

WYBRANE ZASTOSOWANIA
TEORII KOPUŁ W FINANSACH.
SYMULACJE MONTE CARLO
Szkic

Ryszard Kutner

*Zakład Dydaktyki Fizyki, Instytut Fizyki Doświadczalnej
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski*

Warszawa, grudzień 2009

Niniejszy materiał ani w całości ani we fragmentach nie może być powielany lub rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych bez zgody autora.

Spis treści

I	Teoria kopuł w przykładach	5
1	Wstęp: postawienie problemu i określenie problematyki	7
1.1	Omówienie niezbędnych definicji i twierdzeń	8
1.1.1	Co to jest kopuła?	8
1.1.2	Omówienie pojęcia kopuły oraz podkopuły	10
1.1.3	Pomiar łącznego ryzyka kredytowego	13
1.1.4	Rating w teorii kopuł: inny sposób liczenia prawdopodobieństw łącznych	26
1.1.5	Ocena ryzyka rynkowego a probabilistyczna interpretacja kopuły . .	28
1.1.6	Analiza zdarzeń i procesów skrajnych	45
1.1.7	Wskaźniki Kendalla i Spearmana	49
2	Symulacje komputerowe	51
2.1	Metoda Eliminacji von Neumanna	51
2.1.1	Uogólniona Metoda Eliminacji	52
2.2	Symulacje Monte Carlo zmiennych wielowymiarowych za pomocą kopuł . .	54
2.2.1	Zasadnicze elementy metody	54
2.2.2	Generowanie wielowymiarowych zmiennych losowych poprzez kopuły	55
3	Kalibracja kopuł	59
3.1	Metoda Największej Wiarygodności	59
3.1.1	Uproszczona Metoda Największej Wiarygodności	61

Część I

Teoria kopuł w przykładach

Rozdział 1

Wstęp: postawienie problemu i określenie problematyki

Jest dzisiaj truizmem stwierdzenie, że zarówno analiza statystyczna jak też symulacje komputerowe odgrywają w szeroko rozumianych finansach zasadniczą rolę. Należy jednak podkreślić, że

- 1) stosowanie takiego podejścia z akceptowalnie małą dyspersją wymaga używania odpowiednio dużego rekordu danych,
- 2) co więcej, jego zastosowanie jest szczególnie trudne gdy występują zdarzenia rzadkie, bowiem wtedy wariancja jest nieograniczona (tym samym prawo wielkich liczb Bernoulliego nie działa) a zatem estymata wariancji nie stabilizuje się ze wzrostem liczby zdarzeń¹ czyli jest ona tutaj bezużyteczna. Na szczęście, rozkłady (statystyki) są w tym przypadku nadal dobrze określone, co pozwala stosować metodę zwaną w skrócie *VaR* (ang. *Value at Risk*, czyli wartość zagrożona ryzykiem²) świetnie nadającą się do traktowania za pomocą teorii kopuł (inaczej zwanych funkcjami połączenia). Innymi słowy, zamiast używać momentów korzystamy z kwantyli.

Należy podkreślić, że nie tylko z tych powodów, ale także z powodu technicznego (często dużo bardziej skomplikowana postać), bezpośrednie konstruowanie statystyk wielowymiarowych jest utrudnione. Dlatego pojawiło się kluczowe pytanie³:

czy jest możliwe zbudowanie, a jeżeli tak to pod jakimi warunkami i w jaki sposób, statystyk wielowymiarowych dysponując statystykami brzegowymi (tzn. dla każdej, pojedynczej zmiennej z osobna)?

W ogólności, statystyki brzegowe możemy względnie łatwo (tzn. znacznie łatwiej niż statystyki wielowymiarowe) uzyskać bezpośrednio z danych empirycznych. **Pozytywna odpowiedź na powyższe pytanie ma szczególne znaczenie wtedy, gdy rozważane**

¹Przewidujemy symulacje komputerowe w formie pokazów ilustrujących to zjawisko.

²Powinno się raczej używać nazwy "wartość nadmiernie zagrożona ryzykiem".

³Rozważania prowadzone w niniejszym opracowaniu opierają się na książce [1], którą uważam za najlepszą dotychczas istniejącą dotyczącą omawianej tematyki.

zmienne losowe są od siebie statystycznie zależne. Ta pozytywna odpowiedź zapoczątkowała dynamiczny rozwój teorii kopuł i ich zastosowań m.in. właśnie w szeroko rozumianych finansach.

Dokładniej rzecz biorąc, teoria kopuł oraz wykorzystujące ją symulacje Monte Carlo (czyli symulacje statystyczne) stosowane są już dzisiaj m.in. w następujących obszarach:

- 1) do zagadnień związanych z giełdą oraz rynkami pozagiełdowymi a w tym zwłaszcza jednoczesną wyceną wielu pochodnych instrumentów finansowych - zarówno zależnych od siebie jak i niezależnych,
- 2) do określenia stopnia pogrubienia ogonów dystrybuant wielowymiarowych jak też wzajemnej zależności ogonów dystrybuant brzegowych,
- 3) do określenia stopnia skorelowania instrumentów finansowych a w tym np. kursów różnych walut,
- 4) do oceny ryzyka rynkowego i kredytowego.

Poniżej omawiamy tylko te elementy teorii kopuł, jakie są niezbędne do rozwiązywania konkretnych problemów oraz do prowadzenia symulacji komputerowych - zamieszczono typowe algorytmy dotyczące symulacji w finansach; przy czym,

zajmujemy się w zasadzie kopułami wielowymiarowymi i niegaussowskimi.

Co więcej,

przedstawiono obrazkowy katalog powszechnie stosowanych dwuwymiarowych kopuł.

Generalnie można powiedzieć, że zastosowanie teorii kopuł oparte jest częściowo na ich odgadywaniu, gdyż (dzięki użytecznym własnościom kopuł oraz symulacjom komputerowym) jest to zadanie łatwiejsze niż znajdowanie wprost poszukiwanych rozkładów prawdopodobieństw.

1.1 Omówienie niezbędnych definicji i twierdzeń

1.1.1 Co to jest kopuła?

Przykład 1.1.1.1 (Wprowadzenie)

Aby wyjaśnić na czym konkretnie polega użyteczna rola kopuł w finansach rozważmy, tytułem wstępu, **najprostszy przykład**, czyli binarną (cyfrową) opcję sprzedaży (ang. *digital (binary) put option*) wystawioną na dwa instrumenty bazowe a mianowicie, na kurs dolara i kurs euro. Opcja ta może być zrealizowana w ustalonym czasie T o ile jest w cenie

tzn. o ile kurs dolara x nie przewyższa ustalonego kursu x_{USD} a kurs euro y od ustalonego kursu y_{EURO} .

Zgodnie z zasadami wyceny opcji na rynku idealnym, czyli neutralnym (obojętnym) wobec ryzyka (ang. *risk-neutral market*, tzn. przy założeniu, że aktualna wartość danego papieru wartościowego jest równa przyszłej wypłacie z niego zdyskontowanej na chwilę obecną za pomocą pozarynkowej, krótkoterminowej stopy procentowej r^4) jej aktualna cena przybiera postać zależną bezpośrednio od łącznej dwuwymiarowej dystrybuanty (ang. *joint bivariate distribution function*) wspomnianych powyżej zdarzeń (oznaczymy ją przez $F(x_{USD}, y_{EURO})$), tzn.

$$DP_t = \exp(-r(T-t)) F(x_{USD}, y_{EURO}), \quad (1.1)$$

gdzie (przypomnijmy) dystrybuanta

$$F(x_{USD}, y_{EURO}) \stackrel{\text{def.}}{=} P(x \leq x_{USD}, y \leq y_{EURO}), \quad (1.2)$$

przy czym $P(x \leq x_{USD}, y \leq y_{EURO})$ jest (właśnie niezależnym od ryzyka) prawdopodobieństwem, że wartości zmiennych losowych x oraz y są nie większe od przyjętych wartości progowych, odpowiednio x_{USD} oraz y_{EURO} . Niestety, wyznaczenie tej dystrybuanty bezpośrednio z danych empirycznych a ponadto, modelowanie jej wprost na drodze teoretycznej jest trudne a często nawet niemożliwe (np. ze względu na niewystarczającą statystykę). To co zazwyczaj można skonstruować z wystarczającą dokładnością bezpośrednio z danych empirycznych oraz na drodze modelowania teoretycznego to dystrybuanty brzegowe (oznaczymy je przez $F_1(x_{USD})$ i $F_2(y_{EURO})$) dla każdej zmiennej losowej x i y z osobna. Podkreślmy, to co powiedziano powyżej ma charakter typowy dla teorii kopuł a mianowicie, **aby móc zastosować teorię kopuł należy postawione zadanie wyrazić za pomocą dystrybuanty** (lub dystrybuant).

Stajemy teraz przed **kluczowym problemem teorii kopuł**, który sformułowaliśmy (nieco mniej ściśle) już na wstępie:

czy można, a jeżeli tak to pod jakimi warunkami i w jaki sposób, skonstruować poszukiwaną dystrybuantę łączną dysponując dystrybuantami brzegowymi?

Mówiąc nieco inaczej, **chodzi o to pod jakimi warunkami i w jaki sposób połączyć te dystrybuanty brzegowe z dystrybuantą łączną, o ile jest to w ogóle możliwe?** Gdyby takie połączenie było możliwe, wówczas musiałaby natychmiast zachodzić następująca równość:

$$F(x_{USD}, y_{EURO}) = \mathcal{C}(F_1(x_{USD}), F_2(y_{EURO})); \quad (1.3)$$

okazuje się, że **można dobrać taką funkcję połączenia \mathcal{C} , czyli kopułę, która spełnia równość (1.3)** - reguluje to, kluczowe dla teorii kopuł, twierdzenie Sklara. Zanim przytoczymy (bez dowodu) to twierdzenie i krótko je omówimy, zastanowimy się jakie warunki powinna spełniać funkcja połączenia \mathcal{C} ? **Właśnie dysponując funkcją połączenia oraz relacją**

⁴Konceptcja rynku (portfela) obojętnego wobec ryzyka jest stosowana głównie do wyceny instrumentów finansowych.

(1.3) jesteśmy w stanie odpowiedzieć na pytanie o wycenę cyfrowej opcji walutowej czy ogólniej rzecz biorąc, **wyznaczyć dystrybuantę łączną F** .

Podkreślamy raz jeszcze, że nasze rozważania będą miały znacznie ogólniejszy charakter, nie ograniczając się jedynie do kursów walut; na razie zmienne losowe interpretujemy w taki właśnie sposób tylko dlatego aby to wprowadzenie miało jak najprostszy, pragmatyczny charakter. Przerwijmy na chwilę omawianie Przykładu 1, aby wprowadzić niezbędną, precyzyjną definicję kopuły.

1.1.2 Omówienie pojęcia kopuły oraz podkopuły

Definicja kopuły

Mówimy, że funkcja $\mathcal{C}(v, z)$ występująca w wyrażeniu (1.3) jest kopułą (tutaj dwuwymiarową, przy czym zmienne $v \stackrel{\text{def.}}{=} F_1(x)$ oraz $z \stackrel{\text{def.}}{=} F_2(y)$), czyli funkcją połączenia wtedy i tylko wtedy gdy spełnia cztery następujące warunki:

- 1) funkcja połączenia $\mathcal{C}(v, z)$ jest określona na powierzchni kwadratu o długości boku równej 1, którego lewy róg znajduje się w początku układu współrzędnych, co można zapisać następująco:

$$\mathcal{C} : I \times I \rightarrow I, \quad (1.4)$$

gdzie I oznacza odcinek domknięty $[0, 1]$,

- 2) ponieważ \mathcal{C} ma nas doprowadzić do prawdopodobieństwa łącznego wystąpienia obu zdarzeń, więc jeżeli jedno z nich zachodzi z prawdopodobieństwem zero to prawdopodobieństwo łączne powinno znikać; przenosi się to na następujące, podwójne równości dla kopuły (które nazywa się przyziemieniami),

$$\mathcal{C}(v = 0, z) = \mathcal{C}(v, z = 0) = 0 \quad (1.5)$$

co więcej,

- 3) jeżeli jedno ze zdarzeń występuje z całą pewnością to dystrybuanta łączna powinna się redukować do dystrybuanty brzegowej drugiego zdarzenia mianowicie,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(v = 1, z) &= z, \\ \mathcal{C}(v, z = 1) &= v \end{aligned} \quad (1.6)$$

wreszcie,

- 4) funkcja połączenia \mathcal{C} powinna być podwójnie niemalejąca (w skrócie 2-niemalejąca, ang. *2-nondecreasing*), czyli niemalejącą w obu argumentach, co można wyrazić następująco: jeżeli $v_2 \geq v_1$ oraz $z_2 \geq z_1$ to powinna zachodzić relacja

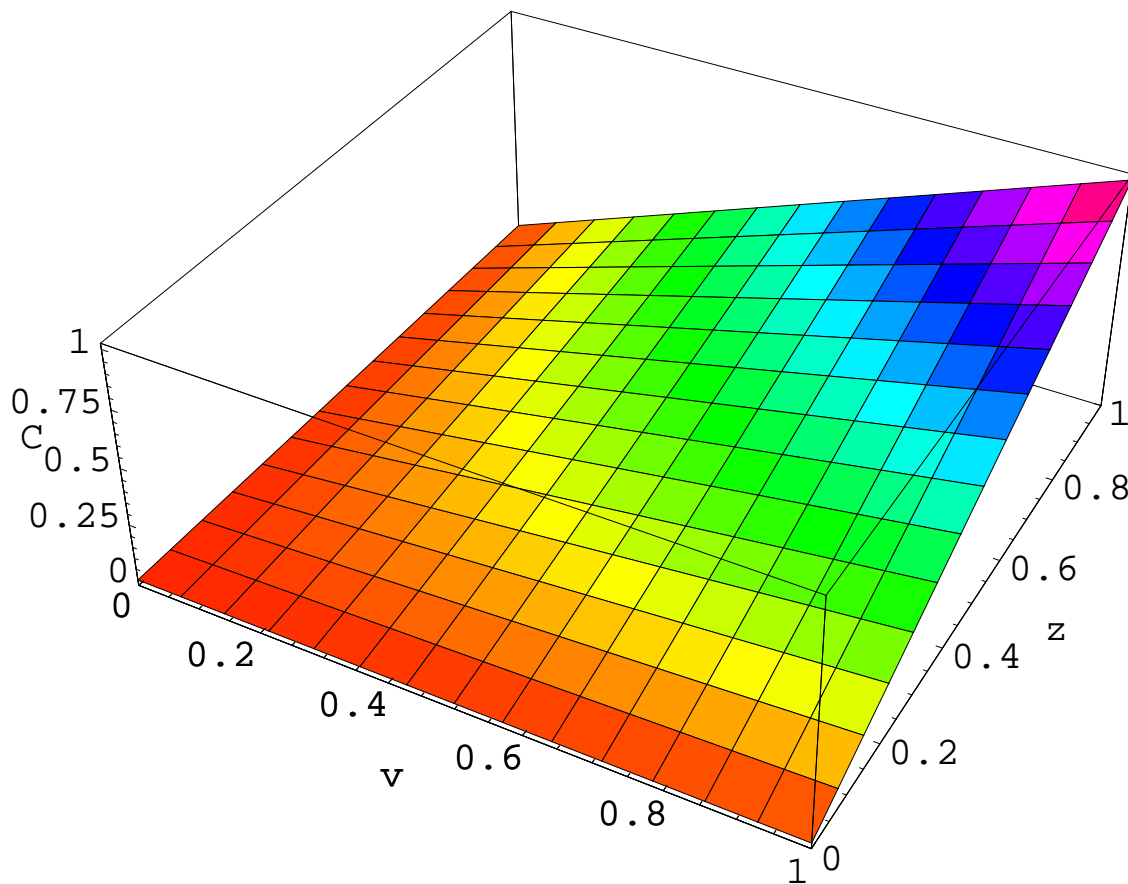
$$\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_2) \geq \mathcal{C}(v_2, z_1) - \mathcal{C}(v_1, z_1). \quad (1.7)$$

Pokaz 1.1.2.1 (Kopuła multiplikatywna)

Powyższe warunki ilustruje trójwymiarowy wykres rys.1.1 przedstawiający najprostszą ze znanych kopuł a mianowicie kopułę multiplikatywną (iloczynową, ang. *product copula*), tzn. postaci

$$\mathcal{C}(v, z) = \mathcal{C}^\perp(v, z) \stackrel{\text{def.}}{=} v z. \quad (1.8)$$

Z tego rodzaju kopułą mamy do czynienia wtedy i tylko wtedy gdy zmienne losowe (w naszym przykładzie kursy walut x oraz y) są statystycznie niezależne. Z tego trójwymiaro-



Rysunek 1.1: Kopuła multiplikatywna $\mathcal{C}^\perp(v, z) = v z$ - najprostszą ze znanych kopuł dotyczącą niezależnych zmiennych losowych v oraz z . Jest to jedna z tych kopuł, którą zawsze należy uwzględnić przy prowadzeniu obliczeń jako kopułę odniesienia. Właśnie ten kształt i podobne do niego usprawiedliwiają nazwę "kopuła".

wego wykresu można łatwo odczytać relacje (1.4) - (1.6) (oczywiście, spełniane z definicji przez dowolną kopułą); mówią one po prostu, że (patrz rys.1.1)

- ad. (1.4) cała kopuła zawarta jest w sześcianie o boku, którego długość równa się 1 - proszę zwrócić uwagę jak bardzo jest to wygodne w praktycznym użytkowaniu,
- ad. (1.5) funkcja połączenia przyziemia (czyli znika) wzdłuż obu krawędzi sześcianu, do których dotykają zabarwione na czerwono części kopuły

ad. (1.6) przecięcia kopuły ze ścianami prawą oraz tą najdaleszą pokrywają się z ich przekatnymi.

Niestety, trudniej jest precyzyjnie odczytać relację (1.4) chociaż pomocnym może być w tym także software umożliwiający obrót obiektów trójwymiarowych (np. pakiet 3D-Graphics Matlaba). Na szczęście, jej sprawdzenie na drodze analitycznej w przypadku tej konkretnej kopuły jest natychmiastowe (po prostu przez podstawienie (1.8) do (1.7)).

