q'_0)^\nu}. \quad (6.34)$$

Wyrażenie to rozbiega się w $q' = 1$ zgodnie z prawem potęgowym $1/|1 - q'|^{1-\nu}$ jedynie dla $\nu < 1$ (równoważnie dla $\alpha > 2$). Możemy je teraz przeanalizować w aspekcie przemian fazowych trzeciego i wyższych rzędów.

Na rys. 6.6 przedstawiono ciepło właściwe (dane równaniem (6.34)) dla $\alpha = 1.754$ i $q'_0 = 1$. Linia ciągła pokazuje przewidywania modelu MF-CTRW w zakresie q' , dla którego dobrze odtwarzane są empiryczne wartości q -momentów. Natomiast linia przerywana oznacza przewidywania (także w ramach modelu MF-CTRW) dla pozostałych wartości q' (patrz rys. 5.1). Szczególnie interesujące jest zachowanie ciepła właściwego w otoczeniu punktu $q' = q'_c = 1$, gdyż tutaj fluktuacje energii (czyli lokalnego wykładnika fraktalnego η) znikają, co (używając luźnej analogii) można traktować jak "oko cyklonu" ("trąby powietrznej" lub "wiru") wewnątrz którego panuje spokój, pomimo ogromnych fluktuacji na jego brzegu.

Poniżej przedstawiamy argumenty mówiące, że mamy tutaj do czynienia z przemianą fazową trzeciego rodzaju - można ją interpretować jako przemianę pomiędzy fazą intensywanego obrotu (dla $q < 0 \equiv q' < 1$) gdzie q -momenty $\langle t^q \rangle$ są zdominowane przez krótkie czasy międzytransakcyjne oraz fazą spokojnego obrotu (dla $q > 0 \equiv q' > 1$), dla którego q -momenty są zdominowane przez długie czasy międzytransakcyjne.

Z równania (6.34) otrzymujemy (dla $q' > 0$)

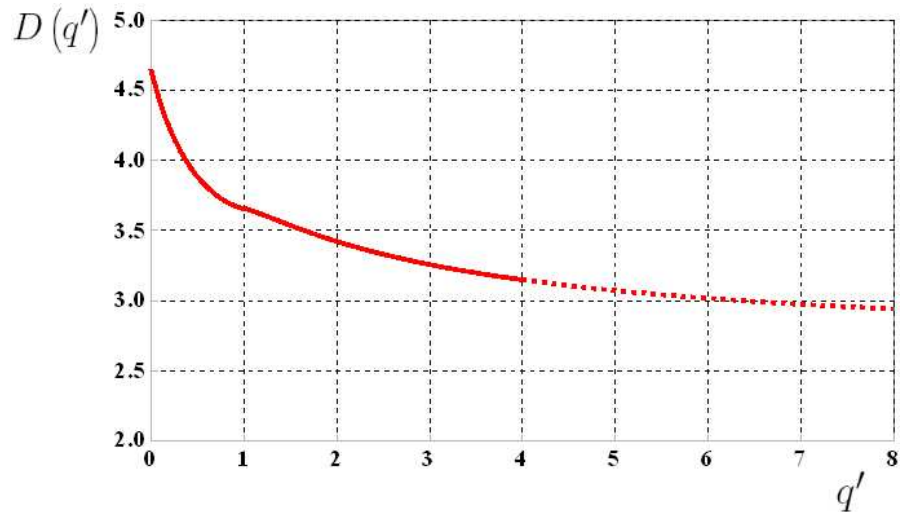
$$\begin{aligned} \frac{dc(q')}{dq'} &= \frac{2}{q'}c(q') - q'^2 \frac{d^3\tau(q')}{dq'^3} \\ &= \operatorname{sgn}(1 - q')\nu(\nu + 1)(1 + q'_0)^2 q' \frac{|1 - q'|^{\nu-2}}{(q' + q'_0)^{\nu+3}} \times \\ &\quad \times \{q' [q' - \nu - (\nu + 1)q'_0] + 2q'_0\}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Na rys. 6.7 przedstawiono przewidywania wyrażenia (6.35) (dla $\alpha = 1.754$ oraz $q'_0 = 1$). Widać, że pierwsza pochodna $\frac{dc(q')}{dq'}$ posiada nieskończoną nieciągłość w punkcie $q' = 1$. Trzecia pochodna energii swobodnej lub (ściślej mówiąc) trzecia pochodna jej nieliniowego, singularnego składnika - patrz równanie (6.15) oraz Tabela 6.1 - jest odpowiedzialna za tę rozbieżną nieciągłość. Dlatego też mówimy tutaj o trzecim rzędzie przemiany fazowej - o przemianie fazowej trzeciego rodzaju.

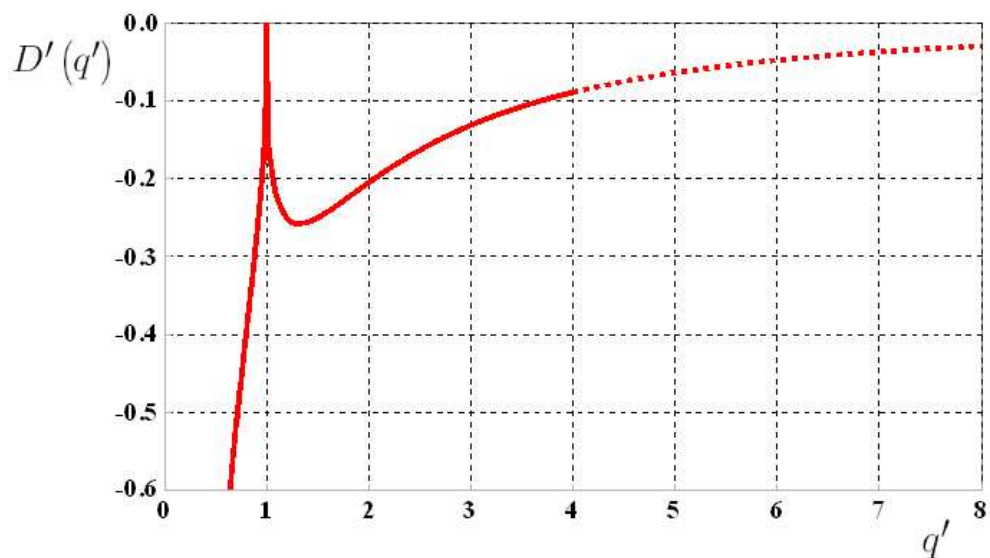
W Tabeli 6.2 przedstawiono podsumowanie dotyczące możliwych przemian fazowych dopuszczalnych w ramach modelu MF-CTRW. Oczywiście, rozpatrując pochodne wyższych rzędów $c(q')$ względem q' można by było przeprowadzić bardziej szczegółową analizę dla zakresu $\alpha \leq 3/2$.

Tabela 6.2: Rzędy możliwych przejść fazowych w $q' = 1$ dla odpowiadających przedziałów parametru α

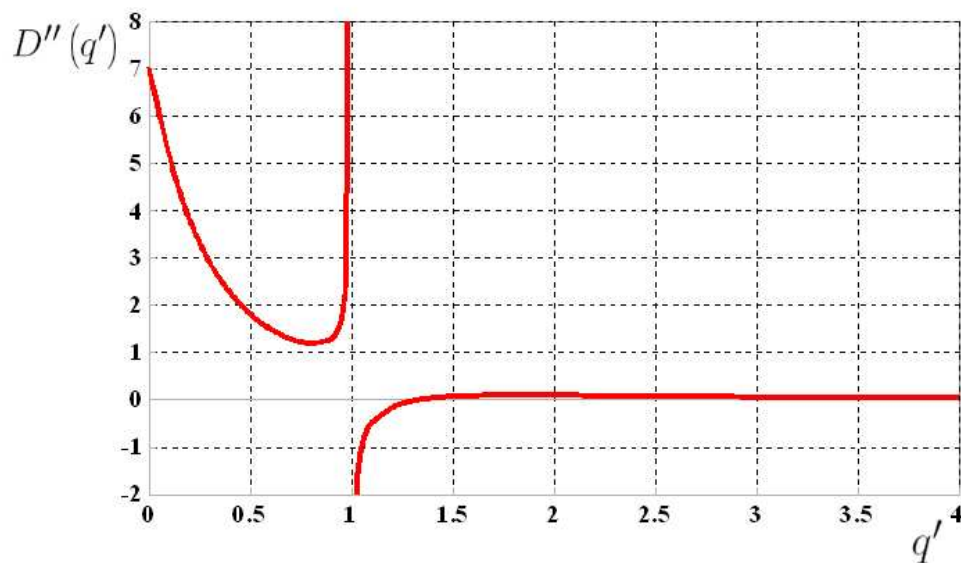
Zakres α	Zakres ν	$c(q' = 1)$	$\frac{dc(q')}{dq'} \Big _{q'=1}$	Przejście fazowe
$\alpha \leq 3/2$	$\nu \geq 2$	ciągłe	ciągłe	przynajmniej piątego rzędu, zależnie od wartości α
$3/2 < \alpha < 2$	$1 < \nu < 2$	ciągłe	nieciągłe & rozbieżne	trzeciego rzędu
$\alpha = 2$	$\nu = 1$	ciągłe	ciągłe	brak przejścia fazowego
$\alpha > 2$	$\nu < 1$	ciągłe & rozbieżne	nieciągłe & rozbieżne	trzeciego rzędu