Przykład 1.1.2.1 (Wprowadzenie, ciąg dalszy)

Możemy teraz zakończyć nasze wstępne zadanie sformułowane w Przykładzie 1.1.1.1 polegające na znalezieniu dystrybuanty łącznej $F(x_{USD}, y_{EURO})$. Przypuśćmy zatem, że dane empiryczne wskazują iż dystrybuanty brzegowe należy wybrać w postaci następujących funkcji potęgowych, określonych na jednakowej dziedzinie $[1, \infty]$,

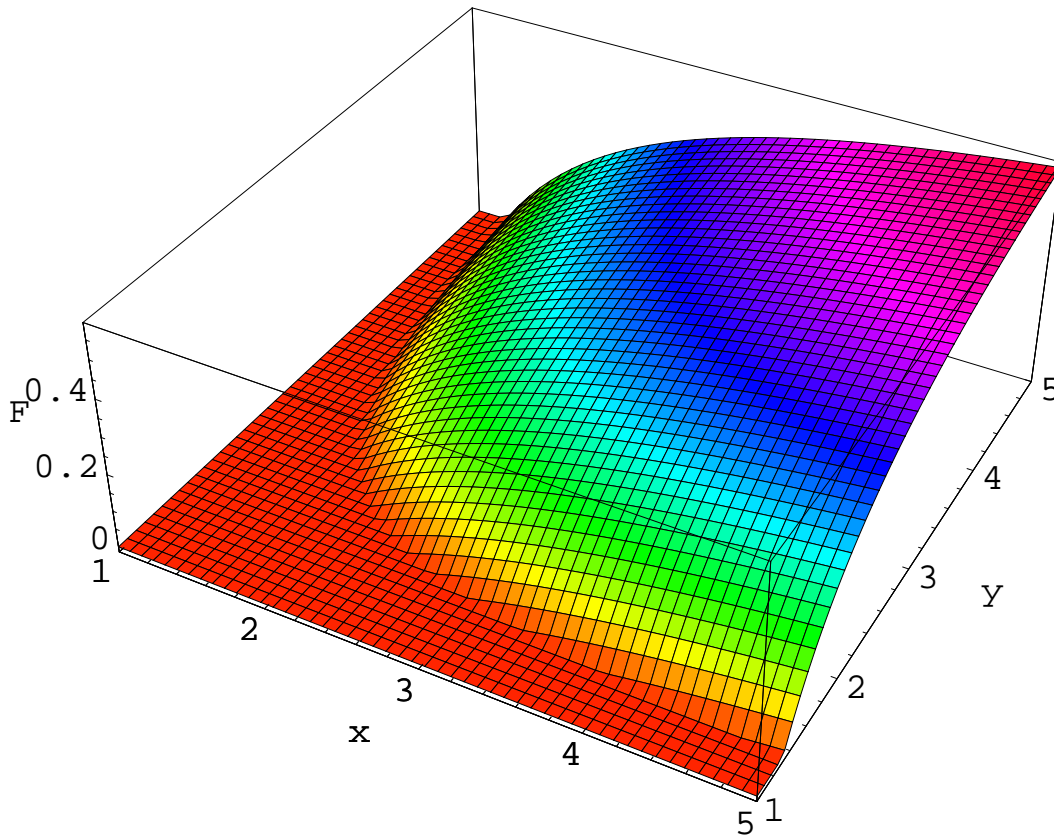
$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 - \frac{1}{x^\alpha} = \int_1^x dx' f_1(x'), \quad f_1(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}, \quad \alpha = 1.5, \\ F_2(y) &= 1 - \frac{1}{y^\beta} = \int_1^y dy' f_2(y'), \quad f_2(y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\beta}{y^{1+\beta}}, \quad \alpha = 1.2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

gdzie f_1 oraz f_2 to gęstości potęgowych rozkładów prawdopodobieństw. Korzystając ze wzoru (1.3) (i pamiętając, że $v = F_1(x)$ oraz $z = F_2(y)$) można zbudować dystrybuanty łączne w zmiennych x_{USD} oraz y_{EURO} (dla uproszczenia na rys.1.2 - 1.4 zamiast zmiennej x_{USD} użyto po prostu x a zamiast y_{EURO} zmiennej y) dla wybranych przykładowo kopuł:

- 1) minimalnej, $F(x, y) = \mathcal{C}^- = \max\left(1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta}, 0\right)$, (patrz rys.1.2),
- 2) maksymalnej, $F(x, y) = \mathcal{C}^+(F_1(x), F_2(y)) = \min\left(1 - \frac{1}{x^\alpha}, 1 - \frac{1}{y^\beta}\right)$, (patrz rys.1.3) oraz
- 3) multiplikatywnej $F(x, y) = \mathcal{C}^\perp(F_1(x), F_2(y)) = \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{y^\beta}\right)$, (patrz rys.1.4),

od których zawsze należy zaczynać tego typu analizy. Odczytywanie rozwiązania z wykresu jest już teraz natychmiastowe a mianowicie, dysponując wartościami progowymi (zadajemy je z zewnątrz na podstawie jakiś przesłanek empirycznych), czyli składowymi naszej (tutaj dwuwymiarowej) zmiennej losowej, ustalamy tym samym punkt na płaszczyźnie (x, y) . Punkтови temu odpowiada (jeden i tylko jeden) jego obraz na (tutaj kolorowej) powierzchni określającej poszukiwaną wartość dystrybuanty. Do tego kluczowego elementu odczytywania wartości dystrybuanty powracamy w Przykładzie 2. Generalnie rzecz biorąc, nie uzyskaliśmy jednoznacznej odpowiedzi w takim sensie, że poszukiwaną dystrybuantę można zbudować na różnych kopułach. Najlepszy wynik (lub wyniki) selekcjonuje się w oparciu o dane empiryczne. W dalszej części (celem bardziej wszechstronnej analizy) będziemy stosować nie tylko większą liczbę różnych kopuł ale także większą liczbę różnych dystrybuant brzegowych.

Pokaz 1.1.2.2 (Kopuła Franka)



Rysunek 1.2: Dystrybuanta łączna oparta na kopule minimalnej łączącej brzegowe dystrybuanty rozkładów potęgowych.

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, jak niewiele kopuła multiplikatywna (patrz Pokaz 1.1.2.1) różni się od znacznie bardziej skomplikowanej (choć jednoparametrowej) kopuły Franka

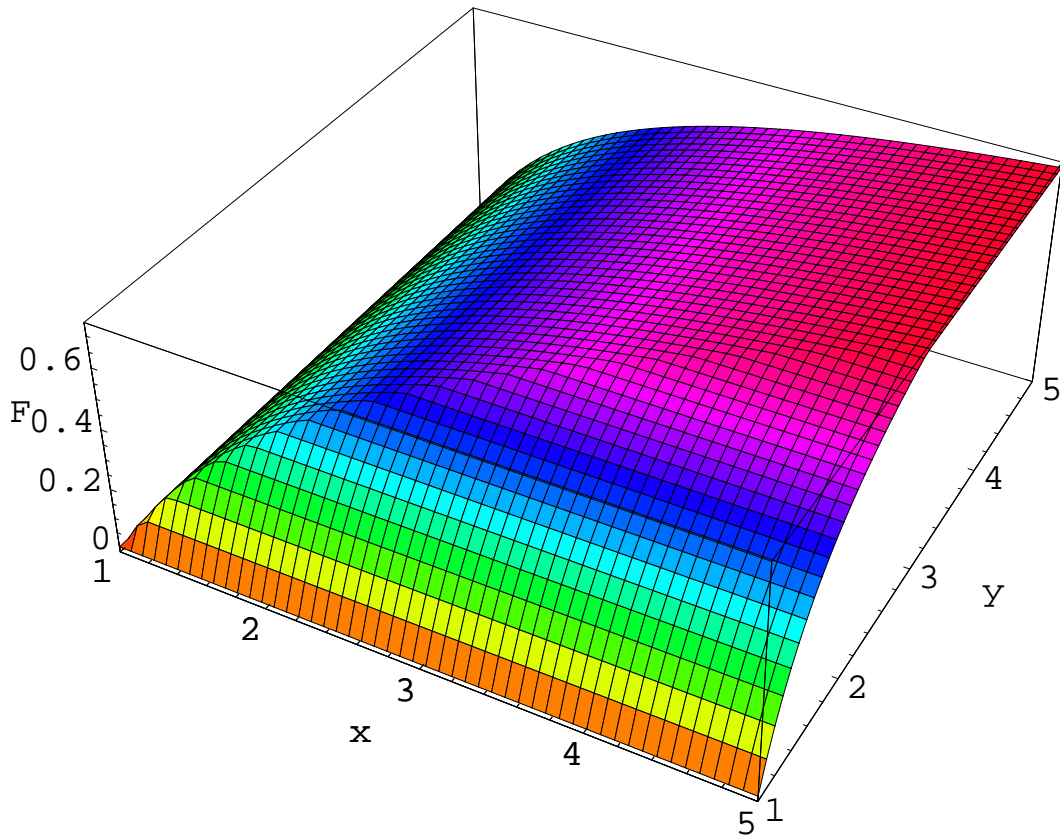
$$C(v, z) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\alpha v) - 1)(\exp(-\alpha z) - 1)}{\exp(-\alpha) - 1} \right) \quad (1.10)$$

(patrz rys.1.5) co prowadzi także do znikomej różnicy dystrybuant łącznych - do sprawy tej powrócimy jeszcze w Przykładzie 2. Możemy już teraz powiedzieć, że stosowanie bardziej skomplikowanych kopuł ma uzasadnienie tylko wtedy, gdy zarówno sama kopuła jak też zbudowana na niej dystrybuanta łączna, wyraźnie różnią się od, odpowiednio, tej najprostszej, czyli od kopuły multiplikatywnej oraz zbudowanej na niej dystrybuanty łącznej.

1.1.3 Pomiar łącznego ryzyka kredytowego

Przykład 1.1.3.1 (Wprowadzenie)

W niniejszym przykładzie wykorzystywane są elementy strukturalnego modelu ryzyka kredytowego Mertona. Ogólnie mówiąc, **interesuje nas prawdopodobieństwo łączne**

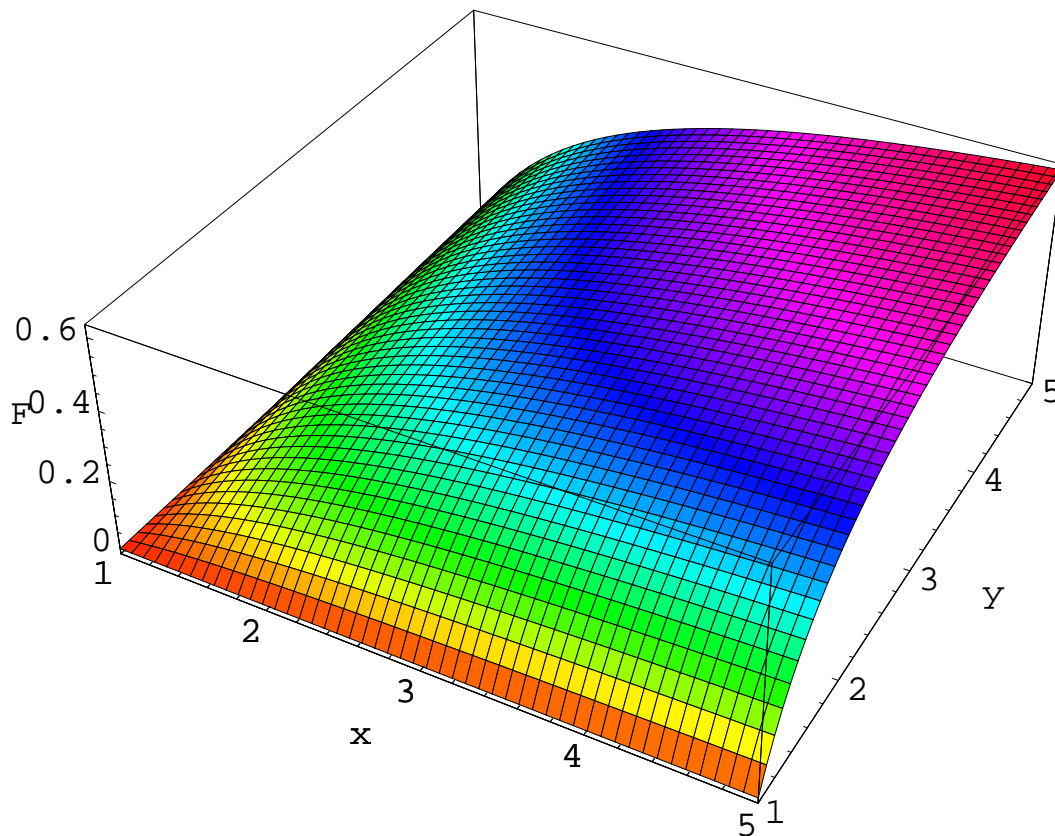


Rysunek 1.3: Dystrybuanta łączna oparta na kopule maksymalnej łączącej brzegowe dystrybuanty rozkładów potęgowych.

popadnięcia firm (wierzycieli) w niewypłacalność (default) czyli tzw. **pawdopodobieństwo defaultu**. Dokładniej rzecz biorąc, analizujemy przykładową sytuację, gdy ceny papierów wartościowych V i Z zabezpieczających długi odpowiednio D_V oraz D_Z dwóch wierzycieli spadają poniżej ich wartości w terminie spłaty obu długów T . Załóżmy dla uproszczenia, że zmienne losowe $\ln(V/V_0)$ oraz $\ln(Z/Z_0)$ podlegają (obojętnym względem ryzyka) rozkładom normalnym odpowiednio $N((r - \sigma_V^2/2)T, \sigma_V^2 T)$ oraz $N((r - \sigma_Z^2/2)T, \sigma_Z^2 T)$, tzn. gęstości tych rozkładów dane są następującymi funkcjami Gaussa

$$f\left(u = \ln\left(\frac{J}{J_0}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_J^2 T}} \exp\left(-\frac{(u - (r - \sigma_J^2/2)T)^2}{2\sigma_J^2 T}\right), \quad J = V, Z, \quad (1.11)$$

gdzie $V_0 (\geq D_V)$ oraz $Z_0 (\geq D_Z)$ są cenami tych papierów w chwili początkowej. Podkreślmy z całą mocą, że taka postać gęstości rozkładów brzegowych nie zależy od tego czy zmienne losowe $\ln(V/V_0)$ i $\ln(Z/Z_0)$ są czy też nie są statystycznie niezależne (co udowodnimy w dalszej części, gdzie wprowadzimy pojęcie gęstości kopuły gaussowskiej). Zanim przejdziemy do szczegółowej analizy prawdopodobieństwa defaultu musimy wprowadzić ważne pojęcia i twierdzenia teorii kopuł.



Rysunek 1.4: Dystrybuanta łączna oparta na kopule multiplikatywnej łączącej brzegowe dystrybuanty rozkładów potęgowych.

Ważne pojęcia i twierdzenia teorii kopuł

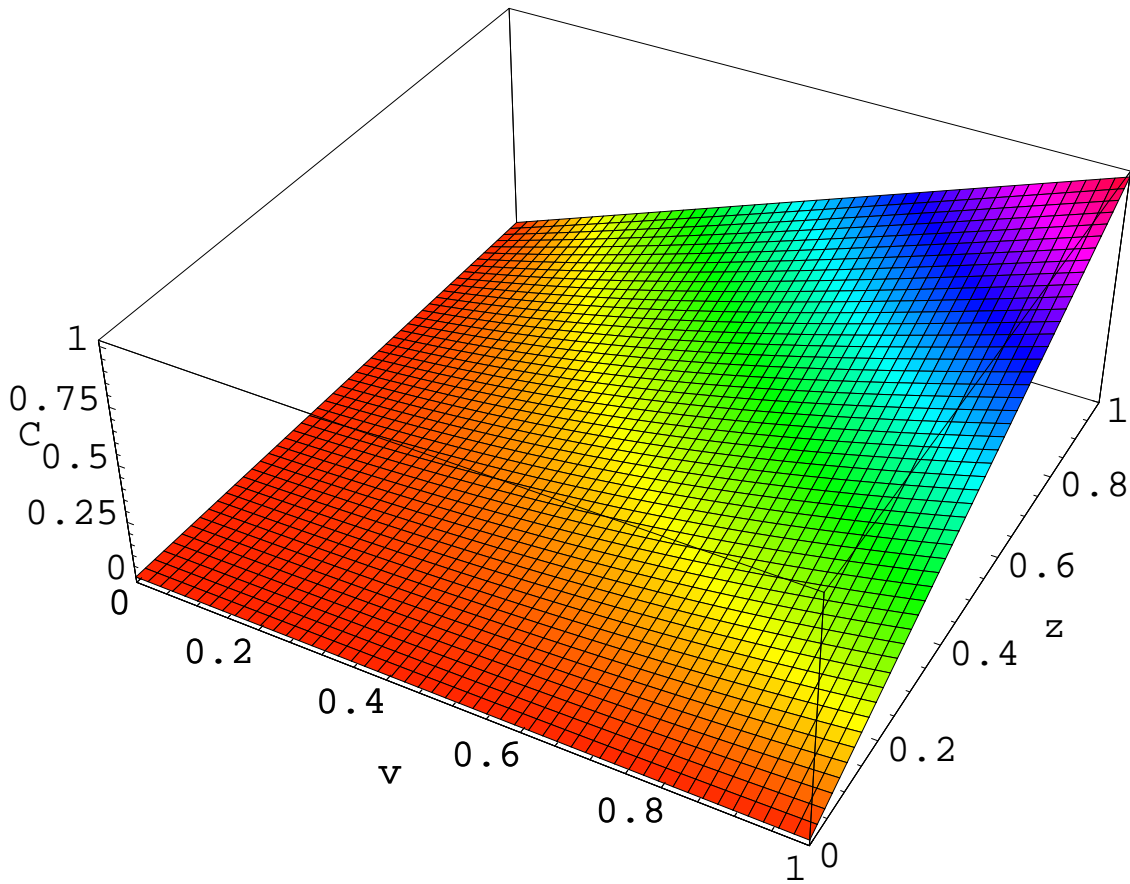
Zatem omawiamy,

- 1) definicję podkopuły oraz
- 2) podstawowe twierdzenie teorii kopuł⁵, podsumowujące i uogólniające rozważania przeprowadzone powyżej; twierdzenie to umożliwiło rozwój teorii kopuł oraz jej różnorodne zastosowania,
- 3) nierówności Fréchet'a oraz rodzinę kopuł Fréchet'a.

Definicja podkopuły

Definicję podkopuły (ang. *subcopula*) należy wprowadzić chociażby ze względów pragmatycznych, gdyż na ogół nie dysponuje się zadowalającym zestawem danych empirycznych (informacji) aby testować pełną kopułę. Czasami też pełna kopuła nie jest nam potrzebna do odpowiedzi na postawione pytania.

⁵Twierdzenie to formułujemy dla uproszczenia w wersji dwuwymiarowej.



Rysunek 1.5: Kopuła Franka dana wzorem (1.10) dla wartości parametru $\alpha = -3$.

Przez podkopułę $\tilde{C}(v, z)$ rozumiemy funkcję określoną na iloczynie kartezjańskim podzbiorów A i B odcinka I , zawierających jego punkt początkowy i końcowy oraz spełniającą pozostałe warunki 2) - 4) definiujące kopułę. Oczywiście, kopuła jest szczególnym przypadkiem podkopuły (gdyż cały zbiór jest z definicji swoim własnym podzbiorem). Analogicznie definiuje się podkopułę dualną, co stanie się jasne po wprowadzeniu w dalszej części jej definicji.

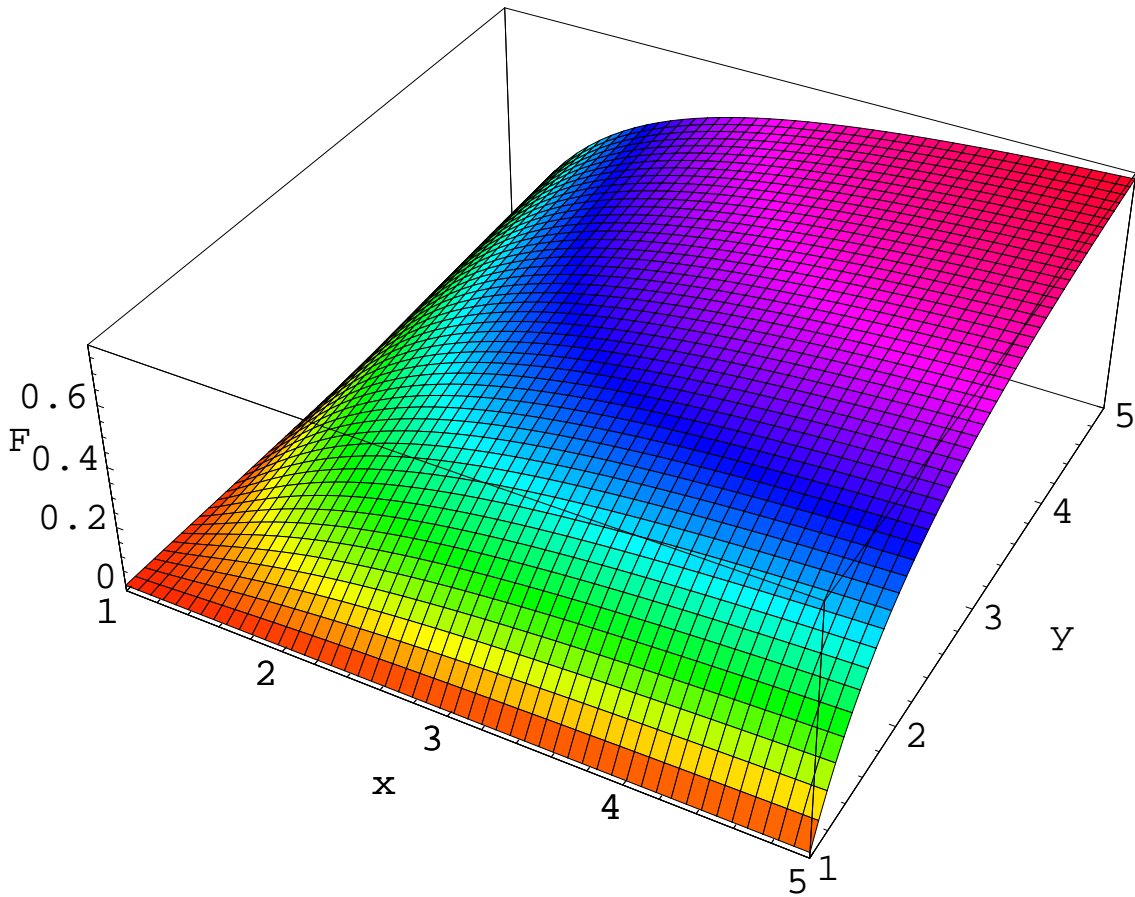
Twierdzenie 1.1.3.1 (Sklara) *Niech dane będą dwie dystrybuanty marginalne $F_1(x)$, $F_2(y)$. Wtedy, dla każdego punktu $(x, y) \in \mathcal{R}^2$:*

- i) jeśli C jest podkopułą, której dziedzina zawiera iloczyn kartezjański dziedzin cząstkowych (wspomnianych powyżej) dystrybuant marginalnych, wówczas*

$$F(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} C(F_1(x), F_2(x)) \quad (1.12)$$

jest dystrybuantą łączną posiadającą rozkłady brzegowe właśnie $F_1(x)$ oraz $F_2(y)$.

- ii) Odwrotnie, jeżeli dysponujemy dystrybuantą dwuwymiarową $F(x, y)$, która posiada dystrybuanty brzegowe $F_1(x)$ oraz $F_2(y)$, wówczas istnieje jedyna podkopuła określo-*



Rysunek 1.6: Dystrybuanta łączna zbudowana na kopule Franka danej wzorem (1.10) dla wartości parametru $\alpha = -3$ oraz potęgowych dystrybuant brzegowych danych odpowiednimi wzorami w (1.9) dla tych samych wykładników α i β jakie zostały użyte wcześniej.

na na dziedzinie będącej iloczynem kartezjańskim dziedzin tych dystrybuant brzegowych taka, że

$$F(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{C}(F_1(x), F_2(x)). \quad (1.13)$$

Co więcej, jeśli obie dystrybuanty brzegowe są ciągłe wtedy ta podkopała jest także kopułą. Natomiast, jeśli tak nie jest to istnieje taka kopuła \mathcal{K} określona na dziedzinie będącej iloczynem kartezjańskim dziedzin wspomnianych dystrybuant brzegowych, że

$$\mathcal{K}(v, z) = \mathcal{C}(v, z). \quad (1.14)$$

Oczywiście, z punktu widzenia odpowiedzi na pytanie o istnienie dystrybuanty łącznej wyznaczonej za pomocą kopuły (a więc odpowiedzi dotyczącej głównego celu naszych rozważań), najważniejszy jest punkt i) powyższego twierdzenia (a nie sytuacja odwrotna dana w punkcie ii)).

W niniejszym opracowaniu, oprócz twierdzenia Sklara, zostaną zamieszczone jeszcze dodatkowe twierdzenia i lematy, ale tylko takie, które są niezbędne do zrozumienia zarówno typowych przykładów zastosowania teorii kopuł w finansach, jak też wykorzystujących tą teorię do symulacji komputerowych Monte Carlo w finansach.

Ograniczenia Frécheta

Ma miejsce następujące ważne twierdzenie, niezwykle ułatwiające pracę z kopułami i podkopułami.

Twierdzenie 1.1.3.2 (Fréchet) *Dowolna podkopuła (a więc i kopuła) spełnia następującą, podwójną (tępa) nierówność:*

$$C^-(v, z) = \max(v + z - 1, 0) \leq \mathcal{C}(v, z) \leq C^+(v, z) = \min(v, z) \quad (1.15)$$

dla każdego punktu $(v, z) \in A \times B$.

Można wykazać, że jeżeli \mathcal{C} jest kopułą to wtedy C^- , zwane dolnym ograniczeniem Frécheta, oraz C^+ , zwane górnym ograniczeniem Frécheta, też są kopułami. **Zwykle, gdy nie ma zdecydowanych wskazań, zanim przystąpi się do poszukiwania kopuł najlepiej modelujących dystrybuantę łączną, sprawdza się dystrybuanty łączne utworzone przez kopuły minimalną (rys.1.7), multiplikatywną (rys.1.1) oraz maksymalną (rys.1.8).** Gdy żadna z nich nie spełnia wymagań stawianych przez dodatkowe warunki (na przykład, pochodzące z jakiś, na ogół wyrwykowych danych empirycznych) wykorzystuje się rodzinę kopuł Frécheta, którą omawiamy poniżej.

Dodatkowo, korzystając z twierdzenia Sklara, można nierówności Frécheta (1.15) wyrazić w postaci dobrze znanych i przydatnych nierówności Frécheta-Hoeffdinga

$$\max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) \leq F(x, y) \leq \min(F_1(x), F_2(y)). \quad (1.16)$$

Wniosek 1.1.3.1

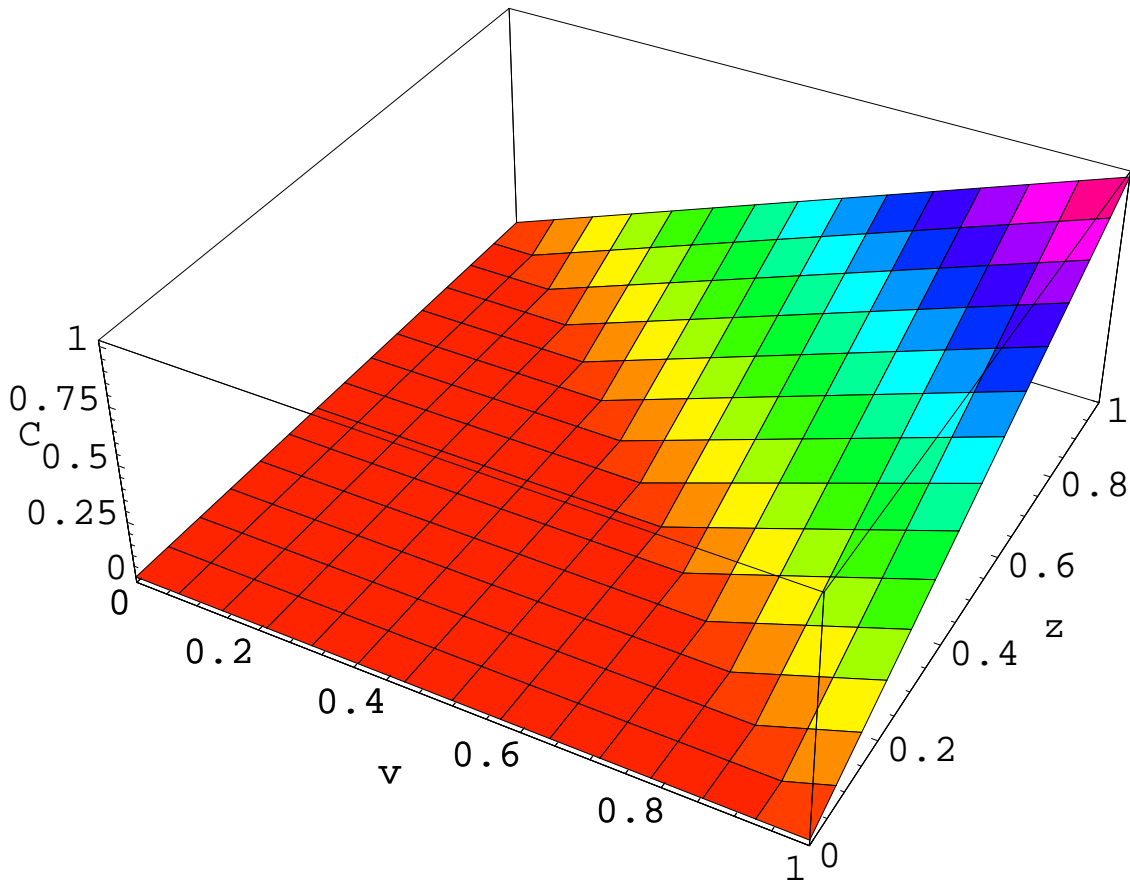
Z twierdzenia Frécheta 1.1.3.2 wynika możliwość generowania poziomic przez dowolnie wybraną kopułę. Zatem, poziomica $\mathcal{P}_h(v, z)$ na wysokości h nazywamy taki zbiór punktów (v, z) , dla których spełniona jest równość $\mathcal{C}(v, z) = h$, gdzie $h \in I$. Przykładowo, poziomicie dla (rozpatrywanych wcześniej) trzech kopuł bazowych rodziny kopuł Frécheta

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_h^-(v, z) &\stackrel{\text{def.}}{=} \{(v, z) \in I^2 : C^-(v, z) = h\}, \\ \mathcal{P}_h^\perp(v, z) &\stackrel{\text{def.}}{=} \{(v, z) \in I^2 : C^\perp(v, z) = h\}, \\ \mathcal{P}_h^+(v, z) &\stackrel{\text{def.}}{=} \{(v, z) \in I^2 : C^+(v, z) = h\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

oraz dla kopuły Franka

$$\mathcal{P}_h^F(v, z) \stackrel{\text{def.}}{=} \{(v, z) \in I^2 : C^F(v, z) = h\}, \quad (1.18)$$

przedstawiliśmy w postaci graficznej na rysunkach, odpowiednio, 1.9, 1.10, 1.11 oraz 1.12. Wydaje się, trójwymiarowej analizie za pomocą kopuł powinna zawsze towarzyszyć dwuwymiarowa analiza za pomocą poziomic. Tym bardziej, że kształt poziomic oraz ich lokalna gęstość na płaszczyźnie (v, z) (odzwierciedlając postać kopuły) ułatwiają wprowadzenie dyskryminacji (progów, bariery) na prawdopodobieństwo, rozszerzając tym samym



Rysunek 1.7: Kopuła minimalna $\mathcal{C}^-(v, z)$ - zwróćmy uwagę jak niewiele się różni od kopuły multiplikatywnej oraz kopuły Franka (zasadnicza różnica polega na jej znikaniu poniżej antyprzekątnej w płaszczyźnie (v, z)).

możliwości teorii kopuł. Dopiero takie dualne podejście stwarza możliwość lepszego wydobycia różnic pomiędzy kopułami. Na przykład, właśnie na poziomicy widać obszary, w jakich kopuła Franka bardziej upodabnia się do multiplikatywnej a w jakich do kopuły minimalnej.

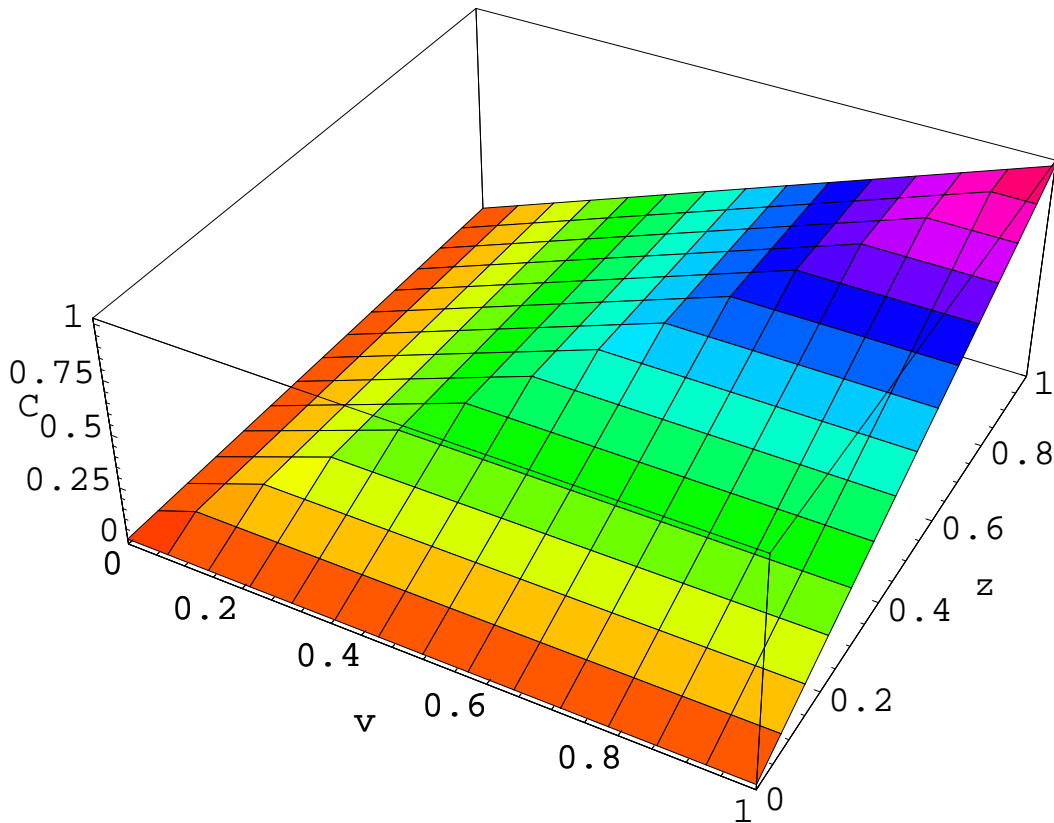
Dodajmy, że rozróżnianie kopuł można sobie jeszcze ułatwić porównując ich grzbiety (patrz rys.1.13)

Rodzina kopuł Fréchet'a

Dwuparametrową rodzinę kopuł Fréchet'a definiuje się za pomocą następującej liniowej kombinacji kopuł bazowych \mathcal{C}^- , \mathcal{C}^\perp oraz \mathcal{C}^+ :

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta}^F(v, z) = \beta\mathcal{C}^-(v, z) + (1 - \alpha - \beta)\mathcal{C}^\perp(v, z) + \alpha\mathcal{C}^+(v, z), \quad (1.19)$$

gdzie $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ oraz $\alpha + \beta \leq 1$; kopuły, dla których parametry $\alpha, \beta \neq 0$ nazywamy kopułami wewnętrznymi tej rodziny, pozostałe nazywać będziemy brzegowymi przy czym kopuły dla których jeden z parametrów znika przy nieznikającym drugim parametrze



Rysunek 1.8: Kopała maksymalna $C^+(v, z)$ - zwróćmy uwagę na wyraźną różnicę tej kopały w stosunku do minimalnej, multiplikatywnej oraz kopały Franka, zwłaszcza wzdłuż głównej przekątnej.

nazywamy dodatkowo mieszanymi; oczywiście $C^- = C_{1,0}^F$, $C^\perp = C_{0,0}^F$, $C^+ = C_{0,1}^F$ są kopułami brzegowymi. Nawiasem mówiąc, często wystarczy rozważać dwie jednoparametrowe podrodziny kopuł mieszanych Fréchet’a, dolną postaci

$$C_p^F(v, z) = pC^-(v, z) + (1 - p)C^\perp(v, z), \quad (1.20)$$

gdzie $0 \leq p \leq 1$; jak widać $C_p^F \equiv C_{\alpha=0, \beta=p}$, bądź też górną postaci

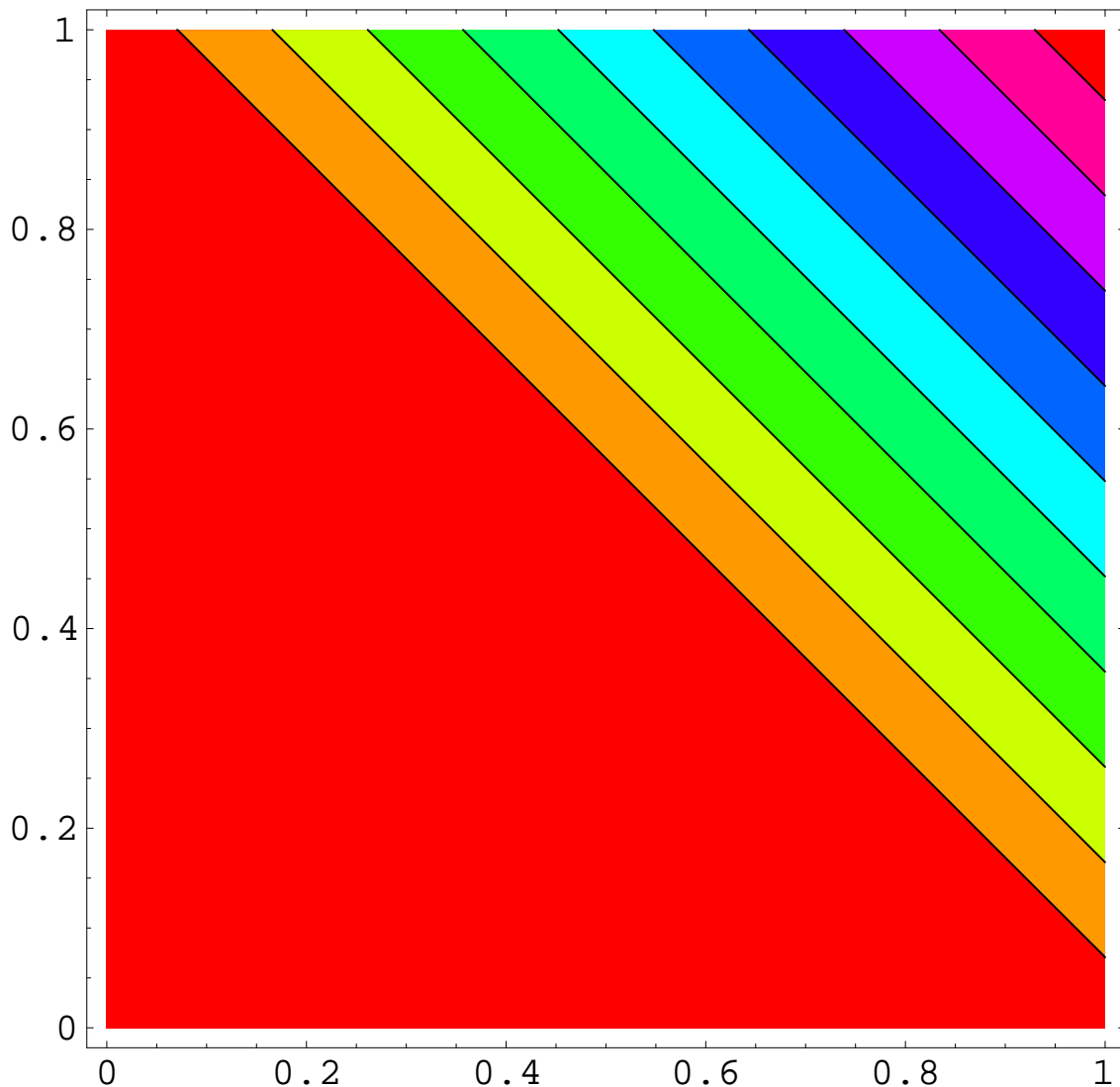
$$C_q^F(v, z) = (1 - q)C^\perp(v, z) + qC^+(v, z), \quad (1.21)$$

gdzie $0 \leq q \leq 1$; jak widać $C_q^F \equiv C_{\alpha=q, \beta=0}$. Dopiero, gdy to nie pomaga bierze się pod uwagę zupełnie inne rodziny kopuł (np. gussowskie, T -Studenta, Clytona lub Archimedes’a⁶). Do analizy rodziny kopuł Fréchet’a powrócimy dopiero po rozwinięciu dalszych, ważnych elementów teorii kopuł.