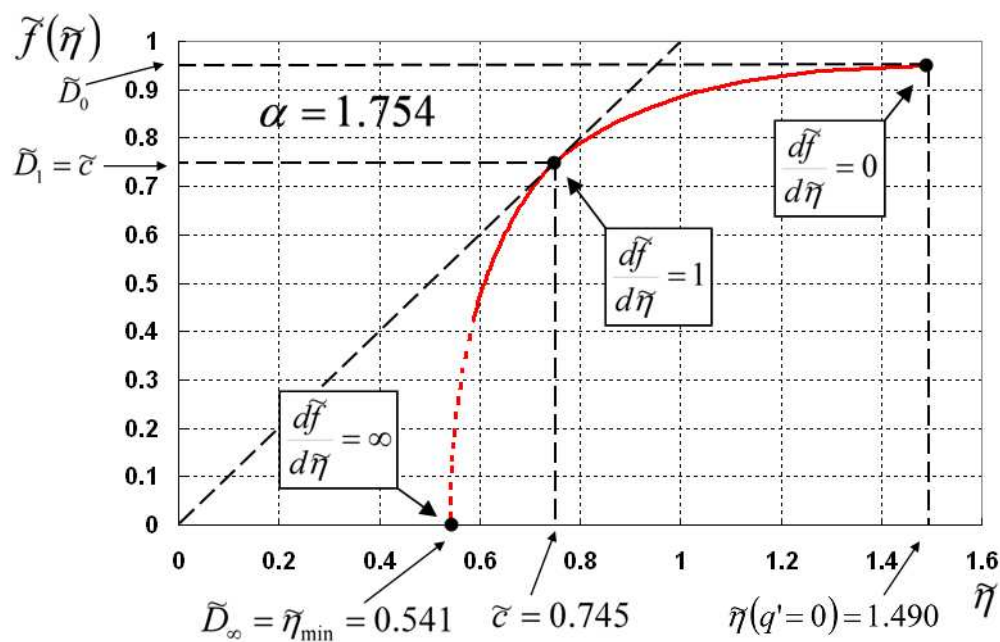
Rysunek 6.2: Wykres zależności wymiarów Rényi $D(q')$ w funkcji $q' (\geq 0)$ określonej równaniem (6.16) dla wykładnika $\alpha = 1.754$ (dotyczącego obrotu kontraktami *futures* na kurs wymiany USD/M) oraz przypadku $q'_0 = 1.0$. $D(q')$ dąży asymptotycznie do stałej $c - 1$, co jest określone przez własność ii) przedstawioną w tym podrozdziale, gdzie wartość stałej c wyznaczono z równania (6.25) (patrz podrozdz. 6.1.2) otrzymując $c = 3.653$. Niewielki (w skali rysunku) **kink na krzywej w punkcie $q' = 1$** sugeruje **nieciągłość $D'(q')$ w tym punkcie**, jako sygnaturę **możliwej singularności**. Właśnie tego typu zachowanie było **bezpośrednią przyczyną badania przeze mnie pochodnych wyższych rzędów wymiarów Rényi a stąd, uogólnionego wykładnika skalowania** pomimo, że on sam takiego kinku nie posiada. Ciągła część krzywej odpowiada (tak jak poprzednio) zakresowi q' , dla którego model MF-CTRW dobrze odtwarza punkty empiryczne, natomiast linia przerywana leży w zakresie, gdzie model ten nie powinien być w zasadzie stosowany. Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7].



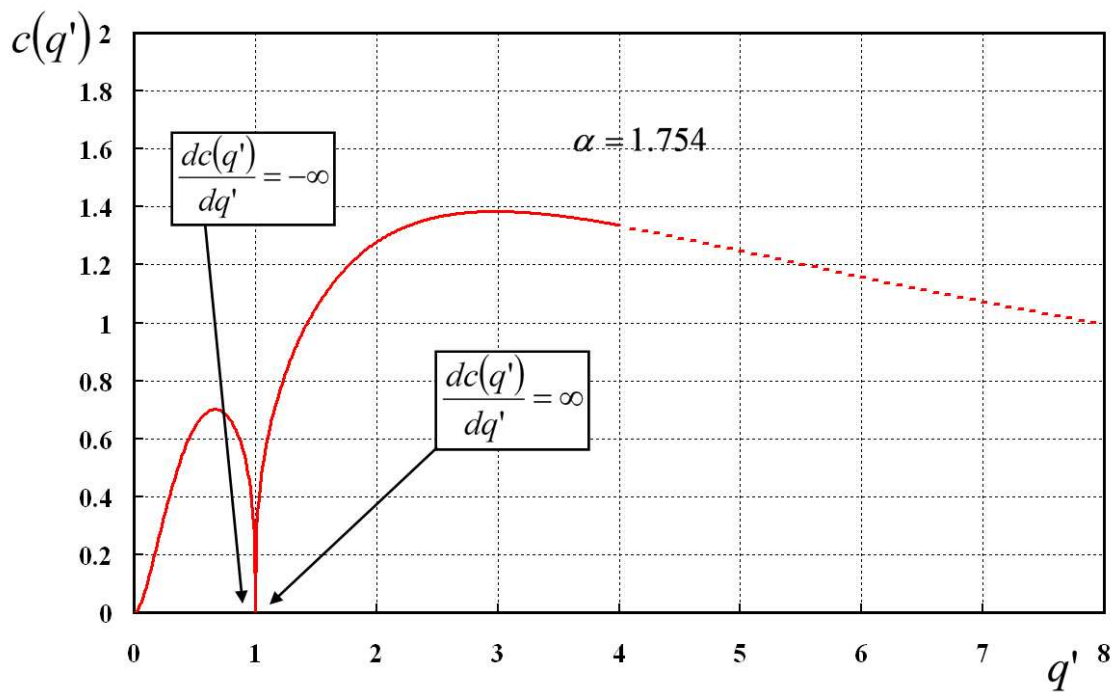
Rysunek 6.3: Pierwsza pochodna wymiaru Rényi $D'(q')$ w funkcji rzędu $q' (> 0)$ dana równaniem (6.17) dla $q'_0 = 1.0$ i wykładnika $\alpha = 1.754$. Szpic, w kształcie ostrza jest centrowany w punkcie $q' = 1$. Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7].



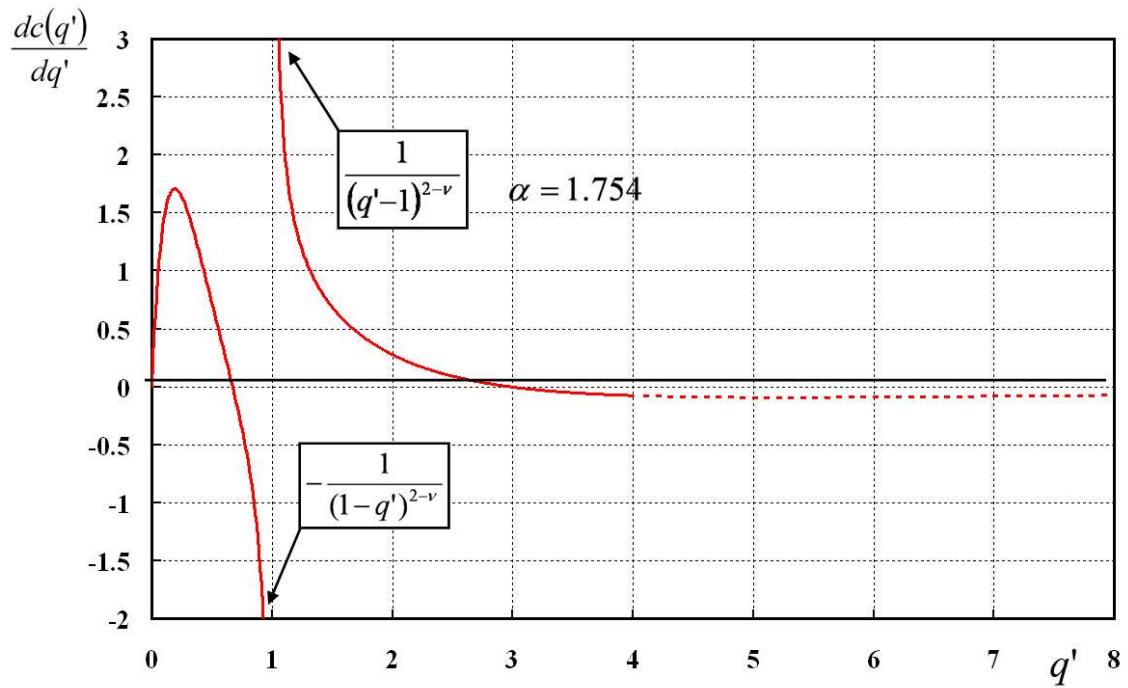
Rysunek 6.4: Druga pochodna wymiaru Rényi $D''(q')$ w funkcji rzędu $q' (\geq 0)$ dana przez równanie (6.18) dla $q'_0 = 1$ oraz wykładnika $\alpha = 1.754$. Znakomicie widoczna jest jej nieciągłość w interesującym nas punkcie $q' = 1$. Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7].



Rysunek 6.5: Spektrum lokalnych wymiarów fraktalnych \tilde{f} (dane przez równanie w (6.28)) w funkcji lokalnego wymiaru fraktalnego $\tilde{\eta}$ dla wykładnika $\alpha = 1.754$ (dotyczącego obrotu kontraktami *futures* na kursie wymiany walut USDM) oraz $q'_0 = 1.0$. Wykres ten odpowiada jedynie dodatnim wartościom q' , tzn. jest ucięty w punkcie $\tilde{\eta}(q' = 0) = 1.490$. Linia ciągła obejmuje następujący obszar $(\tilde{\eta}, \tilde{f})$ stosowalności modelu MF-CTRW a mianowicie: od punktu $(0.586, 0.421)$ dla $q' = 4$ do $(1.490, 0.949)$ dla $q' = 1$. Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7].



Rysunek 6.6: Antyszpic ciepła właściwego $c(q')$ (danego wyrażeniem (6.34)) w funkcji q' (dla $\alpha = 1.754$ oraz $q'_0 = 1$), wskazujący na przemianę fazową trzeciego rodzaju w punkcie $q' = q'_c = 1$ (równoważnie w $q = q_c = 0$), patrz także rys. 6.7. Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7].



Rysunek 6.7: Pierwsza pochodna ciepła właściwego, $\frac{dc(q')}{dq'}$, dana przez wyrażenie (6.35) (dla $\alpha = 1.754$) w funkcji q' , z dobrze widoczną nieciągłością w punkcie $q' = q'_c = 1$ (czyli $q = q_c = 0$) potwierdzającą przemianę fazową 3-go rzędu (patrz rys. 6.6). Wykres zaczerpnięto z naszej pracy [7].

Część IV

Ogólne podsumowanie

W niniejszej pracy udało mi się powiązać ze sobą dwa bogate nurty badawcze:

- jeden oparty na formalizmie Multifraktalnego Błądzenia Przypadkowego w Czasie Ciągłym (MF-CTRW)
- drugi inspirowany wielofraktalnym charakterem losowych struktur i procesów obserwowanych zarówno w naturze jak też w życiu ekonomicznym i społecznym.

W pracy badałem losową, złożoną strukturę czasów "martwych", czyli czasów pomiędzy kolejnymi (szeroko rozumianymi) zdarzeniami wywołanymi, na przykład, pewną ludzką aktywnością. Tak rozumiane czasy stanowią w moim ujęciu zasadniczy miernik temperamentu poszczególnych uczestników gry (np. rynkowej czy ogólniej społeczno-ekonomicznej). Wraz z wolumenem ilościowym i wartościowym zdarzeń dostarczają one zasadniczej informacji dotyczącej aktywności tych uczestników. Podstawowym narzędziem umożliwiającym wspomniane badania był, uogólniony przeze mnie w publikacji [6] i przedstawiony w niniejszej pracy, formalizm MF-CTRW o szerokim przeznaczeniu. Umożliwia on analizę statystycznych i termodynamicznych własności różnorodnych układów zarówno w ramach nauk matematyczno-przyrodniczych jak też społeczno-ekonomicznych.

W niniejszej pracy formalizm MF-CTRW został (w ramach poszerzonego modelu dolinowego) wykorzystany do przeprowadzenia badań w dwóch różnych kierunkach, tzn.

- a) do odtworzenia na alternatywnej, oryginalnej drodze zasadniczych wyników teorii kolejek, z których potęgowy zanik w czasie rozkładu czasów oczekiwania (PTD), np. na realizację zadań, zasługuje na szczególne podkreślenie; dodam, że wykładnik potęgi jest tutaj jawnie zależny od parametrów termodynamicznych (lub ich analogii).
- b) do potwierdzenia wielofraktalności losowej struktury czasów międzytransakcyjnych na różnych rynkach (tzn. na różnych giełdach i na Forexie), czyli
 - nieliniowej zależności logarytmu q -momentów czasów międzytransakcyjnych od rzędu q w jego szerokim zakresie (wskazanym także przez innych badaczy) a stąd przedstawienie tych momentów w postaci skalującej się i zawierającej singularność oraz
 - wyrażenie, również w postaci skalującej się i zawierającej singularność, uogólnionej q -sumy statystycznej
- c) do wykorzystania dzięki temu (poprzez użycie transformacji Legendre'a) formalizmu termodynamiki równowagowej a stąd znalezienie analogii przemian

fazowych wyższych rzędów, przy czym w niniejszej w pracy dokładniej zbadałem przemianę fazową trzeciego rodzaju odkrytą na Forexie, przykładowo, dla kontraktów terminowych *futures* na archiwalny kurs wymiany USDM.

Przemiany fazowe wyższych rzędów są rzadkim zjawiskiem w naturze, a - według mojej wiedzy - na rynku finansowym zostały znalezione po raz pierwszy przez nas. Rząd przemiany fazowej może służyć klasyfikacji globalnej miary ryzyka. Mianowicie nieciągłość - zawsze zwiększająca ryzyko - jest dla wyższych rzędów trudniej osiągalna. A zatem aktywność inwestorów może być wtedy bardziej intensywna i mniej ryzykowna. Jeśli inwestor jest zainteresowany mniej ryzykownymi aktywami, to powinien unikać takich aktywów, których dynamika jest opisana szeregami czasowymi zawierającymi informacje o najniższych (pierwszego lub drugiego) rzędu przemianach fazowych, natomiast pozostawiać w portfelu aktywa, które można scharakteryzować przemianami fazowymi wyższych rzędów (mówimy tutaj tylko o przemianach fazowych pomiędzy fazami wysoko- i niskoczęstotliwościowymi, jakie zostały zaobserwowane).

Przypuszczam, że wyniki przedstawione w niniejszej pracy mogą stanowić inspirację dla rozważań dotyczących nie tylko dynamiki samego instrumentu, ale również i) szybkości jego zmian - pierwszej pochodnej, ii) przyspieszenia (drugiej pochodnej) i iii) szarpnięcia (trzeciej pochodnej). W szczególności powinny być rozważane zmienności i korelacje wyższych rzędów.