Przykład 1.1.3.2 (Wprowadzenie, ciąg dalszy)

Teraz, możemy już kontynuować nasze rozważania dotyczące pomiaru ryzyka kredytowego a poszukujące odpowiedzi na pytanie o łączne prawdopodobieństwo defaultu obu

⁶Tą rodzinę kopuł stosuje się szeroko w naukach aktuarialnych.



Rysunek 1.9: Poziomice dla kopuły minimalnej \mathcal{C}^- .

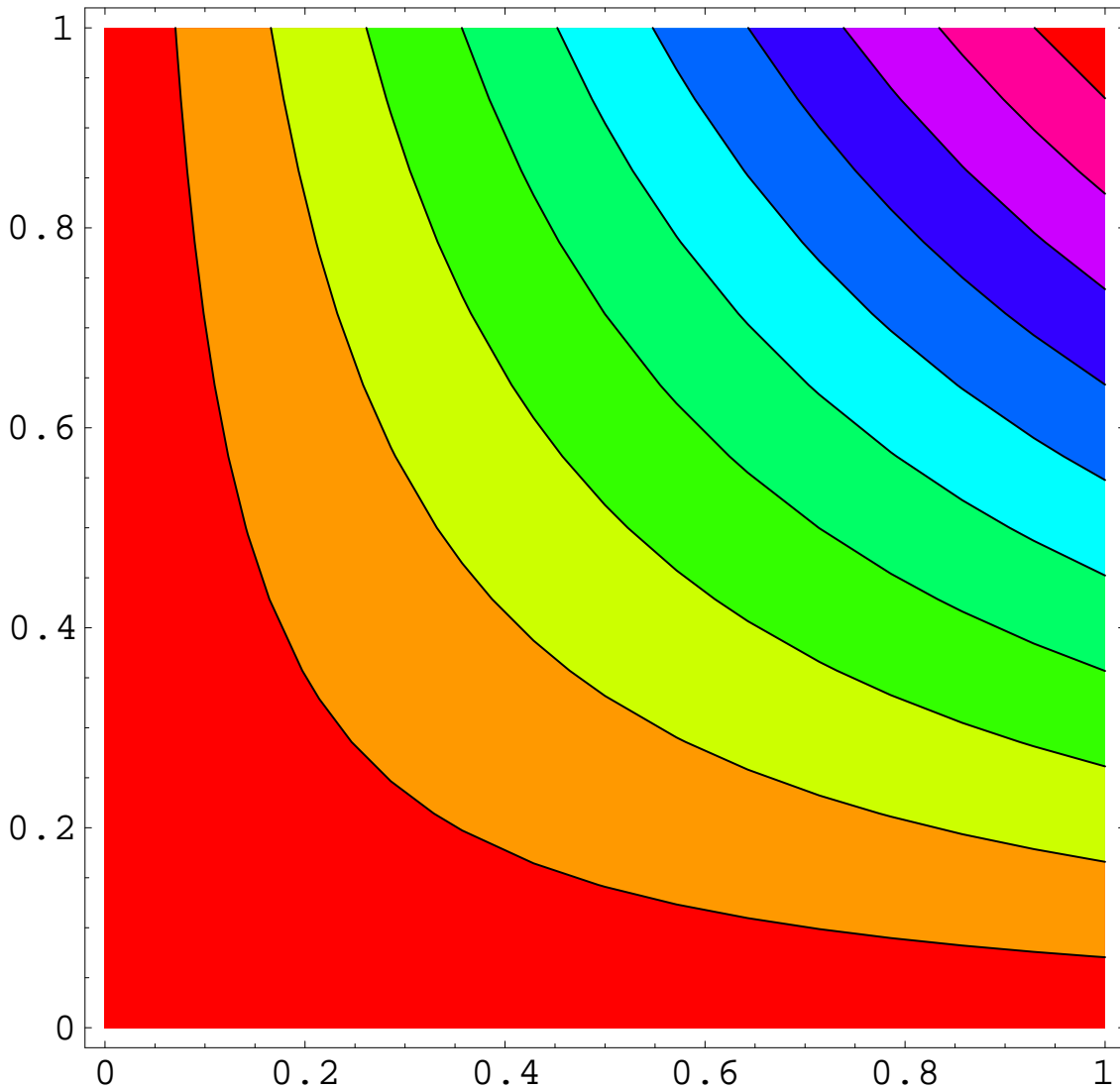
wierzycieli. Zatem, najpierw musimy wyznaczyć prawdopodobieństwo defaultu (we wspomnianym terminie T) każdej z firm z osobna; korzystając ze wzoru (1.11) można łatwo obliczyć, że wynosi ono

$$\begin{aligned}
 P(J \leq D_J) &= F_J(D_J) = \int_{-\infty}^{\ln(D_J/J_0)} f(\ln(J/J_0)) d\ln(J/J_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_J} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\
 &= \Phi(d_J(D_J)), \quad J = V, Z,
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0, 1)$ natomiast

$$d_J = \frac{\ln(D_J/J_0) - (r - \sigma_J^2/2)T}{\sigma_J\sqrt{T}}, \quad J = V, Z. \tag{1.23}$$

Stąd oraz na mocy twierdzenia Sklara (patrz rozdz.1.1.3 a tam wzór (1.12)) uzyskuje się, interesujące nas, łączne prawdopodobieństwo niewypłacalności obu firm (w chwili T) za



Rysunek 1.10: Poziomice dla kopuły multiplikatywnej \mathcal{C}^\perp .

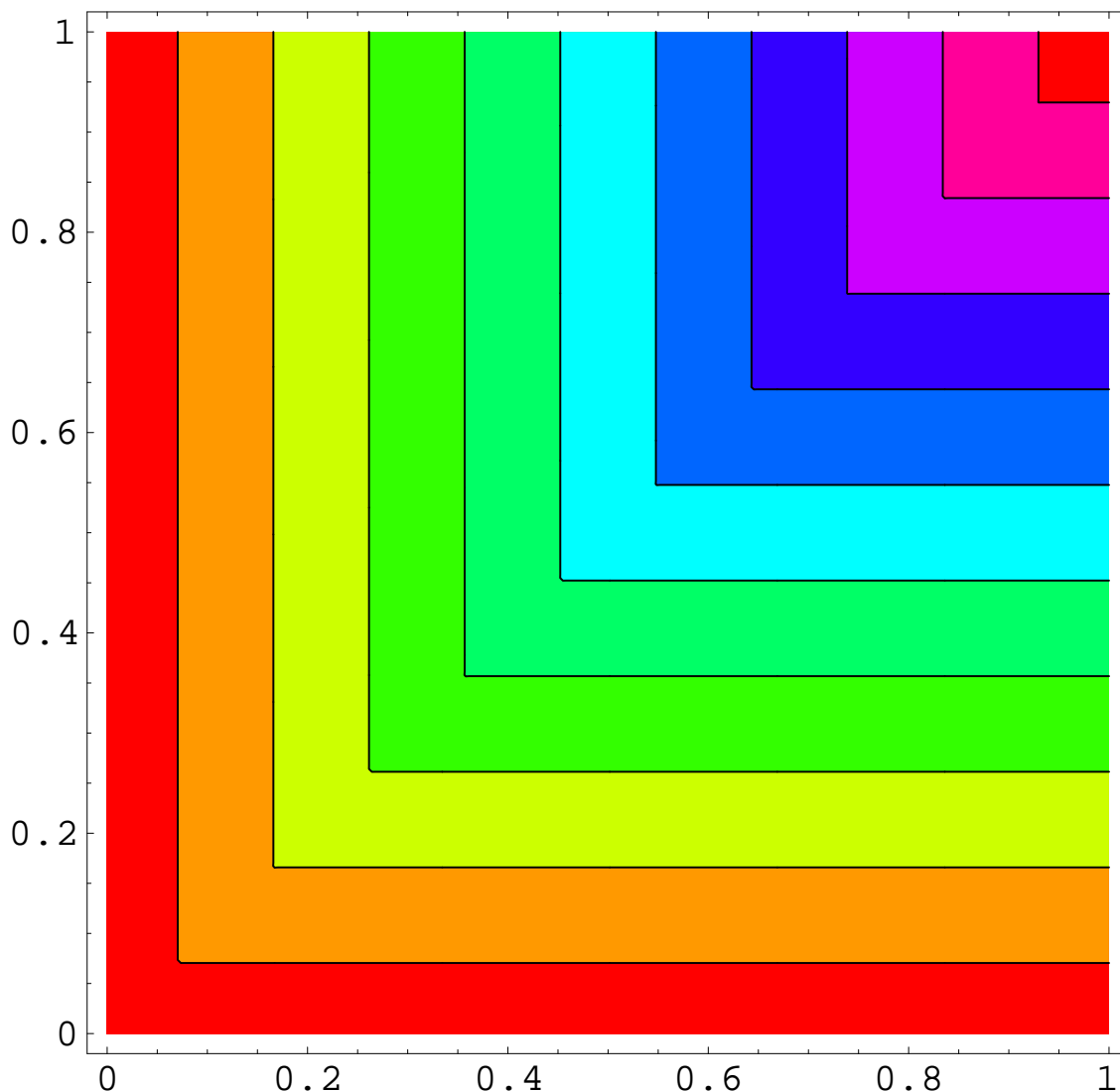
pomocą wybranych kopuł,

$$P(V \leq D_V, Z \leq D_Z) = F(D_V, D_Z) = \mathcal{C}(v = \Phi(d_V(D_V)), z = \Phi(d_Z(D_Z))). \quad (1.24)$$

Zilustrujemy to łączne prawdopodobieństwo:

- 1) wykorzystując strategię wychodzącą poza model Blacka-Scholesa tzn. uwzględniając trzy charakterystyczne kopuły brzegowe \mathcal{C}^- , \mathcal{C}^+ , \mathcal{C}^\perp i (przykładowo) jedną z wewnętrznych kopuł należących do rodziny Fréchet'a, czyli $\mathcal{C}_{1/3,1/3}^F$ (patrz wyrażenie (1.19)) oraz dodatkowo popularną kopułę Franka, oprócz tego
- 2) wykorzystując kopułę gaussowską (strategia modelu Blacka-Scholesa).

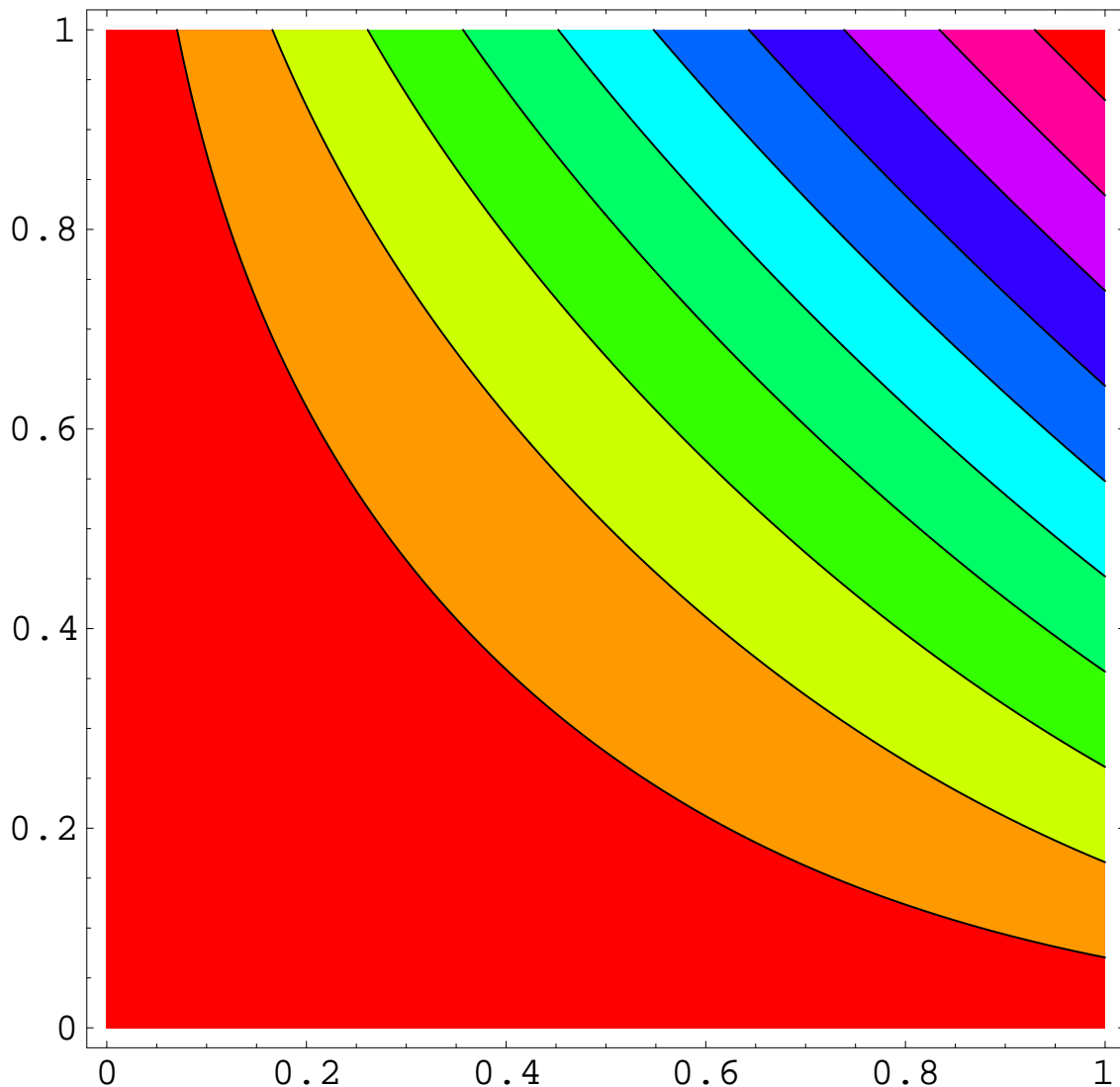
W obu przypadkach przyjmujemy te same wartości parametrów: $V_0 = Z_0 = 1$, $\sigma_V = \sigma_Z = 0.2$, $r = \sigma_V^2/2 = \sigma_Z^2/2 = 0.02$, $T = 5$.



Rysunek 1.11: Poziomice dla kopuły maksymalnej \mathcal{C}^+ .

Strategia wychodząca poza model Blacka-Scholesa

Jak widać, prawdopodobieństwo łączne popadnięcia obu firm w default, bazujące na kopule minimalnej (patrz rys.1.14) znacznie odbiega swoim kształtem od pozostałych prawdopodobieństw (najbliższe jest mu to prawdopodobieństwo oparte na kopule Franka, która daje pośredni kształt powierzchni prawdopodobieństwa łącznego (patrz rys.1.16) pomiędzy tym bazującym na kopule minimalnej a multiplikatywnej (patrz rys.1.15). Zauważmy jeszcze, że zawsze najbardziej pesymistyczną odpowiedź dostarcza prawdopodobieństwo łączne oparte na kopule maksymalnej (patrz rys.1.17). Ponadto, występują także zauważalne (niewielkie) różnice pomiędzy prawdopodobieństwem łącznym opartym na kopule multiplikatywnej (która na ogół ma wygładzoną powierzchnię) a pozostałymi prawdopodobieństwami (które mogą nawet zawierać obszary o znacznie różniącym się nachyleniu, jak np. obszar wokół centralnego fragmentu głównej przekątnej kopuły maksymalnej, który jest widoczny nawet na kopule uśrednionej $\mathcal{C}_{1/3,1/3}^F$, patrz rys.1.18), co wskazuje na



Rysunek 1.12: Poziomice dla kopuły Franka \mathcal{C}^F .

możliwość istnienia niewielkich korelacji pomiędzy oboma wierzycielami.