Można stwierdzić, że dzięki wykorzystaniu Hipotezy Mieszania Rozkładów udało się skonstruować za pomocą superstatystyki podstawowy rozkład modelu, czyli PTD, w formie prowadzącej zarówno do zamkniętej postaci q -momentów jak też q -sumy statystycznej. Zasadniczym elementem tej superstatystyki było jądro całkowe zaproponowane w postaci funkcji rozciągnięty eksponens (będącej uogólnieniem wcześniej używanych zarówno rozkładu wykładniczego jak też rozkładu Gaussa).

Nasze podejście można traktować jako komplementarne do powszechnie używanej techniki Multifraktalnej Analizy Detrendowanych Fluktuacji (MF-DFA). Pomimo tego, że w obu podejściach kształty uogólnionego wykładnika skalowania są zbliżone, to znalezienie związku pomiędzy naszym podejściem a MF-DFA pozostaje nadal wyzwaniem ze względu na nierozstrzygnięte zagadnienie związku pomiędzy funkcją podziału q -tego rzędu w ramach MF-CTRW a funkcją fluktuacyjną odpowiedniego rzędu w metodzie MF-DFA; tego typu odpowiedniość znaleziono tylko w szczególnym przypadku metody DFA (ang. *Detrended Fluctuation Analysis*) oraz monofraktalnej kaskady multiplikatywnej.

Część V

Dodatki

Dodatek A

Obliczenie całki $I_0(q)$

Chcemy obliczyć całkę (3.23), którą zapisujemy w postaci

$$I_0(q) = \lambda^{1/\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda h(x)} dx \quad (\text{A.1})$$

gdzie

$$h(x) = |x|^\alpha - qx, \quad (\text{A.2})$$

dla $\alpha > 1$. Dla wystarczająco dużych wartości λ możemy dokonać przybliżenia całki metodą punktu siodłowego (SPA) [85]. Dokonując rozwinięcia $h(x) = h(x_0) + (1/2)h''(x_0)(x - x_0)^2 + O[(x - x_0)^3]$ i obliczając wynikającą stąd całkę o postaci gaussowskiej otrzymujemy,

$$I_0(q) = \lambda^{1/\alpha} \left[\frac{2\pi}{\lambda h''(x_0)} \right]^{1/2} e^{-[\lambda h(x_0) + O(\lambda^{-1/2})]}, \quad (\text{A.3})$$

gdzie w punkcie x_0 funkcja $h(x)$ posiada lokalne ekstremum. Tzn. x_0 jest rozwiązaniem równania

$$h'(x_0) = \alpha|x_0|^{\alpha-1}\text{sgn}(x_0) - q = 0.$$

Rozwiązanie to jest postaci:

$$\alpha|x_0|^{\alpha-1}\text{sgn}(x_0) = q. \quad (\text{A.4})$$

Korzystając z tożsamości $q = |q|\text{sgn}(q)$ możemy przepisać równanie (A.4) jako

$$\frac{\alpha|x_0|^{\alpha-1}}{|q|} = \frac{\text{sgn}(q)}{\text{sgn}(x_0)}.$$

Ponieważ lewa strona tego równania jest dodatnia, więc $\text{sgn}(x_0) = \text{sgn}(q)$. Wówczas,

$$|x_0| = \left(\frac{|q|}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \quad (\text{A.5})$$

a stąd,

$$x_0 = (q/\alpha)^{1/(\alpha-1)}$$

dla $q > 0$ oraz

$$x_0 = -(-q/\alpha)^{1/(\alpha-1)}$$

gdy $-1 < q < 0$.

Biorąc pod uwagę fakt, że druga pochodna $h''(x_0) = \alpha(\alpha - 1)|x_0|^{\alpha-2}$, tzn.

$$h''(x_0) = \alpha(\alpha - 1) \left(\frac{|q|}{\alpha} \right)^{(\alpha-2)/(\alpha-1)} > 0 \quad (\text{A.6})$$

jest zawsze dodatnia, możemy stąd wnioskować, że x_0 jest lokalnym minimum funkcji $h(x)$.

Z drugiej strony, pamiętając o tym, że x_0 ma taki sam znak jak q , możemy przepisać $h(x_0)$ w następującej postaci

$$h(x_0) = |x_0|^\alpha - |q||x_0|.$$

Korzystając z równania (A.5) otrzymujemy

$$h(x_0) = -(\alpha - 1) \left(\frac{|q|}{\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} < 0. \quad (\text{A.7})$$

Ostatecznie poszukiwana całka (A.1), po uwzględnieniu wyrażeń pomocniczych (A.7) i (A.6), przyjmuje postać

$$I_0(q) \simeq A(q) \exp\left(b|q|^{\alpha/(\alpha-1)}\right), \quad (\text{A.8})$$

gdzie wolnozmienny czynnik przedwykładniczy

$$A(q) = \lambda^{1/\alpha} \left[\frac{2\pi}{\lambda\alpha(\alpha-1)} \right]^{1/2} \left(\frac{|q|}{\alpha} \right)^{(2-\alpha)/2(\alpha-1)}, \quad (\text{A.9})$$

i (w połączeniu z równaniem (3.24)) otrzymujemy

$$b = \frac{\lambda(\alpha-1)}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}} = (\alpha-1) \left(\frac{\beta\sigma}{\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha-1)}. \quad (\text{A.10})$$

Tym samym, uzyskaliśmy zależność całki $I_0(q)$ od dwóch singularności: 1) jednej tkwiącej w zależności całki od rzędu momentu q i 2) drugiej danej zależnością od iloczynu β i dyspersji zmiennej losowej ε proporcjonalnej do σ .

Dodatek B

Obliczenie całki $I(q)$

Używając SPA (analogicznie jak w Dodatku A) obliczamy (dla $q > -1$) całkę zdefiniowaną w (5.10)

$$I(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{|\varepsilon - \mu|}{\sigma}\right)^\alpha + q\beta\varepsilon\right) d\varepsilon. \quad (\text{B.1})$$

w zamkniętej postaci. Obliczenie to prowadzimy pomimo, że w istocie jest ono analogiczne do tego, przeprowadzonego dla całki $I_0(q)$ w Dodatku A. Chodzi o to aby nie popełnić błędu związanego ze stałymi, gdyż używamy tutaj nieco odmiennej parametryzacji całki.

W pierwszej kolejności dokonujemy zamiany zmiennej ε na ξ w następujący sposób

$$\kappa \xi = \frac{\varepsilon - \mu}{\sigma}, \quad (\text{B.2})$$

gdzie nieznanymi dodatni parametry κ jest określony poniżej. Z równań (B.1) oraz (B.2) otrzymujemy,

$$I(q) = \kappa\sigma \exp(q\beta\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\kappa^\alpha |\xi|^\alpha + q\kappa\beta\sigma\xi\right) d\xi. \quad (\text{B.3})$$

Niech κ spełnia następującą zależność: $\kappa^\alpha = \kappa\beta\sigma$ skąd, przy założeniu $\alpha > 1$ otrzymujemy, że $\kappa = (\beta\sigma)^{1/(\alpha-1)}$. Stąd, równanie (B.3) zapisujemy jako

$$I(q) = \kappa\sigma \exp(q\beta\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda h(\xi)) d\xi, \quad (\text{B.4})$$

gdzie parametr $\lambda = (\beta\sigma)^{\alpha/(\alpha-1)}$, zaś funkcja $h(\xi) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} |\xi|^\alpha - q\xi$. Możemy w tym miejscu skorzystać z rozwinięcia kwadratowego

$$h(\xi) \approx h(\xi_0) + \frac{1}{2} h''(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2 \quad (\text{B.5})$$

wokół minimum ξ_0 (zgodnie z metodą SPA). W powyższym wzorze druga pochodna ma postać

$$h''(\xi_0) = \frac{1}{2} \alpha(\alpha - 1) |\xi_0|^{\alpha-2} (> 0), \quad (\text{B.6})$$

natomiast pierwsza:

$$h'(\xi_0) = \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sgn}(\xi_0) |\xi_0|^{\alpha-1} - q = 0, \quad (\text{B.7})$$

co określa ξ_0 jako minimum jedynie wtedy, gdy znak ξ_0 jest takim sam jak q . Ale przecież punkt ξ_0 można zawsze tak dobrać. Zatem, z drugiej równości w (B.7) mamy,

$$|\xi_0| = \left(\frac{2|q|}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)}; \quad (\text{B.8})$$

Zauważmy, że $h(\xi)$ znika dla $\xi = \xi_1 = 0$ oraz $|\xi| = |\xi_2| = (2|q|)^{1/(\alpha-1)}$, natomiast pomiędzy nimi przyjmuje wartości ujemne¹, przykładowo

$$h(\xi_0) = -2^{1/(\alpha-1)}(\alpha - 1) \left(\frac{|q|}{\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} < 0 \quad (\text{B.9})$$

oraz

$$h''(\xi_0) = \frac{1}{2} \alpha(\alpha - 1) \left(\frac{2|q|}{\alpha} \right)^{(\alpha-2)/(\alpha-1)} > 0. \quad (\text{B.10})$$

Podstawiając wyrażenia (B.10), (B.9) oraz (B.5) do (B.4) otrzymujemy (po obliczeniu całki gaussowskiej i dokonaniu prostych przekształceń algebraicznych):

$$\begin{aligned} I(q) &\approx \sigma \lambda^{-1/2+1/\alpha} \left(\frac{2\pi}{\alpha(\alpha-1)} \right)^{1/2} \left(\frac{|q|}{\alpha} \right)^{(2-\alpha)/2(\alpha-1)} \times \\ &\times \exp\left(q\beta\mu + b|q|^{\alpha/(\alpha-1)}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

gdzie

$$b = 2^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}} \lambda = 2^{1/(\alpha-1)}(\alpha-1) \left(\frac{\beta\sigma}{\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad (\text{B.12})$$

przy czym do wyprowadzenia drugiej równości zastosowaliśmy definicję parametru λ . Podstawiając równanie (B.12) do (5.6) otrzymujemy ostatecznie poszukiwane wyrażenie

$$\langle t^q \rangle \approx A(q) \tau_0^q \Gamma(1+q) L^{q\beta\mu/b+|q|^{\alpha/(\alpha-1)}}, \quad (\text{B.13})$$

¹Zakładamy tutaj, że znak ξ_2 jest taki sam jak q - jest to spójne z poprzednim założeniem mówiącym o tym, że znak ξ_0 powinien być taki sam jak znak q .

gdzie zależny od q czynnik przedwykładniczy przybiera postać

$$A(q) = \frac{1}{2^{1+1/\alpha}} \frac{|q|^{(2-\alpha)/2(\alpha-1)}}{\Gamma(1+1/\alpha)} \left(\frac{2\pi}{\lambda(\alpha-1)} \right)^{1/2} \frac{\lambda^{1/\alpha}}{\alpha^{1/2(\alpha-1)}}, \quad (\text{B.14})$$

natomiast baza L jest zdefiniowana jako

$$L \stackrel{\text{def.}}{=} \exp(b). \quad (\text{B.15})$$

Ostatecznie, z (B.13) znajdujemy wyrażenie na odpowiednio znormalizowany q -moment czasów międzytransakcyjnych

$$\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)} \approx \tau_0^q L^{q\beta\mu/b+|q|^{\alpha/(\alpha-1)}}. \quad (\text{B.16})$$

Dodatek C

Obliczenie całki $J(q')$

W tym dodatku przedstawiamy obliczenia (ponownie korzystając z SPA) prowadzące do uzyskania jawnego wyrażenia na całkę postaci

$$J(q') = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{q'}{2} |y|^\alpha + \beta\sigma(1-q')y\right) \quad (\text{C.1})$$

a tym samym na uogólnioną funkcję podziału

$$Z(q') \approx N_{q'} \exp(\beta(1-q')\mu) J(q'), \quad (\text{C.2})$$

gdzie czynnik

$$N_{q'} = \frac{1}{q'} M^{1-2q'}, \quad (\text{C.3})$$

a współczynnik

$$M = 2^{1+1/\alpha} \Gamma(1 + 1/\alpha). \quad (\text{C.4})$$

W celu obliczenia całki (C.1) dokonujemy w pierwszej kolejności zamiany zmiennej y , mianowicie podstawiając $y = \kappa x$ (gdzie $\kappa > 0$ jest stałą obliczoną poniżej) otrzymujemy wyrażenie

$$J(q') = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\frac{q'}{2} |\kappa x|^\alpha - \text{sgn}(1-q')\kappa\beta\sigma |1-q'| |x|\right]\right\} dx. \quad (\text{C.5})$$

Przyjmując, że współczynniki przy obu potęgach x są równe, otrzymujemy na tej drodze, że stała

$$\kappa = \left[2 \frac{\beta\sigma |1-q'|}{q'}\right]^{1/(\alpha-1)}. \quad (\text{C.6})$$

Zatem, całka $J(q')$ przyjmuje postać

$$J(q') = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{q' \kappa^\alpha}{2} h(x) \right] dx, \quad (\text{C.7})$$

gdzie

$$h(x) = |x|^\alpha - \text{sgn}(1 - q')x. \quad (\text{C.8})$$

Na tym etapie można przeprowadzić oba kroki metody SPA (analogicznie do odpowiednich kroków przeprowadzonych w Dodatkach A i B przy obliczaniu, odpowiednio, całki $I_0(q)$ oraz $I(q)$),

i) rozwinięcie paraboliczne funkcji $h(x)$ wokół jej punktu minimum x_0 ,

$$h(x) \approx h(x_0) + \frac{1}{2} h''(x_0) (x - x_0)^2, \quad (\text{C.9})$$

gdzie

$$x_0 = \frac{\text{sgn}(1 - q')}{\alpha^{1/(\alpha-1)}} \quad (\text{C.10})$$

natomiast,

$$\begin{aligned} h(x_0) &= \frac{1}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}} - \frac{1}{\alpha^{1/(\alpha-1)}} = -\frac{\alpha-1}{\alpha^{\alpha/(\alpha-1)}} < 0, \\ h''(x_0) &= \alpha(\alpha-1) |x_0|^{\alpha-2} = (\alpha-1) \alpha^{1/(\alpha-1)} > 0, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

a następnie,

ii) obliczenie całki gaussowskiej, opartej na kwadratowym członie rozwinięcia funkcji $h(x)$ jako przybliżenie $J(q')$, mianowicie

$$\begin{aligned} J(q') &\approx \kappa \exp \left[-\frac{q'}{2} \kappa^\alpha h(x_0) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{q' \kappa^\alpha}{4} h''(x_0) (x - x_0)^2 \right] dx \\ &= \frac{2\kappa\sqrt{\pi}}{\sqrt{q' \kappa^\alpha h''(x_0)}} \exp \left[-\frac{q' \kappa^\alpha}{2} h(x_0) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Ostatecznie, podstawiając wyrażenia (C.11) do (C.12) oraz używając κ danego wyrażeniem (C.6) otrzymujemy,

$$\begin{aligned} J(q') &= \left(\frac{2\pi}{\alpha-1} \right)^{1/2} \left[\frac{2}{\alpha} (\beta\sigma)^{2-\alpha} \right]^{1/2(\alpha-1)} \left(\frac{|1 - q'|^{2-\alpha}}{q'} \right)^{1/2(\alpha-1)} \\ &\times \exp \left[b \left(\frac{|1 - q'|^\alpha}{q'} \right)^{1/(\alpha-1)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Korzystając z ostatniego wiersza w wyrażeniu (6.9), otrzymujemy uogólnioną funkcję podziału

$$Z(q') \approx N_{q'} \left(\frac{2\pi}{\alpha - 1} \right)^{1/2} \left[\frac{2}{\alpha} (\beta\sigma)^{2-\alpha} \right]^{1/2(\alpha-1)} \left(\frac{|1 - q'|^{2-\alpha}}{q'} \right)^{1/2(\alpha-1)} \times \\ \times \exp \left[\beta\mu(1 - q') + b \left(\frac{|1 - q'|^\alpha}{q'} \right)^{1/(\alpha-1)} \right]. \quad (\text{C.14})$$

Aby otrzymać znormalizowaną postać $Z(q')$ (tzn. funkcję podziału spełniającą (6.3)) należy zaniedbać część czynnika stojącego na początku równania (C.14); zatem ostateczne przybliżenie dla funkcji podziału przybiera postać

$$Z(q') \approx M^{1-q'} q'^{(1-2\alpha)/2(\alpha-1)} \exp \left[\beta\mu(1 - q') + b \left(\frac{|1 - q'|^\alpha}{q' + q'_0} \right)^{1/(\alpha-1)} \right], \quad (\text{C.15})$$

gdzie stała kalibracji q'_0 powinna zostać wyznaczona na podstawie warunku samozgodności zaproponowanego podejścia lub powinna wynikać z porównania predykcji formalizmu z danymi empirycznymi - problem ten jest rozważany w rozdziale 6.1. Poza warunkiem normalizacji otrzymanym z (C.15), powyższy wzór przyjmuje dla $\alpha = 2$ postać wyznaczoną przez gaussowskie jądro całkowe $\rho(\varepsilon)$. W takim przypadku można przeprowadzić niezależnie dokładne obliczenia (bez korzystania z przybliżonej metody SPA) - wtedy oba wyniki pokrywają się ze sobą, jak być powinno.