Kopuła gaussowska - strategia modelu Blacka-Scholesa

Kopuła gaussowska jest najbardziej skomplikowaną w stosunku do tych rozważanych dotychczas, gdyż definiuje się ją za pomocą całki podwójnej:

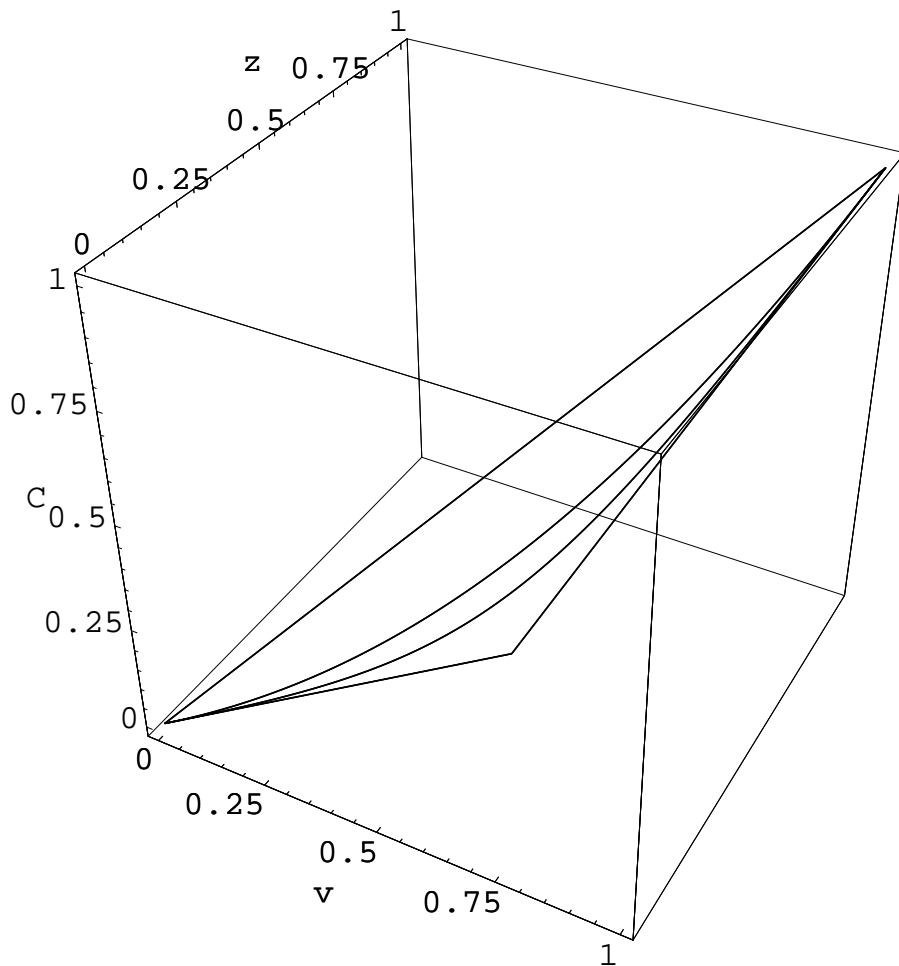
$$\mathcal{C}^G(v, z) \stackrel{\text{def.}}{=} \Phi_\rho \left(\Phi^{-1}(v), \Phi^{-1}(z) \right), \quad (1.25)$$

gdzie

$$\Phi_\rho \left(\Phi^{-1}(v), \Phi^{-1}(z) \right) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(z)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(\frac{2\rho su - s^2 - u^2}{2(1-\rho^2)} \right). \quad (1.26)$$

Stąd, wyrażenie na prawdopodobieństwo łącznego defaultu przyjmuje postać:

$$F(D_v, D_Z) = P(V \leq D_v, Z \leq D_Z)$$



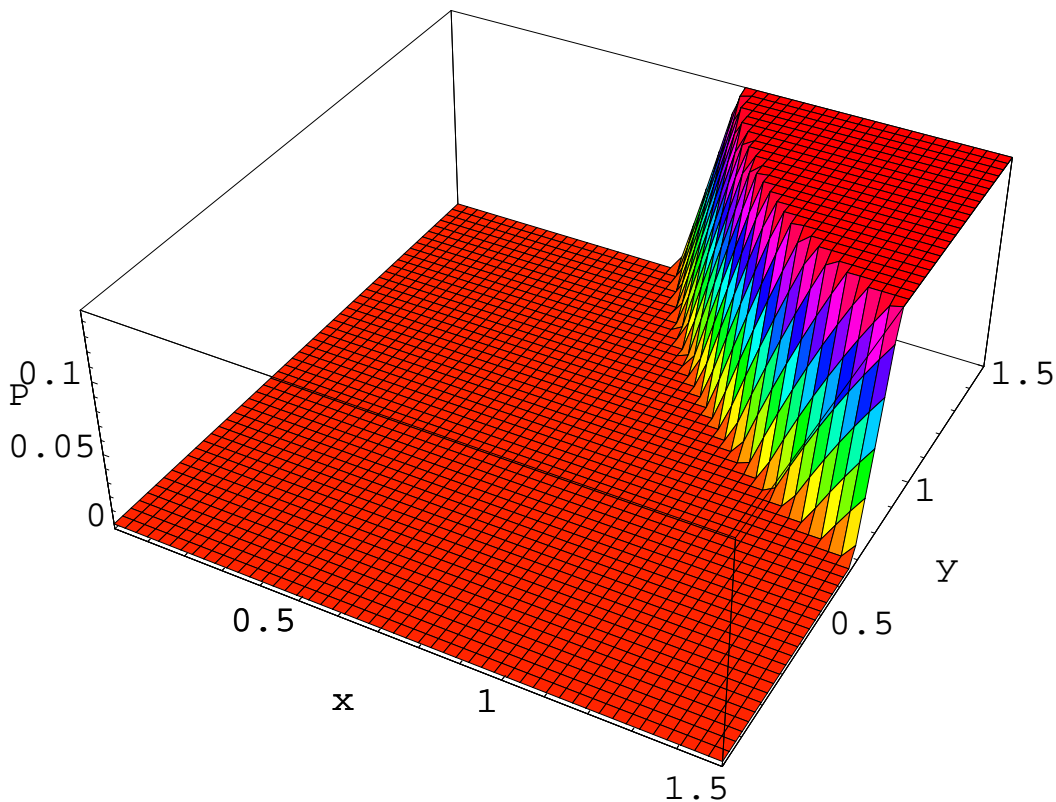
Rysunek 1.13: Porównanie krzywych grzbietowych dla czterech kopuł: minimalnej (linia leżąca najniżej), maksymalnej (linia leżąca najwyżej), multiplikatywnej (fragment paraboli leżący pomiędzy nimi) oraz Franka dla parametru $\alpha = -3$ (krzywa leżąca poniżej linii grzbietowej kopuły multiplikatywnej).

$$= \int_{-\infty}^{d_V(D_V)} \int_{-\infty}^{d_Z(D_Z)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{2\rho su - s^2 - u^2}{2(1-\rho^2)}\right). \quad (1.27)$$

Na rys.1.19 przedstawiono fragment powierzchni opisującej powyższe prawdopodobieństwo łączne dla współczynnika korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi $\ln(V/V_0)$ i $\ln(Z/Z_0)$ wynoszącego $\rho = 0.5$. Jak widać, prawdopodobieństwo to jest wielce podobne do otrzymanego na bazie kopuły multiplikatywnej (patrz rys.1.15), chociaż niewielkie różnice można dostrzec w pobliżu antyprzekątnej na płaszczyźnie (x, y) (prawdopodobieństwo na rys.1.15 nieco szybciej tam zanika niż na rys.1.19).

Ćwiczenie 1.1.3.1 (Łączne prawdopodobieństwo defaultu)

Tytułem prostego ćwiczenia, odpowiemy sobie teraz na pytanie: jak wyznaczyć łączne prawdopodobieństwo defaultu obu firm dla konkretnych wartości ich długów (przykładowo) $x(\equiv D_V) = 0.5$ oraz $y(\equiv D_Z) = 0.7$, co daje $d_V(D_V) = -1.55$, $d_Z(D_Z) = -0.798$.



Rysunek 1.14: Prawdopodobieństwo łączne popadnięcia obu firm w niewypłacalność (default) oparte na kopule minimalnej \mathcal{C}^- (tutaj $x \equiv D_V$ oraz $y \equiv D_Z$).

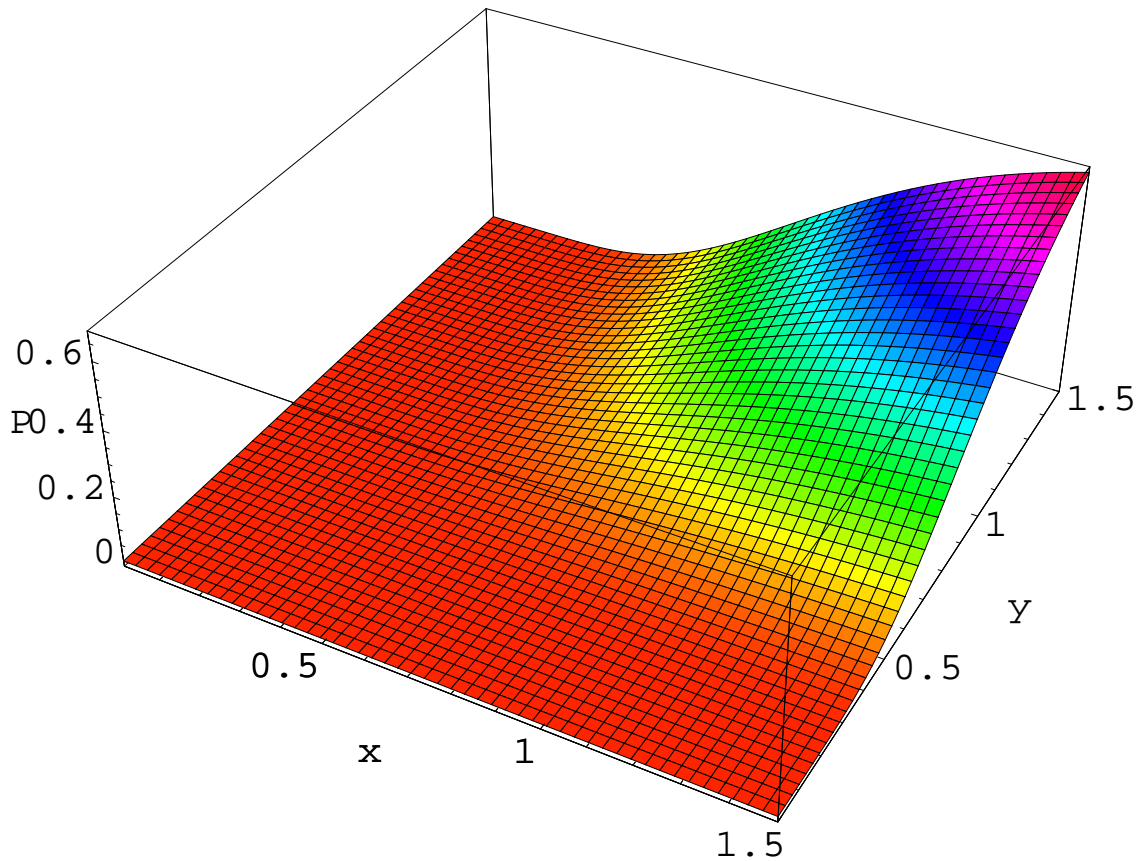
Oczywiście, prawdopodobieństwo to moglibyśmy odczytać bezpośrednio z wykresów, nam jednak chodzi o prześledzenie drogi prowadzenia obliczeń - wykorzystamy w tym celu kopułę maksymalną \mathcal{C}^+ . Nasze postępowania składa się z dwóch prostych kroków:

- 1) w pierwszym znajdujemy (korzystając np. z Matlaba lub oprogramowania Mathematica), że $\Phi(d_V(D_V = 0.5)) = 0.0605$ oraz $\Phi(d_Z(D_Z = 0.7)) = 0.2125$
- 2) w drugim, korzystając bezpośrednio z równości (1.24) otrzymujemy (wybierając konkretną kopułę, np, maksymalną), że poszukiwane prawdopodobieństwo łącznego defaultu wynosi $P(V \leq 0.5, Z \leq 0.7) = \mathcal{C}(0.0605, 0.2125) = \mathcal{C}^+(0.0605, 0.2125) = 0.0605$; proszę sprawdzić, że analogiczne prawdopodobieństwo zbudowane na kopule multiplikatywnej \mathcal{C}^\perp wynosi 0.0129, na gaussowskiej 0.0354 a na kopule minimalnej \mathcal{C}^- jest równe 0.

1.1.4 Rating w teorii kopuł: inny sposób liczenia prawdopodobieństw łącznych

Przykład 1.1.4.1 (Rating)

Łączne prawdopodobieństwo popadnięcia (przykładowo) dwóch wierzycieli w default można obliczyć także na innej drodze (niż ta podane w Przykładzie 2) a mianowicie, wpro-



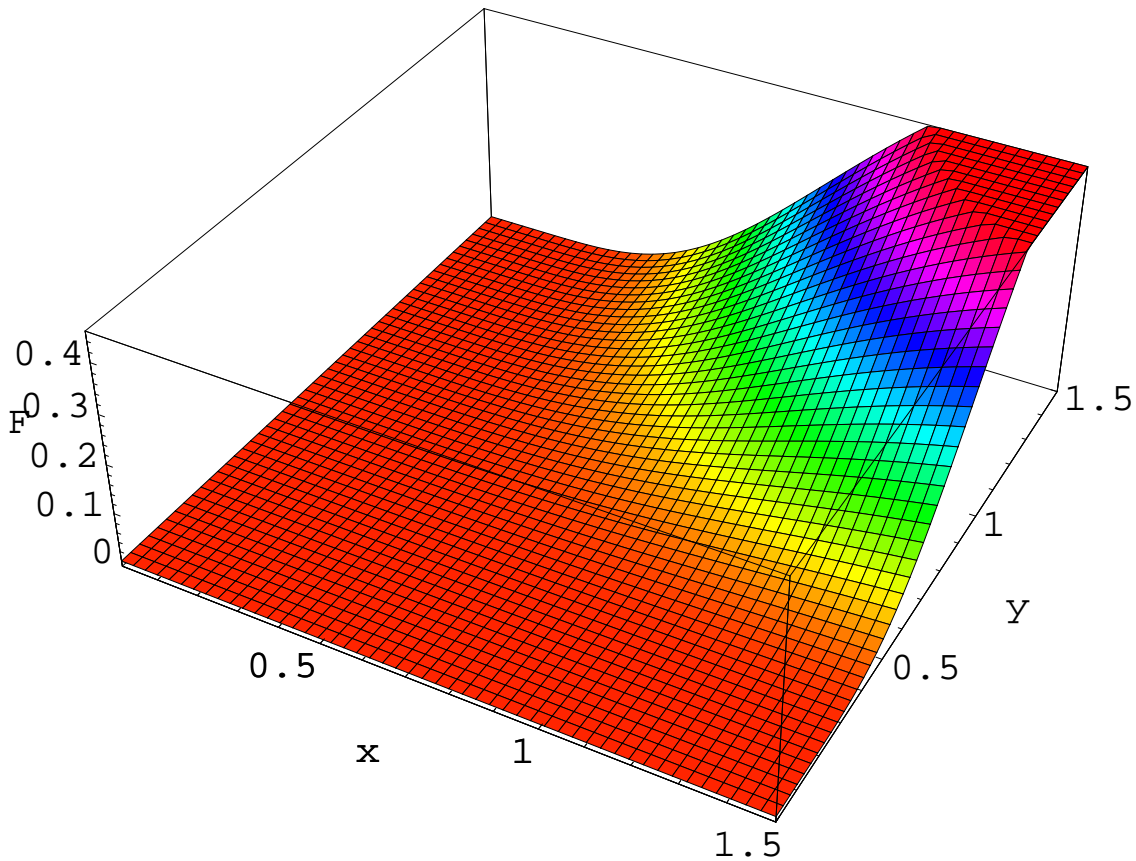
Rysunek 1.15: Prawdopodobieństwo łączne popadnięcia obu firm w default oparte na kopule multiplikatywnej \mathcal{C}^\perp (tutaj $x \equiv D_V$ oraz $y \equiv D_Z$).

wadząc do teorii kopuł powszechnie stosowany empiryczny (archiwalny, historyczny) rating firm, patrz tabela 1.1.4). Tabela ta przedstawia odsetek firm należących do czterech kategorii ratingowych, które popadły w default, dla różnych terminów spłaty długów. Innymi słowy, kolumny od 2 do 4 przedstawiają prawdopodobieństwo $P_j(t_j \leq T)$ (podane w procentach) popadnięcia w default firmy z j -ej kategorii.

Precyzyjnie rzecz ujmując, nasze zadanie brzmi następująco: **wyznaczyć (łączne) prawdopodobieństwo** $P(t_j \leq T, t_k \leq T)$, $j \neq k = AAA, AA, A, BBB$, **łącznego popadnięcia dwóch dowolnie wybranych wierzycieli w default** (gdzie, jak zwykle, T jest czasem spłaty długu, ang. *maturity time*) **używając jakiejś kopuły oraz zamieszczonych w tabeli prawdopodobieństw**. Rozwiązanie tego zadania jest natychmiastowe i opiera się na wykorzystaniu równości (1.12), którą w języku tego zadania można przepisać następująco:

$$F(T, T) = P(t_j \leq T, t_k \leq T) = C(F_j(T), F_k(T)), \quad j \neq k = AAA, AA, A, BBB. \quad (1.28)$$

Weźmy trzy pary firm, na przykład jako pierwszą w każdej parze niech będzie firma o najwyższym ratingu AAA natomiast jako drugie firmy w każdej parze weźmy kolejno te z pozostałych kategorii, czyli AA , A oraz BBB dla wybranych lat $T = 1, 5, 10, 15$. Podstawiając do równości (1.28) odpowiednie prawdopodobieństwa z tabeli 1.1.4 (z kolumn 2 - 5 oraz wierszy 1, 5, 10, 15) otrzymujemy, biorąc przykładowo kopułę minimalną (pierwsza



Rysunek 1.16: Prawdopodobieństwo łączne P popadnięcia obu firm w default oparte na kopule Franka (tutaj $x \equiv D_V$ oraz $y \equiv D_Z$).

podkolumna w każdej z kolumn 2 - 4), multiplikatywną (druga podkolumna) oraz maksymalną (trzecia podkolumna), wyniki które zestawiono w tabeli 1.1.4. Jak widać, wraz ze wzrostem czasu realizacji T prawdopodobieństwo łącznego defaultu rośnie; podobnie rzecz się ma z tym łącznym prawdopodobieństwem (nie rośnie), gdy maleje rating (tutaj) drugiej firmy w każdej parze i to niezależnie od stosowanych kopuł. Dalsza, pogłębiona analiza tego przykładu może być związana np. z analizą efektu, który można nazwać "wspólnym ruchem" (ang. *movement together*) zmiennych losowych połączonych daną kopułą. Związane to jest z interpretacją roli parametrów określających wybraną kopułę (np. parametru α w kopule Franka czy też ρ w kopule Gaussa).

1.1.5 Ocena ryzyka rynkowego a probabilistyczna interpretacja kopuły

Przykład 1.1.5.1 (VaR)

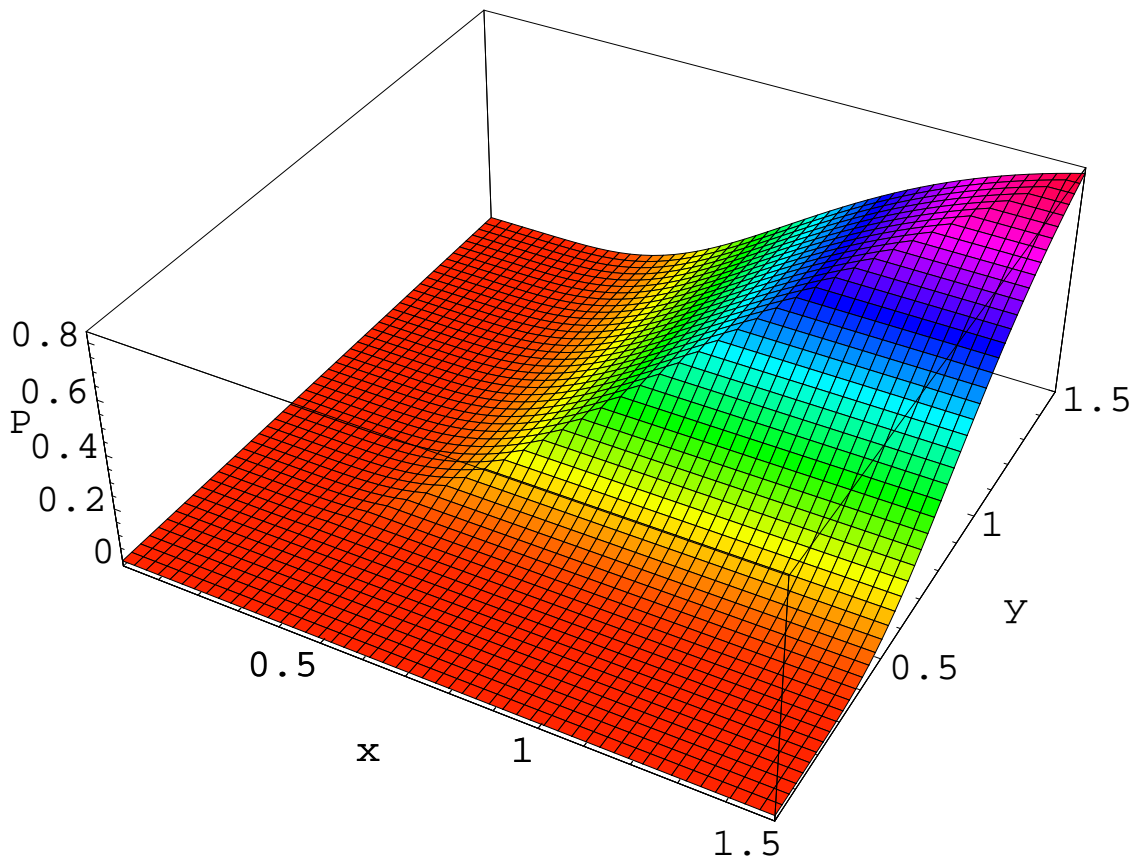
Za pomocą niniejszego przykładu pokażemy w jaki sposób można znaną metodę oceny ryzyka zwaną VaR (ang. *Value at Risk*), czyli metodą 'Wielkości Zagrożonej (nadmiernym) Ryzykiem' wyrazić za pomocą teorii kopuł w przypadku VaR (przy-

Tabela 1.1: Archiwalne prawdopodobieństwa defaultów (S&P, 2000)

Termin spłaty długu T [rok]	Rating [%]			
	AAA	AA	A	BBB
1	0.00	0.01	0.04	0.22
2	0.00	0.04	0.11	0.50
3	0.03	0.09	0.19	0.79
4	0.06	0.16	0.32	1.30
5	0.10	0.25	0.49	1.80
7	0.26	0.53	0.83	2.73
8	0.40	0.63	1.01	3.10
9	0.45	0.70	1.21	3.39
10	0.51	0.79	1.41	3.68
15	0.51	1.07	1.83	4.48

Tabela 1.2: Prawdopodobieństwa łącznych defaultów wyznaczone ze wzoru (1.28) na podstawie tabeli 1.1.4 w oparciu o kopuły minimalną, multiplikatywną i maksymalną

T [rok]	$F(T, T)_{(AAA, AA)}$	$F(T, T)_{(AAA, A)}$	$F(T, T)_{(AAA, BBB)}$
1	0.0, 0.0, 0.0	0.0, 0.0, 0.0	0.0, 0.0, 0.0
5	0.0, 0.000025, 0.001	0.0, 0.000049, 0.001	0.0, 0.000018, 0.001
10	0.0, 0.0000403, 0.0051	0.0, 0.000072, 0.0051	0.0, 0.00019, 0.0051
15	0.0, 0.000055, 0.0051	0.0, 0.000093, 0.0051	0.00, 0.00023, 0.0051



Rysunek 1.17: Prawdopodobieństwo łączne P popadnięcia obu firm w niewypłacalność oparte na kopule maksymalnej \mathcal{C}^+ (tutaj $x \equiv D_V$ oraz $y \equiv D_Z$).

kładowo) dwuskładnikowego portfela walorów; umożliwia to modelowanie wprowadzonej przez tą metodę miary ryzyka. W tym celu musimy jednak najpierw omówić zagadnienie warunkowania kopuł.

Dygresja 1.1.5.1 (Probabilistyczna interpretacja kopuły)

Z definicji kopuły (patrz rozdz.1.1.2) wynika wprost, że jest ona dystrybuantą łączną zależną od zmiennych losowych, z których każda z osobna podlega rozkładowi jednorodnemu na odcinku $[0, 1]$, co można zapisać w następujący sposób:

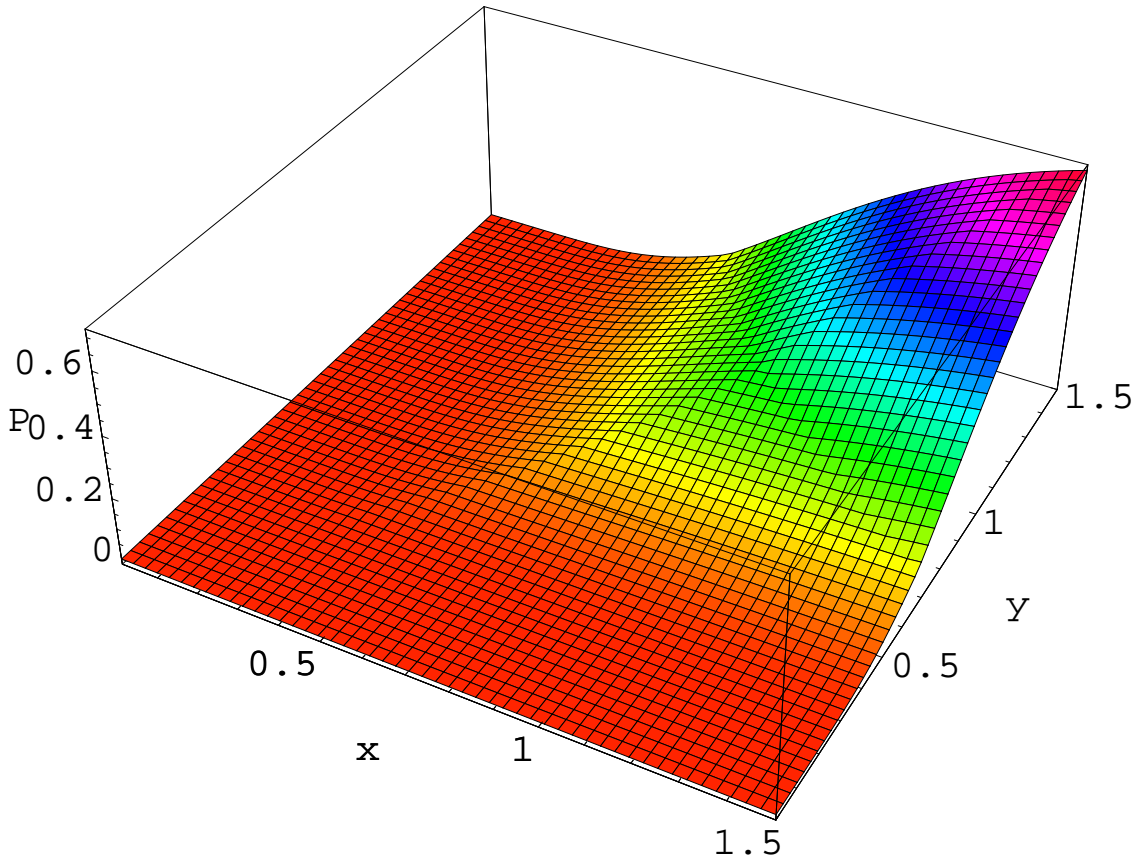
$$\mathcal{C}(v, z) = P(U_1 \leq v, U_2 \leq z) \quad (1.29)$$

gdzie U_1, U_2 są właśnie tymi zmiennymi podlegającymi rozkładowi jednorodnemu. Zauważmy, że jednocześnie są one dystrybuantami określonymi na innych, bardziej fundamentalnych zmiennych losowych, odpowiednio X i Y , tzn.

$$U_1 = F_1(X), v = F_1(x); U_2 = F_2(Y), z = F_2(y). \quad (1.30)$$

Taka superponowana zależność jest typowa dla teorii kopuł, pozwalając na wyrażenie równości (1.29) w następujących równoważnych postaciach

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(F_1(x), F_2(y)) &= P(U_1 \leq F_1(x), U_2 \leq F_2(y)) = P(F_1^{-1}(U_1) \leq x, F_2^{-1}(U_2) \leq y) \\ &= P(X \leq x, Y \leq Y) = F(x, y). \end{aligned} \quad (1.31)$$



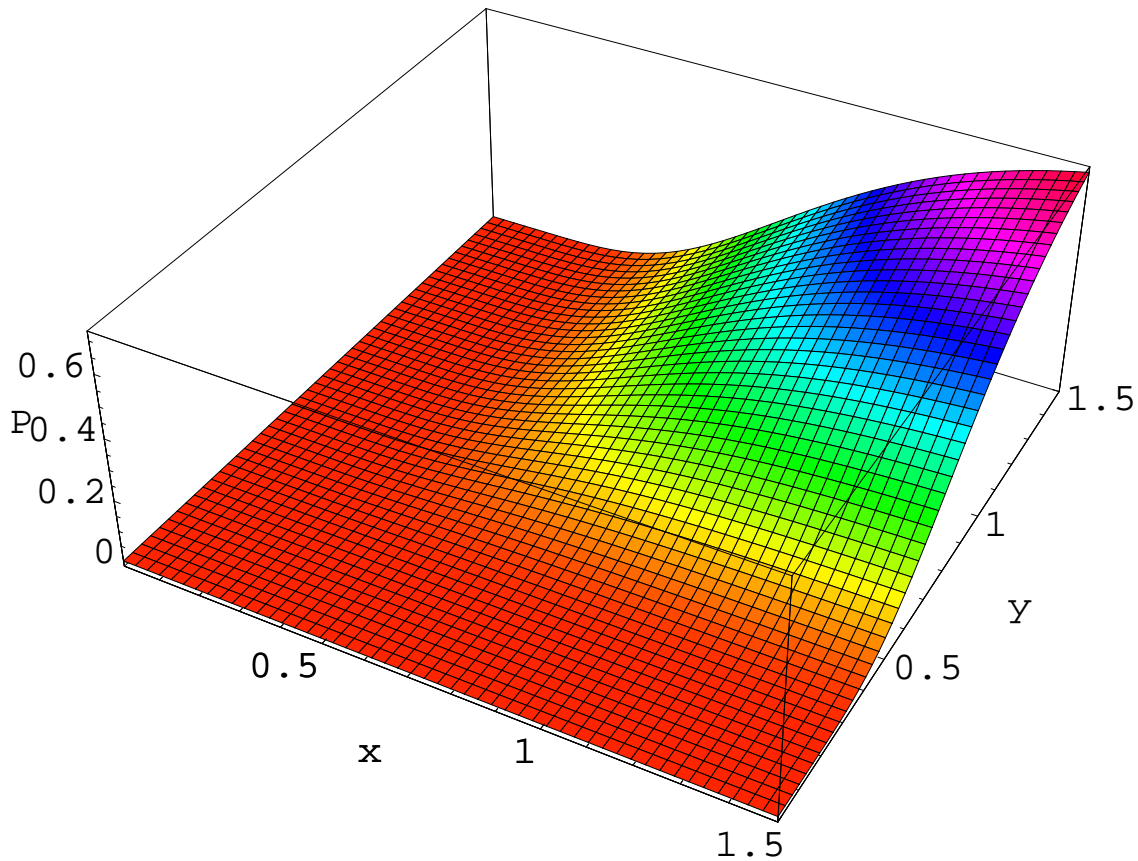
Rysunek 1.18: Łączne prawdopodobieństwo P popadnięcia obu firm w niewypłacalność oparte na wewnętrznej kopule $\mathcal{C}_{1/3,1/3}^F$ należącej do rodziny Fréchet'a (tutaj $x \equiv D_V$ oraz $y \equiv D_Z$).

Z równości (1.29) oraz z definicji kopuły (rozdz.1.1.2) wynikają ważne (łatwe do wykazania) własności, niezbędne m.in. do prowadzenia symulacji, łączące kopuły z dystrybucjami warunkowymi

$$\begin{aligned}
P(U_1 \leq v, U_2 > z) &= v - C(v, z), \\
P(U_1 > v, U_2 \leq z) &= z - C(v, z), \\
P(U_1 \leq v \mid U_2 \leq z) &= \frac{C(v, z)}{z}, \\
P(U_1 \leq v \mid U_2 > z) &= \frac{v - C(v, z)}{1 - z}, \\
\mathcal{C}_{1|2}(v, z) &\stackrel{\text{def.}}{=} P(U_1 \leq v \mid U_2 = z) = \frac{\partial C(v, z)}{\partial z} \\
\mathcal{C}_{2|1}(v, z) &\stackrel{\text{def.}}{=} P(U_1 = v \mid U_2 \leq z) = P(U_2 \leq z \mid U_1 = v) = \frac{\partial C(v, z)}{\partial v}. \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Co więcej, z równości (1.29) wynika bezpośrednio definicja gęstości kopuły

$$c(v, z) = \frac{\partial^2 C(v, z)}{\partial v \partial z}, \quad (1.33)$$



Rysunek 1.19: Prawdopodobieństwo łączne P popadnięcia obu firm w niewypłacalność oparte na kopule gaussowskiej \mathcal{C}^G (tutaj $x \equiv D_V$, $y \equiv D_Z$ oraz $\rho = 0.5$).

która jest nieujemna i określona na kwadracie I^2 . Gęstość tą można powiązać z gęstością $f(x, y)$ rozkładu posiadającego dystrybuantę $F(x, y)$ w następujący sposób

$$c(F_1(x), F_2(y)) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)f_2(y)}. \quad (1.34)$$

Wszystkie powyższe własności są wykorzystywane w dalszych rozważaniach.

Przykład 1.1.5.1 (VaR, ciąg dalszy)

Zatem, interesujemy się stratą (czyli ujemną wartością stopy zwrotu) Z (w ustalonej chwili T) z portfela dwuwalorowego, przy zadanym poziomie ufności α . Tzn. wprowadzony został rozkład prawdopodobieństwa P w ramach, którego nasze zagadnienie można wyrazić ściśle w postaci następującej równości:

$$\mathcal{P}_{VaR} \stackrel{\text{def.}}{=} F(VaR) = P(Z \leq VaR) = \alpha \quad (1.35)$$

gdzie F jest dystrybuantą zmiennej losowej Z , natomiast poszukiwana wielkość progowa (tutaj ujemna) VaR dopuszczalnej straty (ang. *Vale at Risk*, VaR, czyli 'Wielkość Zagrożona Ryzykiem') jest rozwiązaniem powyższego równania, czyli $VaR = F^{-1}(\alpha)$.

Na ostatnią równość w (1.35) można spojrzeć także nieco inaczej a mianowicie poprzez równanie równoważne postaci

$$P(-Z \geq -VaR) = \alpha, \quad (1.36)$$

gdzie teraz obie wielkości $-Z$ oraz $-VaR$ są nieujemne. Zatem, jeżeli na stratę spojrzymy jak na wielkość nieujemną to równanie (1.36) mówi nam, że dla zadanego poziomu ufności α straty nieakceptowalne, czyli nieakceptowalny poziom strat jest nie mniejszy od progowej Wartości Zagrożonej Ryzykiem VaR ; ta progowa wartość jest z definicji jednoznacznie funkcją przyjętej oceny ryzyka \mathcal{P}_{VaR} .

Możliwe jest jeszcze inne spojrzenie na stratę (wciąż traktowaną jak wielkość nieujemna); mianowicie, poprzez przekształcenie równania (1.36)

$$\begin{aligned} P(-Z \geq -VaR) + P(-Z < -VaR) &= 1 + \alpha + P(-Z < -VaR) \\ &\equiv \theta \stackrel{\text{def.}}{=} 1 - \alpha = P(-Z < -VaR). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Równość ta mówi po prostu, że straty akceptowalne zachodzą z prawdopodobieństwem równym θ ; niekiedy właśnie θ nazywa się poziomem ufności.

Stopę zwrotu z portfela dwuwalorowego można wyrazić jako kombinację liniową stóp zwrotu na obu walorach X i Y , czyli $Z = \beta X + (1 - \beta)Y$, gdzie $\beta \in [0, 1]$ jest wagą waloru X w portfelu zwaną współczynnikiem alokacji. Zatem można napisać, że $P(Z \leq VaR) = P(\beta X + (1 - \beta)Y \leq VaR) = P(X \leq \frac{1}{\beta} VaR - \frac{1-\beta}{\beta} Y)$, przy czym to ostatnie wyrażenie można przedstawić w postaci zawierającej potrzebne tutaj odpowiednie prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P\left(X \leq \frac{1}{\beta} VaR - \frac{1-\beta}{\beta} Y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} P\left(X \leq \frac{1}{\beta} VaR - \frac{1-\beta}{\beta} y \mid Y = y\right) f_2(y) dy, \quad (1.38)$$

gdzie f_2 jest gęstością rozkładu zmiennej losowej Y . Zauważmy, że w równości tej wielkość VaR jest ustalona a zmianie ulegają zmienne losowe X i Y ale w taki sposób aby spełniona była, znajdującą się tam, wewnętrzna nierówność. Ostatecznie, dzięki przedostatniemu wyrażeniu w (1.32), wzór (1.38) można zapisać za pomocą kopuły warunkowej

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(X \leq x = \frac{1}{\beta} VaR - \frac{1-\beta}{\beta} y \mid Y = y\right) f_2(y) dy = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_{1|2}\left(F_1\left(x = \frac{1}{\beta} VaR - \frac{1-\beta}{\beta} y\right), F_2(y)\right) f_2(y) dy. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ponieważ kopułę warunkową można już łatwo wyrazić poprzez odpowiednią pochodną kopuły bezwarunkowej (patrz przedostatnie wyrażenie w (1.32)), więc tym samym uzskailiśmy równanie całkowe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_{1|2}\left(F_1\left(\frac{1}{\beta} VaR - \frac{1-\beta}{\beta} y\right), F_2(y)\right) f_2(y) dy = \alpha = \mathcal{P}_{VaR}, \quad (1.40)$$

którego rozwiązaniem jest poszukiwana Wielkość Narażona na Ryzyko, czyli VaR . Oczywiście, aby efektywnie rozwiązać powyższe równanie należy:

- zdecydować się na wybór zarówno jakiejś kopuły jak też
- rozkładów marginalnych a ponadto,
- zdecydować się na jakąś wielkość współczynnika alokacji i wreszcie
- ustalić α , czyli przyjąć konkretną ocenę ryzyka.