Dodatek D

Informacja Rényi na jednostkę objętości i wymiar graniczny

Rozważmy tzw. informację Rényi, $Y(q')$, rzędu q' na jednostkę objętości zdefiniowaną następująco [82],

$$\begin{aligned} \frac{Y(q')}{V} &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{V} \frac{\ln(Z(q'))}{q' - 1} = \frac{1}{V(q' - 1)} \ln \left(\frac{1}{\theta^{q'-1}} \sum_i p_i^{q'} \right) \\ &\approx -\frac{1}{V} R(q') - \frac{1}{q' - 1} \tau(q') = \frac{1}{V} \frac{\ln(B(q'))}{q' - 1} - D(q'), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

gdzie objętość¹ V oznacza tutaj rozmiar obszaru zdefiniowanego poprzez zasięg fluktuacji. W powyższym wzorze wykorzystano skalującą postać uogólnionej funkcji podziału daną przez równanie (6.12) oraz uogólniony wykładnik skalowania $\tau(q')$ oraz wymiary Rényi $D(q')$ dane, odpowiednio, przez wyrażenia (6.15) i (6.16) ($B(q')$ jest czynnikiem przedwykładniczym w wyrażeniu (6.13)). Zredukowana informacja Rényi $R(q')$ jest zdefiniowana jako

$$R(q') = -\frac{\ln(B(q'))}{q' - 1}. \quad (\text{D.2})$$

Ponadto, czynnik $B(q')$, uogólniony wykładnik skalowania $\tau(q')$, wymiary Rényi $D(q')$ oraz zredukowana informacja $R(q')$ są niezależne od skali L , jak być powinno².

Używając równań (6.13) oraz (6.14), pierwszy składnik po prawej stronie w równaniu (D.1) można zapisać w jawnej postaci:

$$\frac{Y(q')}{V} = -\frac{1}{V} \ln(M) + \frac{1}{V} \frac{1 - 2\alpha}{2(\alpha - 1)} \frac{\ln(q')}{q' - 1} - D(q'). \quad (\text{D.3})$$

¹Mówiąc tutaj o objętości mamy na myśli $V \stackrel{\text{def.}}{=} \ln L = b$.

²Dopuszczenie wolnozmiennnej zależności byłoby też w zasadzie możliwe, ale taki bardziej skomplikowany przypadek nie jest tutaj rozważany.

Wyrażenie (D.3) składa się z dwóch różnych części: pierwszej będącej sumą dwóch składników znikających w granicy gigantycznych fluktuacji $V \rightarrow \infty$ oraz drugiej (trzeci składnik), singularnej, niezależnej od V (patrz (6.16)). Druga część jest odpowiedzialna za własności termodynamiczne układu. W szczególności, dla $q' \rightarrow 1$ (wtedy obserwowana jest przemiana fazowa - patrz rozdz. 6.2) składnik logarytmiczny zanika (ponieważ $\ln(q')/(q' - 1) \rightarrow 1$) i czynnikiem dominującym w $D(q')$ jest czynnik singularny.

Wyrażenie w postaci (D.3) jest przydatne do analizy asymptotycznej granicy $q' \rightarrow \infty$. W takiej granicy otrzymujemy (z (D.3), (D.1), (6.1) oraz z (6.16)), że

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{p_{\underline{i}}^{max}}{\Delta_t \Delta_\varepsilon / \gamma_0 \sigma} \right) &= -D(q' \rightarrow \infty) \ln(L) = -(c - 1) \ln(L) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \eta_{min} \stackrel{\text{def.}}{=} D(q' \rightarrow \infty) = c - 1, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

gdzie wykorzystano warunek (6.14), natomiast $p_{\underline{i}}^{max}$ oznacza największą wartość prawdopodobieństwa pośród wszystkich prawdopodobieństw $\{p_{\underline{i}}\}_{\underline{i}}$ (użytych w równaniach (6.1) i (D.1)), co odpowiada najmniejszej wartości indeksu skalowania η_{min}

$$p_{\underline{i}}^{max} \sim L^{-\eta_{min}}. \quad (\text{D.5})$$

Wymiar Rényi $D(q' = \infty) = \eta_{min}$ jest najmniejszym wymiarem granicznym (patrz własność ii) w rozdz. 6.1.1). Z drugiej strony górny wymiar graniczny $D(q' = -\infty)$ nie może być wyznaczony, ponieważ w naszym modelu MF-CTRW dostępny jest jedynie obszar $q' > 0$.

Jak widać, dla granicznej wartości q' uogólniona funkcja podziału jest zdominowana przez $p_{\underline{i}}^{max}$, co oznacza zachowanie monofraktalne. Nie ma to jednak większego znaczenia, gdyż w ramach modelu MF-CTRW ograniczeni jesteśmy do zakresu $q < q_{ip}^1$ (patrz rys. (5.1)). Dla dużych wartości q' dysponujemy jedynie formułą heurystyczną (równanie 5.27) przewidującą oczekiwane zachowanie liniowe.

Dodatek E

Dalsze przydatne własności spektrum singularności

Poniżej wyznaczam spektrum singularności $f(\eta)$ dla kilku charakterystycznych wartości wykładników η (patrz rys. 6.5), co pozwala na lepsze poznanie zależności f od η .

E.1 Przypadek $q' \rightarrow \infty$

Przyjmując $q' \rightarrow \infty$ oraz zestawiając ze sobą równania (6.19) i (6.22) otrzymujemy (patrz rys. 6.5),

$$f(\eta_{min}) = 0. \quad (\text{E.1})$$

Wykorzystując dodatkowo drugie równanie w (6.24) można pokazać, że

$$\eta_{min} = c - 1 = \nu(1 + q'_0) \Leftrightarrow c \left(= \frac{\beta\mu}{b} \right) = 1 + \nu(1 + q'_0) = \frac{\alpha + q'_0}{\alpha - 1}, \quad (\text{E.2})$$

co prowadzi do

$$\tilde{\eta}_{min} = \tilde{c} - \omega_0^{-1} = \alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}(1 + q'_0) \Leftrightarrow \tilde{c} = \alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}(\alpha + q'_0). \quad (\text{E.3})$$

Oczywiście do jednoznacznego obliczenia $\tilde{\eta}_{min}$ oraz \tilde{c} konieczne jest znalezienie parametru kalibracji q'_0 .

Związek (E.2), zapisany w postaci

$$\beta\mu = \frac{\alpha + q'_0}{\alpha - 1} b \quad (\text{E.4})$$

w połączeniu z (5.20) może być postrzegany jako uogólniona statyczna, singularna (fraktalna) wersja związku fluktuacyjno-dyssypacyjnego. Dla szczególnego przypadku (gaussowskiego, gdy $\alpha = 2$ oraz $q'_0 = 0$) staje się on standardowym związkiem fluktuacyjno-dyssypacyjnym.

Równanie (E.4) dostarcza prostego (choć nieliniowego) związku pomiędzy dwiema bazami

$$l = L^{\frac{\alpha+q'_0}{\alpha-1}} \Leftrightarrow \frac{\langle t \rangle_l}{\gamma_0} = \left(\frac{\langle t \rangle}{\langle t \rangle_l} \right)^{\frac{\alpha+q'_0}{\alpha-1}}. \quad (\text{E.5})$$

A zatem, wyrażenie (5.25) może mieć bardziej konkretną postać od przedstawionej w pracy [6]. Mianowicie, poprzez podstawienie drugiej zależności w (E.5) do wyrażenia (5.25) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\langle t^q \rangle}{\Gamma(1+q)} = \gamma_0^q \left(\frac{\langle t \rangle}{\langle t \rangle_l} \right)^{\zeta(q)}, \quad (\text{E.6})$$

gdzie wykładnik

$$\zeta(q) = \frac{\alpha + q'_0}{\alpha - 1} q + |q|^{\alpha/(\alpha-1)} \quad (\text{E.7})$$

jest nieliniową (singularną), wklęsłą funkcją q , co potwierdza konieczność rozważania losowej struktury czasów międzytransakcyjnych jako multifraktalnej. Zauważmy, że taka postać multifraktalności zależy od własności skalowania q -momentów czasów międzytransakcyjnych, gdzie baza posiada dobrze zdefiniowaną fizyczną interpretację. Ten typ skalowania (rozważany w rozdz. 6.1) można nazwać wewnętrznym (czy też parametrycznym). Jednakże baza może zostać określona jedynie z dokładnością do dowolnej potęgi ω (w naszym przypadku $\omega = \omega_0$), a zatem wykładnik skalowania (E.7) jest określony z dokładnością do czynnika multiplikatywnego $1/\omega$. Ta własność była wykorzystana np. w rozdz. 6.1.2 do wyprowadzenia wygodniejszej postaci spektrum singularności.

Warto zauważyć, że jednym z głównych celów rozważań przeprowadzonych w rozdz. 6.1 było uzyskanie zależności (E.4). Wykorzystując tę zależność oraz dysponując stałą q'_0 , można znaleźć wartości parametrów: kalibracji τ_0 , przesunięcia $\beta\mu$, dyspersji $\beta\sigma$ oraz $\sigma_{\beta\varepsilon}$ otrzymanych z wartości wykładnika kształtu α oraz połączonych wartości parametrów a oraz b (przedstawionych w Tabeli 5.1 dla zakresu $0 \leq q \leq 3$). Wartości tak uzyskanych parametrów przedstawiono w Tabeli E.1. Widać, że np. dla $2\langle\beta\varepsilon\rangle (= \beta\mu) < \sigma_{\beta\varepsilon}$, co oznacza, że zmienna losowa $\beta\varepsilon$ jest, w praktyce, zmienną zdelokalizowaną - jest to spójne z faktem obserwowanego na rynku Forex intensywnego obrotu kontraktami dla szerokiego zakresu wolumenów transakcji (patrz [60] i odnośniki tamże).

Tabela E.1: Wartości parametrów otrzymanych na podstawie Tabeli 5.1 dla zakresu $0 \leq q \leq 3$, dzięki formule (E.4).

q'_0	τ_0	$\beta\mu$	$\beta\sigma$	$\sigma_{\beta\varepsilon}$
0.0	11.9460 ± 1.3284	0.5276 ± 0.1002	0.7497 ± 0.3388	1.1230 ± 0.5649
1.0	8.846 ± 1.3692	0.8284 ± 0.1438	0.7497 ± 0.3388	1.1230 ± 0.5649

E.2 Przypadek $q' = 1$

Z równań (6.16), (6.24) oraz (6.30) otrzymujemy następujące wyrażenie dla wymiaru informacyjnego Rényi (zdefiniowanego jako $D(q' = 1)$)

$$\begin{aligned} D(q' = 1) &= \eta(q' = 1) = f(\eta(q' = 1)) = c \\ \Leftrightarrow \tilde{D}(q' = 1) &= \tilde{\eta}(q' = 1) = \tilde{f}(\eta(q' = 1)) = \tilde{c}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Ponadto, w punkcie $q' = 1$ nachylenie spektrum singularności względem osi odciętych wynosi:

$$\left. \frac{df(\eta)}{d\eta} \right|_{q'=1} = 1. \quad (\text{E.9})$$

Wymiar informacyjny jest bezpośrednio związany z informacją Shanona (czy też entropią Shanona) [82]. Z definicji informacji Rényi dla $q' \rightarrow 1$ (patrz równanie (D.1)), otrzymujemy

$$\begin{aligned} Y(q' \rightarrow 1) &\stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{q' \rightarrow 1} \frac{\ln(Z(q'))}{q' - 1} = \sum_{\underline{i}} p_{\underline{i}} \ln \left(p_{\underline{i}} / M \frac{\Delta_t \Delta_\varepsilon}{\gamma_0 \sigma} \right) \\ &= I_S(q' \rightarrow 1) - \ln \left(M \frac{\Delta_t \Delta_\varepsilon}{\gamma_0 \sigma} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

gdzie $I_S(q' \rightarrow 1) = \sum_{\underline{i}} p_{\underline{i}} \ln(p_{\underline{i}})$ można utożsamić z informacją Shanona, natomiast bezwymiarową wielkość $S_S \stackrel{\text{def.}}{=} -I_S(q' \rightarrow 1)$ z entropią Shanona.

Równanie (E.10) może być zapisane w postaci nieco łatwiejszej do interpretacji

$$Y(q' \rightarrow 1) - Y_0(q' \rightarrow 1) = I_S(q' \rightarrow 1), \quad (\text{E.11})$$

gdzie $Y_0(q' \rightarrow 1)$ jest informacją Rényi zdefiniowaną dla prawdopodobieństwa $p_{\underline{i}} = \delta_{\underline{i}, \underline{0}}$ (równą drugiemu wyrazowi w drugim wierszu w (E.10)) co oznacza, że początkowo system był zlokalizowany w pojedynczej komórce $\underline{i} = 0$.

E.3 Przypadek $q' = 0$

Dla tego przypadku pragnę jedynie zaznaczyć, że

$$\frac{df}{d\eta}|_{q'=0} = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{\eta}}|_{q'=0} = 0, \quad (\text{E.12})$$

czyli w swoim maksimum wykres spektrum singularności jest poziomy (patrz rys. 6.5), co jest własnością o charakterze ogólnym, wynikającą bezpośrednio z drugiej równości w (6.23).

Bibliografia

- [1] P. Oświęcimka: *Multifraktalne charakterystyki finansowych szeregów czasowych*, praca doktorska wykonana pod kierunkiem prof. dr hab. Stanisława Drożdża, Kraków 2005.
- [2] B.B. Mandelbrot and R.L. Hudson: *The (mis)Behavior of markets. A Fractional View of Risk, Ruin, and Reward*, Basic Books, New York 2004.
- [3] B.B. Mandelbrot, Świat Nauki, Kwiecień 1999, 64.
- [4] R.N. Mantegna, Physica A **179**, 232 (1991).
- [5] R. Kutner, D. Grech, Acta Phys. Pol. A **114**, 637 (2008).
- [6] J. Perelló, J. Masoliver, A. Kasprzak, and R. Kutner, Phys. Rev. E **78**, 036108 (2008).
- [7] A. Kasprzak, R. Kutner, J. Perelló, and J. Masoliver, *Higher-order phase transitions on financial markets*, EPJ B (2010), w druku.
- [8] H.E. Stanley, L.A.N. Amaral, X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou, Physica A **299**, 1 (2001).
- [9] M. Kozłowska: *Uogólniony i zreinterpretowany model materiałów lepkosprężystych jako narzędzie badania dynamiki wybranych indeksów giełdowych*, praca doktorska wykonana pod kierunkiem dr hab. Ryszarda Kutnera prof. nadzw. UW, Warszawa 2009.
- [10] M.E. Scharfe, Phys. Rev. B **2**, 5025 (1970).
- [11] G. Pfister, Phys. Rev. Lett. **33**, 1474 (1974).
- [12] W.D. Gill, J. Appl. Phys. **43**, 5033 (1972).