Przy okazji zauważmy, że współczynnik alokacji pozwala zdefiniować współczynnik dywersyfikacji w postaci

$$\delta = 2 \left| \beta - 1/2 \right| - 1/2, \quad (1.41)$$

gdzie δ przyjmuje wartość minimalną $\delta = 0$ dla portfela całkowicie niezdywersyfikowanego (czyli jednowalorowego, określonego przez $\beta = 0$ albo $\beta = 1$), natomiast osiąga wartość maksymalną $\delta = 1$ (czyli $\beta = 1/2$) dla portfela w pełni zdywersyfikowanego.

W poniższym ćwiczeniu wyznaczamy VaR dla różnych wartości β korzystając przykładowo z kopuły multiplikatywnej i jednakowych rozkładów brzegowych t-Studenta.

Ćwiczenie 1.1.5.1 (VaR dla portfela dwuwalorowego)

Przedstawiamy teraz w postaci tabelarycznej (patrz tabela 1.3) wartości VaR wyznaczone z równania całkowego (1.40) na drodze numerycznej, metodą kolejnych iteracji⁷, przykładowo

- dla kopuły multiplikatywnej $\mathcal{C}^\perp(v, z) = v z$, dla której kopuła warunkowa

$$\mathcal{C}_{1|2}(v, z) = v = F_1(x) \quad (1.42)$$

(patrz przedostatnie wyrażenie w (1.32)) oraz

- przyjmując, że zmienne losowe X i Y podlegają rozkładowi t-Studenta odpowiednio o 5 i 6 stopniach swobody, tzn.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)\sqrt{5\pi}} \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{u^2}{3}\right)^{-1} du \\ &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)\sqrt{5\pi}} \left[\frac{x}{1+x^2/5} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1+x^2/5} \right) + \frac{3\sqrt{5}}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) \right) \right], \\ x &= \frac{1}{\beta} VaR - \frac{1-\beta}{\beta} y, \\ f_2(y) &= \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(3)\sqrt{6\pi}} \left(1 + \frac{u^2}{6}\right)^{-7/2}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

- dla porównania dla dwóch charakterystycznych poziomów ufności $\alpha = 0.050$ i $\alpha = 0.010$ oraz

⁷Rozwiązywanie tego typu równań można dokonać w ramach Matlab lub przy użyciu oprogramowania Mathematica.

Tabela 1.3: Zestaw wartości VaR dla dwóch poziomów ufności i pięciu wartości współczynnika alokacji obliczonych na bazie kopuły multiplikatywnej i brzegowych rozkładach t-Studenta.

β	0.1	0.25	0.50	0.75	0.90
$\alpha = 0.050$	-1.762	-1.552	-1.425	-1.595	-1.824
$\alpha = 0.010$	-2.840	-2.463	-2.226	-2.602	-3.038

- dla pięciu wybranych wartości współczynnika alokacji β .

Dodajmy, że dla rozkładu t-Studenta udało się wykonać całkowanie w pierwszym wyrażeniu (1.43) na drodze analitycznej; w przypadku wielu innych rozkładów wykonanie tego całkowania jest możliwe jedynie na drodze numerycznej.

Jak widać, **całkowita dywersyfikacja portfela (odpowiadająca dla obu poziomów ufności $\beta = 0.50$) minimalizuje VaR, czyli daje szansę na wystąpienie najmniejszych nieakceptowalnych strat z portfela**. To znaczy, że w takim przypadku straty mogą (ale nie muszą) być mniejsze od tych dla pozostałych przypadków. Zarazem jednak, **dywersyfikacja poszerza przedział nieakceptowalnych strat** - jest to cena jaką za nią się płaci. Wniosek ten ma charakter ogólny, słuszny dla dowolnej kopuły oraz dowolnych rozkładów brzegowych.

Ponadto, ważne są następujące dodatkowe cechy:

- ma miejsce niewielka asymetria VaR w zależności od β tzn. $VaR(\beta) < VaR(1 - \beta)$ co oznacza, że walor Y (podlegający rozkładowi t-Studenta o większej liczbie stopni swobody niż analogiczny rozkład waloru X) jest nieco bardziej ryzykowny,
- można sprawdzić (powtarzając obliczenia analogiczne do powyższych - **możemy je przeprowadzić o ile uznacie to Państwo za celowe**), że zastąpienie rozkładów t-Studenta rozkładem normalnym daje (dla dowolnego $\beta \neq 0$ i mniejszej wartości α) większe wartości VaR, co wynika z faktu, że w pierwszym przypadku stosujemy rozkłady posiadające pogrubione ogony. Dotyczy to tylko mniejszej wartości α , gdyż pogrubione ogony zaczynają odgrywać rolę dopiero dla sytuacji asymptotycznych.

Ćwiczenie 1.1.5.2 (Gęstości kopuł rodziny Fréchet)

Korzystając bezpośrednio z definicji (1.34) można wykazać, że gęstość dowolnej kopuły należącej do rodziny kopuł Fréchet jest postaci

$$c^F(v, z) = 1 - \alpha - \beta, \quad (1.44)$$

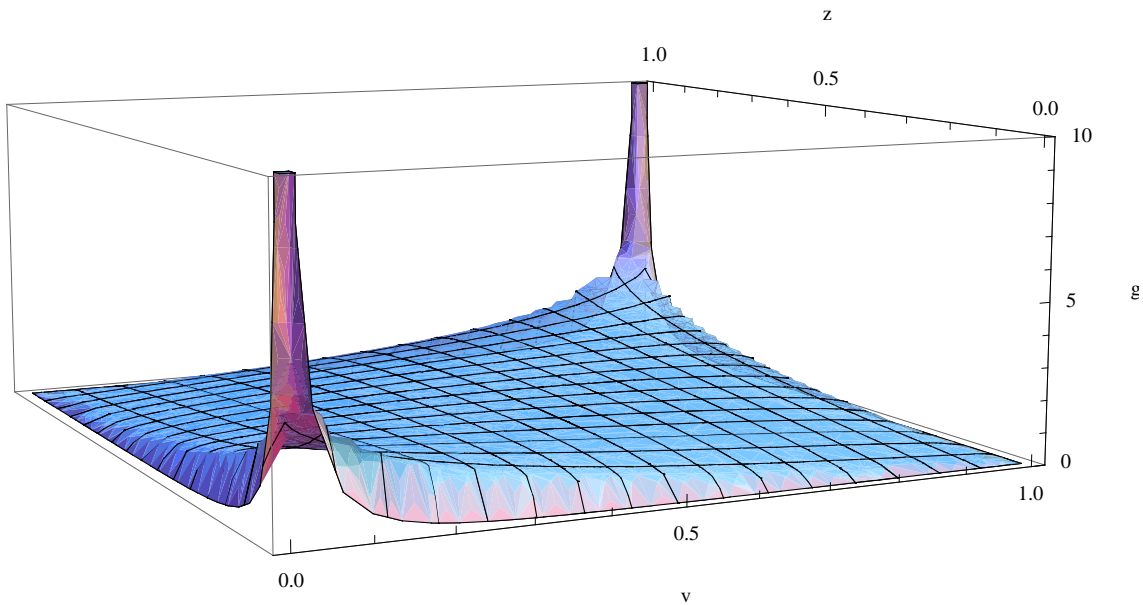
co wynika natychmiast z faktu, że gęstości kopuł ograniczających \mathcal{C}^\pm znikają, natomiast gęstość kopuły multiplikatywnej \mathcal{C}^\perp jest równa 1.

Pokaz 1.1.5.1 (Gęstość kopuły gaussowskiej oraz kopuła gaussowska)

Dla ilustracji, przedstawiamy poniżej wykres gęstości bi-kopuły gaussowskiej danej wzorem

$$c^G(v, z) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{2\rho xy - x^2 - y^2}{2(1-\rho^2)}\right), \quad (1.45)$$

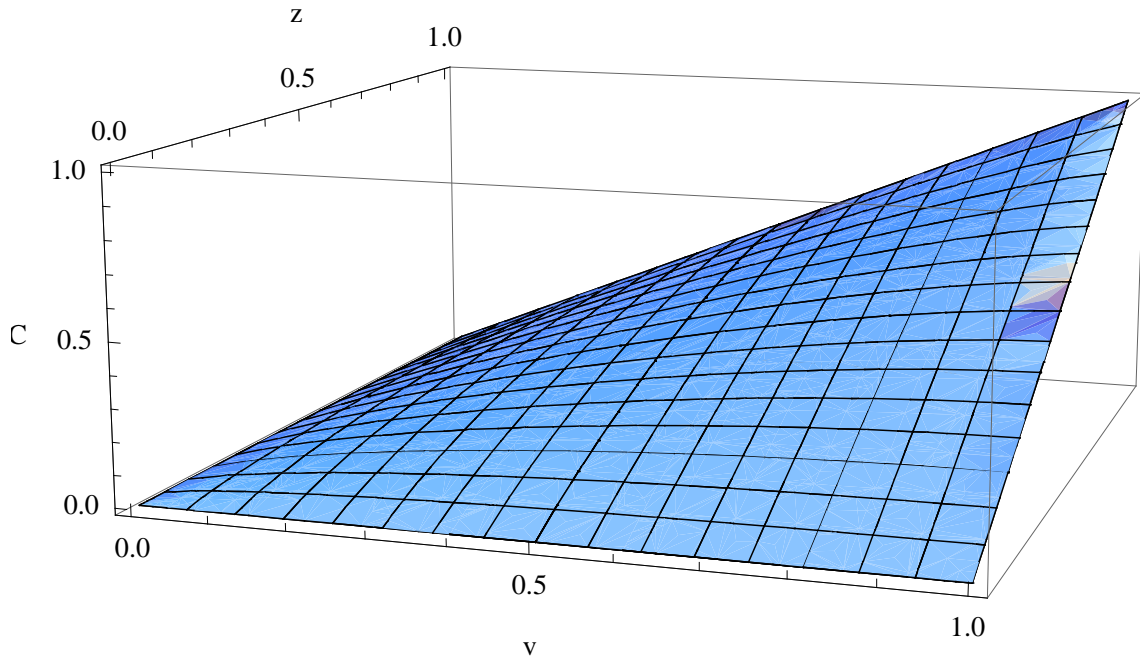
gdzie $x = \Phi^{-1}(v)$ a $y = \Phi^{-1}(z)$. Na podstawie tego wzoru wykonany został wykres na rys.1.20, który wskazuje na istnienie ostrych lokalnych maksimów (ale nie singularności) w punkcie $(v = 0, z = 0)$ oraz $(v = 1, z = 1)$. Natomiast sama kopuła jest postaci



Rysunek 1.20: Gęstość kopuły gaussowskiej danej wzorem (1.45) dla parametru $\rho = 0.5$. Zauważmy, że oba ostre maksima zostały ścięte na wysokości równwaj 10 celem lepszej wizualizacji całej funkcji.

$$\mathcal{C}^G(v, z) = \Phi_\rho\left(\Phi^{-1}(v), \Phi^{-1}(z)\right) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(z)} \exp\left(\frac{2\rho st - s^2 - t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt. \quad (1.46)$$

Na wykresie na rys.1.21 przedstawiono tą kopułę przykładowo dla współczynnika liniowej korelacji $\rho = 0.5$ a na wykresie na rys.1.21 dla współczynnika korelacji $\rho = -0.5$. Dodatkowo, dla pełniejszego porównania na rys.1.23 przedstawiono kopułę przy braku liniowych korelacji ($\rho = 0.0$).



Rysunek 1.21: Wykres dwuwymiarowej kopuły gaussowskiej danej wzorem (1.46) dla współczynnika korelacji $\rho = 0.5$.

Pokaz 1.1.5.2 (Gęstość kopuły T -Studenta)

Dla porównania, analogiczne wykresy do zamieszczonych w Pokazie 1.1.5.2 przedstawiamy dla gęstości kopuły T -Studenta postaci

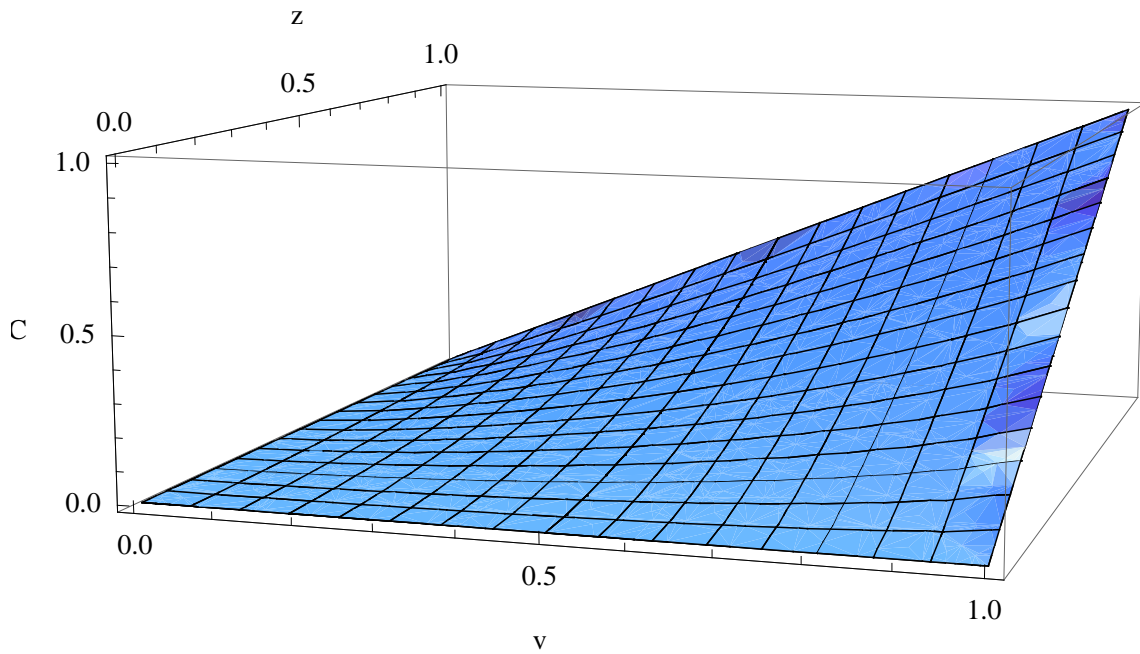
$$c_{\rho,v}^S(v, z) = \rho^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)^2} \frac{\left(1 + \frac{x^2+y^2-2\rho xy}{v(1-\rho^2)}\right)^{-(v+2)/2}}{\left(1 + \frac{x^2}{v}\right) \left(1 + \frac{y^2}{v}\right)}, \quad (1.47)$$

gdzie $x = t_v^{-1}(v)$ i $z = t_v^{-1}(z)$ oraz samej kopuły.

Do dalszych rozważań będziemy potrzebowali kopuły dopełniającej (dualnej, zwanej także kopułą przetrwania, ang. *survival copula*) - jej znaczenie przedstawimy dalej na konkretnym przykładzie (komplementarnym do omawianego na wstępie Przykładu 1.1.1.1).

Definicja kopuły dualnej

Przykład 1.1.5.2 (Kopuła dualna)



Rysunek 1.22: Wykres dwuwymiarowej kopuły gaussowskiej danej wzorem (1.46) dla współczynnika korelacji $\rho = -0.5$.

Rozważmy teraz (znowu żeby uniknąć abstrakcyjnego charakteru) cyfrową opcję kupna (ang. *digital (binary) call option*, DC) wystawioną, tak jak poprzednio, na dwa instrumenty bazowe, czyli na kurs dolara i kurs euro. Opcja ta może być zrealizowana w ustalonym czasie T o ile jest w cenie tzn. **o ile kurs dolara x nie jest niższy od ustalonego kursu x_{USD} a kurs euro y od ustalonego kursu y_{EURO} .**

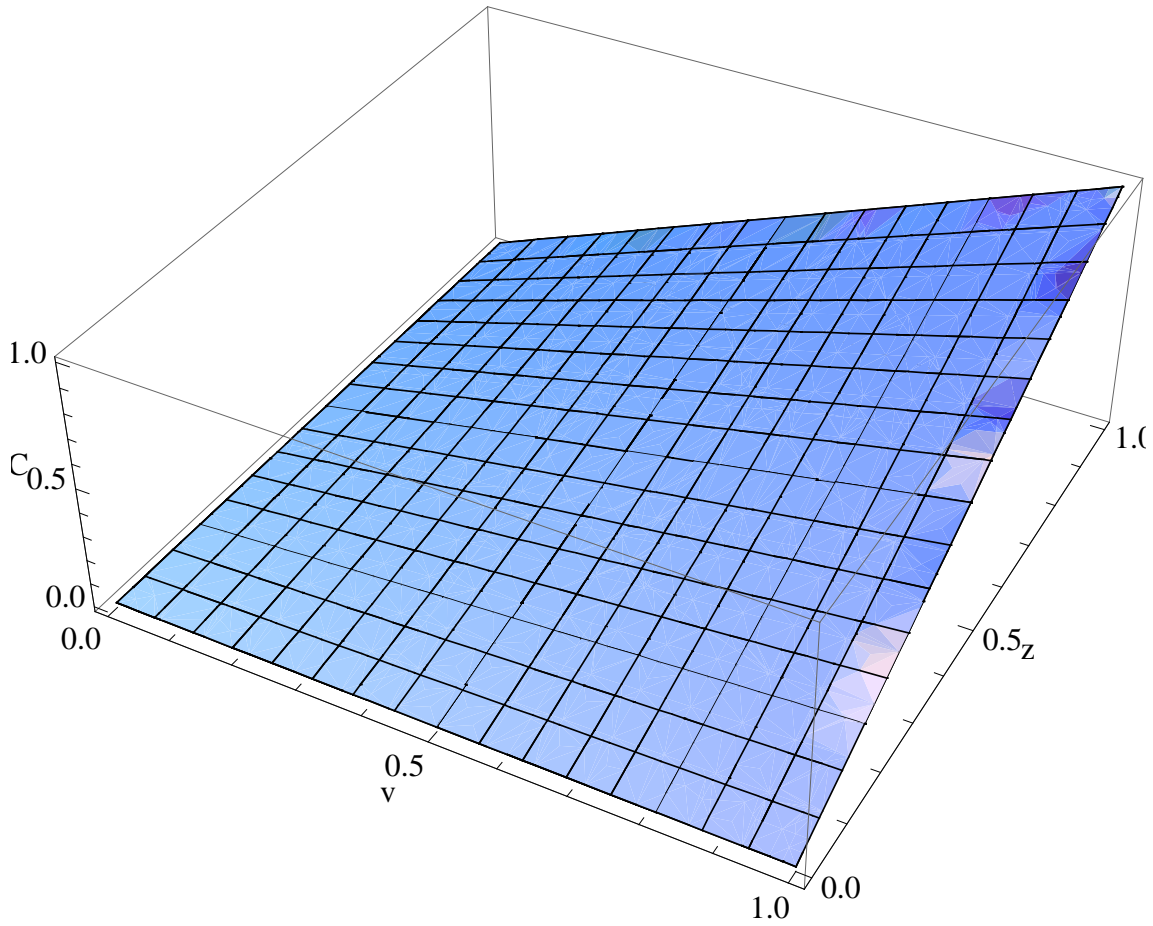
Głównym elementem ceny takiej opcji (analogicznie jak dla opcji sprzedaży) jest (analogicznie jak poprzednio, wolne od ryzyka) prawdopodobieństwo połączone zdyskontowane na chwilę bieżącą, zależne bezpośrednio od łącznego, dwuwymiarowego prawdopodobieństwa skumulowanego powyżej opisanych zdarzeń - oznaczmy to prawdopodobieństwo przez $\bar{F}(x_{USD}, y_{EURO})$. Zatem,

$$DC_t = \exp[-r(T - t)] \bar{F}(x_{USD}, y_{EURO}), \quad (1.48)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_{USD}, y_{EURO}) &\stackrel{\text{def.}}{=} 1 - F(x_{USD}, y_{EURO}) = 1 - P(x \leq x_{USD}, y \leq y_{EURO}) \\ &= P(x > x_{USD}, y > y_{EURO}). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Podobnie jak poprzednio, wyznaczenie tego prawdopodobieństwa skumulowanego bezpośrednio z danych empirycznych a ponadto, modelowanie go na drodze teoretycznej jest



Rysunek 1.23: Wykres dwuwymiarowej kopuły gaussowskiej danej wzorem (1.46) dla znikającego współczynnika korelacji $\rho = 0.0$.

trudne. Jak się okazuje, to co można zrobić to skonstruować wspomniane powyżej prawdopodobieństwo skumulowane korzystając z brzegowych prawdopodobieństw skumulowanych, zdefiniowanych analogicznie,

$$\begin{aligned}\bar{F}_1(x_{USD}) &\stackrel{\text{def.}}{=} 1 - F_1(x_{USD}) = 1 - P_1(x \leq x_{USD}) = P_1(x > x_{USD}), \\ \bar{F}_2(y_{EURO}) &\stackrel{\text{def.}}{=} 1 - F_2(y_{EURO}) = 1 - P_2(y \leq y_{EURO}) = P_2(y > y_{EURO}),\end{aligned}\quad (1.50)$$

wyznaczonych bezpośrednio z danych empirycznych dostępnych osobno dla każdej zmiennej losowej x i y .