- [13] R. Kutner: *Wprowadzenie do ekonofizyki: niebrownowskie procesy stochastyczne i niedebyeowska relaksacja w świecie realnym. Od anomalnej dyfuzji i dyspersyjnego transportu w ciałach amorficznych oraz fraktalnej relaksacji w ciałach plastycznych poprzez teorie zdarzeń ekstremalnych do ekono- isocjofizyki*, skrypt (2009), adres internetowy: [http : //www.fuw.edu.pl/tl_files/studia/materialy/ef/bloweier.pdf](http://www.fuw.edu.pl/tl_files/studia/materialy/ef/bloweier.pdf).
- [14] C. Mounthus, J-P. Bouchaud, J. Phys. A: Math. Gen. **29** 3847 (1966).
- [15] M. Kozłowska and R. Kutner, Physica A 357 282 (2005).
- [16] R. Kutner and M. Regulski, Physica A 264 (1999) 107.
- [17] G.W. Weiss, *A Primer of Random Walkology*, Chapt.5, p.119, in *Fractals in Science*, A. Bunde, S. Havlin (Eds.), Springer-Verlag, Berlin 1995.
- [18] J.W. Haus, K.W. Kehr, Phys. Rep. 150 (1987) 263.
- [19] A.-L. Barabási, Nature (London) **207**, 435 (2005).
- [20] A. Vázquez, B. Rácz, A. Lukács, and A-L Barabási, Phys. Rev. Lett. **98**, 158702 (2007).
- [21] K. Yamasaki, L. Muchnik, S. Havlin, A. Bunde, and H. E. Stanley, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **102**, 9424 (2005).
- [22] T. Nakamura, K. Kiyono, K. Yoshiuchi, R. Nakahara, Z.R. Struzik, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **99**, 138103 (2007).
- [23] A. Vázquez, J. G. Oliveira, Z. Dezsö, K.-I. Goh, I. Kondor, and A.-L. Barabási, Phys. Rev. E **73**, 036127 (2006).
- [24] J. Perelló, M. Montero, L. Palatella, I. Simonsen, and J. Masoliver, J. Stat. Mech. P11011 (2006).
- [25] A. Vázquez, Phys. Rev. Lett. **95**, 248701 (2005).
- [26] P. K. Clark, Econometrica **41**, 135 (1973).
- [27] C. Doering and P. Constantin, Phys. Rev. E **49**, 4087 (1994).
- [28] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [29] E.W. Montroll and G.H. Weiss, J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).

- [30] G.H. Weiss, *Aspects and Applications of the Random Walk* (North-Holland, Amsterdam, 1994).
- [31] G. Pfister and H. Scher, *Adv. Phys.* **27**, 747 (1978).
- [32] H. Scher and E.W. Montroll, *Phys. Rev. B* **12**, 2455 (1975).
- [33] R. Kutner, *Chem. Phys.* 284, 481 (2002).
- [34] A. Bunde and S. Havlin (eds.) *Fractals and Disordered Systems* (Springer, New York, 1996).
- [35] M. Abramowitz and I. Stegun *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).
- [36] J. Masoliver, M. Montero and G.H. Weiss, *Phys. Rev. E* **67**, 021112 (2003).
- [37] E. Scalas, R. Gorenflo, F. Mainardi, *Phys. Rev. E* 69 (2004) 011107.
- [38] J. Masoliver, M. Montero, J. Parelló, G.H. Weiss, *J. of Economic Behavior & Org.* 61 (2006) 577.
- [39] M. Politi, E. Scalas, *Physica A* **366**, 466 (2008).
- [40] Z-Q Jiang, W. Chen, W-X Zhou, arxiv:0804.2431v2.
- [41] P. Gopikrishnan, V. Plerou, X. Gabaix, and H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **62**, R4493 (2000).
- [42] F. Lillo, J.D. Farmer, and R.N. Mantegna, *Nature* **421**, 129 (2003).
- [43] L. Gillemot, J. D. Farmer, and F. Lillo, *Quant. Finance* **6**, 371 (2007).
- [44] E. Bacry, J. Delour, and J.F. Muzy, *Phys. Rev. E* **64**, 026103 (2001).
- [45] L. Calvet and A. Fisher, *Rev. Econ. Stat.* **84**, 381 (2002).
- [46] T. Di Matteo, *Quant. Finance*, **7**, 21 (2007).
- [47] W.A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series*, J. Wiley, Ames Iowa 1976.
- [48] M.B. Priestley, *Non-linear and Non-Stationary Time Series Analysis*, Acad. Press, London 1988.
- [49] B. Torr sani (Ed.), *Special Issue on Wavelet and Time-Frequency Analysis*, *J. Mathmem. Phys.* 39 (1998).

- [50] J.C. Sprott, *Chaos and Time-Series Analysis*, Acad. Press, London 2003.
- [51] *Handbook of Time Series Analysis: Recent Theoretical Developments and Applications*, B. Schelter, M. Winterhalder, and J. Timmer (Eds.), Wiley-VCH, Weinheim 2006.
- [52] C.-K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger, Phys. Rev. E 49 (1994) 1685.
- [53] J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.H.A Rego, S. Havlin, A. Bunde, Physica A 295 (2001) 441.
- [54] J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, H.E. Stanley, Physica A 316 (2002) 82.
- [55] A. Carbone, G. Castelli, and H.E. Stanley, Phys. Rev. E 69 (2004) 026105.
- [56] E. Alessio, A. Carbone, G. Cstelli, V. Frappietro, Eur. Phys. J. B 27 (2002) 197.
- [57] D. Grech, Z. Mazur, Acta Phys. Pol. B 36 (2005) 2403.
- [58] A. R. Bishop, G. Grüna and B. Nicolaenko, eds., Physica D 23 (1987) 1.
- [59] A. Aharony and J. Feder, eds., Physica D 38 (1989) 1.
- [60] F. Schmitt, D. Schertzer and S. Lovejoy, Appl. Stochastic Models Data Anal. 15 (1999) 29.
- [61] O. Pont, J.M.D. Delgado, A. Turiel, C.J. Pérez-Vincente, New J. Phys (2008) in print.
- [62] J.F. Muzy, J. Delour, and E. Bacry, Eur. Phys. J. B 17 (2000) 537.
- [63] R. N. Mantegna, Physica A 179 (1991) 232.
- [64] F. Mainardi, M. Raberto, R. Gorenflo, E. Scalas, Physica A 287 (2000) 468.
- [65] M. Schulz, S. Trimper, B. Schulz, Phys. Rev. E 64 (2001) 026104-2.
- [66] L. Harris, J. Financ. Quant. Anal. 22 (1987) 127.
- [67] W.M. Fong and W.F. Lab-sane, Quant. Finance 3 (2003) 184.
- [68] B. Castaing, Y. Gagne, E. Hopfinger, Physica D 46 (1990) 177.

- [69] B. Chabaud, A. Naert, J. Peinke, F. Chillà, B. Castaing, B. Hebral, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 3227.
- [70] H. Scher and M. Lax, Phys. Rev. B 7 (1973) 4491.
- [71] G. Pfister and H. Scher, Phys. Rev. B 15 (1977) 2062.
- [72] G. Pfister and H. Scher, Adv. Phys. 27 (1978) 747.
- [73] E. M. Montroll, B. J. West, in *Fluctuation Phenomena*, SSM Vol. VII, eds. E. W. Montroll and J. L. Lebowitz (North-Holland, Amsterdam 1979) p. 61.
- [74] E. M. Montroll, M. F. Shlesinger, in *Nonequilibrium Phenomena II. From Stochastics to Hydrodynamics*, SSM, Vol. XI, eds. J. L. Lebowitz and E. M. Montroll (North-Holland, Amsterdam 1984) p. 1.
- [75] E.J. Moore, J. Phys. C: Proc. Phys. Soc., London 7 (1974) 339.
- [76] K.W. Kehr, R. Kutner, and K. Binder, Phys. Rev. B **23**, 4931 (1981).
- [77] R. Kutner and F. Switała, Quant. Finance **3**, 201 (2003).
- [78] L. Li, Y. Meurice, Phys. Rev. D 73 036006-1 (2006).
- [79] C. Beck, E.G.D. Cohen, Physica A 322 (2003) 267-275.
- [80] C. Beck, E.G.D. Cohen, S. Rizzo, Europhysics News 36/6 (2005) 189.
- [81] Th.H. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff. I. Procaccia, B.I. Shraiman, *Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets*, Phys. Rev. A 33 (1986) 1141.
- [82] C. Beck and F. Schlögl, *Thermodynamics of chaotic systems. An introduction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.
- [83] B.B. Mandelbrot, C.J.G. Evertsz, in *Fractals and Disordered Systems*, Second Revised and Enlarged Edition, eds. A. Bunde, Sh. Havlin (Springer, Berlin 1996).
- [84] H.E. Stanley, *Fractals and Multifractals: The Interplay of Physics and Geometry in Fractals and Disordered Systems*, Second Revised and Enlarged Edition, eds. A. Bunde, Sh. Havlin (Springer, Berlin 1996).
- [85] A. Erdelyi, *Asymptotic Expansions* (Dover, New York, 1956).