Konkretniej mówiąc, istnieje taka funkcja kopuły $\bar{\mathcal{C}}(\bar{v}, \bar{z})$ dualna w stosunku do kopuły \mathcal{C} , która czyni zadość równości

$$\bar{F}(x_{USD}, y_{EURO}) = \bar{\mathcal{C}}(\bar{F}_1(x_{USD}), \bar{F}_2(y_{EURO})); \quad (1.51)$$

można wykazać, że posiada ona następującą pożyteczną własność:

$$\bar{\mathcal{C}}(\bar{F}_1(x_{USD}), \bar{F}_2(y_{EURO})) = 1 - F_1(x_{USD}) - F_2(y_{EURO}) + \mathcal{C}(F_1(x_{USD}), F_2(y_{EURO})), \quad (1.52)$$

usprawiedliwiającą nazwę "kopuła dualna". Właśnie powyższe równanie, ale zapisane w postaci

$$\bar{C}(\bar{v}, \bar{z}) = 1 - v - z + C(v, z) = \bar{v} + \bar{z} + C(1 - \bar{v}, 1 - \bar{z}) - 1, \quad (1.53)$$

gdzie $\bar{v} = 1 - v$ oraz $\bar{z} = 1 - z$ są zmiennymi dualnymi odpowiednio do zmiennych v oraz z , pozwala łatwo stwierdzić, że np. kopułą dualną do multiplikatywnej jest także kopuła multiplikatywną ale przedstawioną w zmiennych dualnych.

Dodajmy jeszcze, że równość (1.53) uniemożliwia (jak trzeba) powstanie arbitrażu. Warto w tym miejscu podkreślić, że kopuły różne od gaussowskich używa się zawsze wtedy, gdy np. wyceniając pochodne instrumenty finansowe, bądź też oceniając ryzyko (kredytowe lub rynkowe) wychodzimy poza strategię Blacka-Scholesa.

Przykład 1.1.5.3 (Default szokowy)

Omówimy teraz **szczególnie aktualne zagadnienie łącznej niewypłacalności (łączonego popadnięcia w default) dwóch podmiotów gospodarczych (np. firm, korporacji, branż lub sektorów) na skutek działania jakiś zewnętrznych (egzogenicznych) przyczyn (szoków)**; o aktualności tego przykładu nie trzeba chyba nikogo przekonywać.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że pierwszym z tych podmiotów jest jakiś bank a drugim jakaś firma motoryzacyjna. Przypuśćmy dalej, że na te podmioty działają trzy rodzaje szoków: po jednym na oba podmioty z osobna (tzn. szoki dedykowane związane tylko z danym podmiotem) i jeden wspólny (totalny) np. związany z ogólnym stanem gospodarki. Zakładamy, że szoki te są od siebie niezależne (brak jakichkolwiek korelacji krzyżowych oraz autokorelacji), tzn. czasy pojawienia się tych szoków S_1 , S_2 i S_{12} podlegają rozkładowi Poissona:

$$g_j(S_j) = \begin{cases} \lambda_1 \exp(-\lambda_1 S_1), & \text{w przypadku banku} \\ \lambda_2 \exp(-\lambda_2 S_2), & \text{w przypadku firmy motoryzacyjnej} \\ \lambda_{12} \exp(-\lambda_{12} S_{12}), & \text{w przypadku banku i firmy motoryzacyjnej} \end{cases} \quad (1.54)$$

gdzie λ_j^{-1} , $j = 1, 2, 12$, jest średnim czasem pojawienia się szoku j .

Jeżeli czas popadnięcia podmiotu w default oznaczmy przez T_j , $j = 1, 2$, to zachodzi relacja, którą możemy wyrazić następująco:

$$T_j = \min(S_j, S_{12}), \quad j = 1, 2. \quad (1.55)$$

Co więcej, możemy określić prawdopodobieństwo przetrwania podmiotu przez czas dłuższy od jakiegoś ustalonego czasu t_j , $j = 1, 2$, mianowicie

$$\bar{F}_j(t_j) = P(T_j > t_j) = P(S_j > t_j, S_{12} > t_j) = \bar{G}_1(t_j)\bar{G}_{12}(t_j) = \exp(-(\lambda_j + \lambda_{12})t_j), \quad (1.56)$$

gdzie $\bar{G}_j = \lambda_j^{-1} g_j$, $j = 1, 2, 12$, jest dystrybuantą rozkładu Poissona a wykorzystana tutaj faktoryzacja prawdopodobieństwa łącznego $P(S_j > t_j, S_{12} > t_j)$ wynika z przyjętej niezależności szoków.

Naszym pośrednim, ważnym celem jest obliczenie łącznego prawdopodobieństwa skumulowanego $\bar{F}(t_1, t_2)$, czyli prawdopodobieństwa przetrwania obu podmiotów

$$\begin{aligned}
\bar{F}(t_1, t_2) &= P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = P(\min(T_1, T_{12}) > t_1, \min(T_2, T_{12}) > t_2) \\
&= P(T_1 > t_1, T_{12} > t_1, T_2 > t_2, T_{12} > t_2) \\
&= P(T_1 > t_1)P(T_2 > t_2)P(T_{12} > t_1, T_{12} > t_2) \\
&= P(T_1 > t_1)P(T_2 > t_2)P(T_{12} > \max(t_1, t_2)) \\
&= \exp(-\lambda_1 t_1) \exp(-\lambda_2 t_2) \exp(-\lambda_{12} \max(t_1, t_2)) \\
&= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12})t_2 + \lambda_{12} \min(t_1, t_2)); \tag{1.57}
\end{aligned}$$

wreszcie, wykorzystując (1.56), otrzymujemy

$$\bar{F}(t_1, t_2) = \bar{F}_1(t_1)\bar{F}_2(t_2)\min(\exp(\lambda_{12}t_1), \exp(\lambda_{12}t_2)). \tag{1.58}$$

Jak widać, to właśnie **obecność totalnego szoku** (czyli $\lambda_{12} > 0$) wprowadza **sprzężenie pomiędzy podmiotami, które przed pojawieniem się tego szoku nie byływ żaden sposób ze sobą powiązane**⁸; brak takiego szoku (czyli $\lambda_{12} = 0$) prowadzi do faktoryzacji prawdopodobieństwa $\bar{F}(t_1, t_2)$ co oznacza, że funkcją połączenia byłaby w takiej sytuacji po prostu kopuła multiplikatywna. Zwróćmy uwagę, że **sprzężenie to jest dodatnie, czyli ma paradoksalny charakter, gdyż prowadzi do zwiększenia łączego prawdopodobieństwa przetrwania** a nie jego zmniejszenia, jak mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka.

Wyrażenie (1.58) dalej przekształcamy korzystając z podstawienia

$$\exp(\lambda_{12}t_1) = \bar{F}_1(t_1)^{-m}, \quad \exp(\lambda_{12}t_2) = \bar{F}_1(t_2)^{-n}, \tag{1.59}$$

gdzie wykładniki

$$m \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}}, \quad n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}}. \tag{1.60}$$

Stąd otrzymujemy prawdopodobieństwo przetrwania obu podmiotów w postaci następującego wyrażenia

$$\begin{aligned}
\bar{F}(t_1, t_2) &= \bar{F}_1(t_1)\bar{F}_2(t_2)\min[\bar{F}_1(t_1)^{-m}, \bar{F}_2(t_2)^{-n}] \\
&= \min[\bar{F}_2(t_2)\bar{F}_1(t_1)^{1-m}, \bar{F}_1(t_1)\bar{F}_2(t_2)^{1-n}] \\
&= \bar{C}^{MO}(\bar{F}_1(t_1), \bar{F}_2(t_2)), \tag{1.61}
\end{aligned}$$

gdzie \bar{C}^{MO} jest kopułą przetrwania (dualną) Marshalla-Olkina (MO) zdefiniowaną następująco:

$$\bar{C}^{MO}(v, z) = \min(v^{1-m}z, vz^{1-n}) = \begin{cases} v^{1-m}z, & v^m \geq z^n \\ vz^{1-n}, & v^m < z^n. \end{cases} \tag{1.62}$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy średni czas pojawienia się totalnego szoku wzrasta nieograniczenie (tzn. λ_{12} dąży do zera co oznacza, że $m, n \rightarrow 1$), czyli szok totalny odsuwa

⁸Analogonem tej sytuacji w fizyce może być nagle magnesowanie się próbki pod wpływem impulsu w postaci silnego pola magnetycznego (czyli zorientowanie się momentów magnetycznych zgodnie z tym polem). Sprawia to wrażenie jak gdyby momenty magnetyczne połączyło jakieś wzajemne oddziaływanie.

nieograniczenie w czasie, kopuła \mathcal{C}^{MO} dąży jak trzeba do \mathcal{C}^\perp i tym samym sprzężenie zanika. Przy okazji przedstawiliśmy drogę (od dystrybuanty łącznej do kopuły) na jakiej wprowadzono kopułę MO.

Podkreślmy, wyznaczenie parametrów λ_j , $j = 1, 2, 1, 2$, a zwłaszcza $\lambda_{1,2}$, z danych empirycznych jest trudne - w związku z tym w rozdziale 3 powiemy nieco o kalibracji kopuł.

Z powyższego wynika, że na przykład łączne prawdopodobieństwo przetrwania czas dłuższy od t wynosi po prostu

$$\begin{aligned}\bar{F}(t, t) &= \bar{\mathcal{C}}^{MO}(\bar{F}_1(t_1), \bar{F}_2(t_2)) = \\ &= \min \left[\bar{F}_2(t) \bar{F}_1(t)^{1-m}, \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t)^{1-n} \right].\end{aligned}\quad (1.63)$$

W końcu możemy precyzyjnie sformułować nasz **kluczowy cel a mianowicie wyznaczenie prawdopodobieństwa łącznego defaultu dwóch podmiotów, pierwszego w czasie nieprzekraczającym t_1 a drugiego t_2** . Od razu możemy też podać odpowiedź korzystając z (1.53) oraz (1.61)

$$P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2) = \bar{\mathcal{C}}^{MO}(\bar{F}_1(t_1), \bar{F}_2(t_2)) - \bar{F}_1(t_1) - \bar{F}_2(t_2) + 1 \quad (1.64)$$

a w szczególności

$$P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = \bar{\mathcal{C}}^{MO}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)) - \bar{F}_1(t) - \bar{F}_2(t) + 1. \quad (1.65)$$

Łatwo stwierdzić (przez proste porównanie i wykonanie przekształceń algebraicznych), że powyższe prawdopodobieństwa są większe od analogicznych otrzymanych za pomocą kopuły multiplikatywnej. Innymi słowy, **sprzężenie obu podmiotów poprzez szok totalny czyni je bardziej podatnymi na default**.

Otrzymane wzory (1.61) - (1.65) będziemy wykorzystywać używając konkretnych wartości λ_j , $j = 1, 2, 1, 2$ oraz t_j , $j = 1, 2$.

Ćwiczenie 1.1.5.1 (Szoki egzogeniczne)

Wykonajmy na razie proste, chociaż nieco męczące ćwiczenie polegające na porównaniu prawdopodobieństw łącznych w wyrażonych za pomocą wzorów (1.61), (1.63) - (1.65), czyli w oparciu o kopułę Marshalla-Olkina, z odpowiadającymi im prawdopodobieństwami wykorzystującymi kopułę multiplikatywną a więc dotyczącą sytuacji całkowicie niezależnych podmiotów gospodarczych. Zatem, są to:

- 1) łączne prawdopodobieństwo przetrwania $P(T_1 > t_1, T_2 > t_2)$ dane wzorem (1.61), gdzie przyjmujemy przykładowo, że t_1 wynosi jeden kwartał, czyli $t_1 = 0.25$ [rok] a t_2 wynosi trzy kwartały, czyli $t_2 = 0.75$ [rok] oraz jego szczególny przypadek, czyli
- 2) łączne prawdopodobieństwo jednoczesnego przetrwania $P(T_1 > t, T_2 > t)$ dane wzorem (1.63), gdzie $t = 0.5$ [rok], następnie
- 3) łączne prawdopodobieństwo defaultu $P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2)$ wyrażone wzorem (1.64) dla danych z punktu 1) oraz

- 4) jego szczególny przypadek, czyli prawdopodobieństwo jednoczesnego defaultu $P(T_1 \leq t, T_2 \leq t)$ dane wzorem (1.65)

Przypuśćmy teraz, że najwcześniej pojawia się szok uderzający w sektor bankowy co oznacza, że średni czas λ_1^{-1} jest najkrótszy - niech wynosi pół roku; wtedy λ_1 jest największe i wynosi $\lambda_1 = 2 [\text{rok}^{-1}]$. Niech dalej λ_2^{-1} będzie większe i wynosi np. jeden rok stąd $\lambda_2 = 1 [\text{rok}^{-1}]$, i wreszcie niech λ_{12}^{-1} będzie największe i wynosi dwa lata, czyli $\lambda_{12} = 0.5 [\text{rok}^{-1}]$. Stąd (korzystając ze wzorów w (1.60)) otrzymujemy, że $m = 1/5$ a $n = 1/3$.

Zanim przejdziemy do analizy poszczególnych punktów 1) - 4) obliczmy jeszcze $\bar{F}_1(t_1)$ i $\bar{F}_2(t_2)$; na podstawie wzoru (1.56) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\bar{F}_1(t_1) &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1) = \exp(-2.5t_1), \\ \bar{F}_2(t_2) &= \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})t_2) = \exp(-1.5t_2),\end{aligned}\tag{1.66}$$

przy czym nie podstawiliśmy jeszcze (dla przejrzystości dalszych obliczeń) konkretnych wartości t_1 i t_2 .

Co więcej, wyznaczmy postaci obu kopuł dualnych

$$\begin{aligned}\bar{C}^{MO}(\bar{F}_1(t_1), \bar{F}_2(t_2)) &= \min [\bar{F}_2(t_2)\bar{F}_1(t_1)^{4/5}, \bar{F}_1(t_1)\bar{F}_2(t_2)^{2/3}] \\ &= \min(\exp(-2t_1 - 1.5t_2), \exp(-2.5t_1 - t_2)) \\ &= \begin{cases} \exp(-2t_1 - 1.5t_2), & t_1 \leq t_2 \\ \exp(-2.5t_1 - t_2), & t_1 > t_2 \end{cases}\end{aligned}\tag{1.67}$$

oraz

$$\bar{C}^\perp(\bar{F}_1(t_1), \bar{F}_2(t_2)) = \bar{F}_1(t_1) \bar{F}_2(t_2) = \exp(-2.5t_1 - 1.5t_2),\tag{1.68}$$

gdzie przy wyprowadzeniu wzoru (1.68) skorzystaliśmy z własności (1.53) oraz definicji kopuły multiplikatywnej (1.8).

Ad.1)

W tym przypadku

$$\begin{aligned}P(T_1 > t_1 = 0.25, T_2 > t_2 = 0.75) &= \bar{C}(\bar{F}_1(t_1), \bar{F}_2(t_2)) \\ &= \begin{cases} \exp(-2t_1 - 1.5t_2) = \exp(-0.5 - 1.125) = 0.1969, & \text{dla } \bar{C}^{MO} \\ \exp(-2.5t_1 - 1.5t_2) = \exp(-0.625 - 1.125) = 0.1738, & \text{dla } \bar{C}^\perp \end{cases}\end{aligned}\tag{1.69}$$

czyli prawdopodobieństwo przetrwania jest w przypadku podmiotów niezależnych wyraźnie mniejsze, co jest bezpośrednią konsekwencją wzoru (1.58) - jest to wynik ogólny; należy jednak mieć na uwadze, że oba prawdopodobieństwa są tutaj znacząco mniejsze od 1/2.

Ad.2)

Powyższy wynik potwierdza niniejszy dla prawdopodobieństwo jednoczesnego przetrwania, przykładowo dla $t = 0.5$, który wynika bezpośrednio z rozgałęzionej równości w (1.69).

Mianowicie,

$$\begin{aligned}
& P(T_1 > t_1 = t = 0.5, T_2 > t_2 = t = 0.5) \\
& = \begin{cases} \exp(-(2 + 1.5)t) = \exp(-3.5 \cdot 0.5) = 0.1738, & \text{dla } \mathcal{C}^{MO} \\ \exp(-(2.5 + 1.5)t) = \exp(-4 \cdot 0.5) = 0.1353, & \text{dla } \mathcal{C}^\perp. \end{cases} \quad (1.70)
\end{aligned}$$

przy czym, otrzymane prawdopodobieństwa są tutaj mniejsze od odpowiadających im w ogólniejszym przypadku (1.69).

Ad.3)

Wszystkie powyższe łączne prawdopodobieństwa przetrwania są tutaj wyraźnie mniejsze od odpowiadających im łącznych prawdopodobieństw popadnięcia w default, które wynoszą

$$\begin{aligned}
& P(T_1 \leq t_1 = 0.25, T_2 \leq t_2 = 0.75) = \bar{C}(\bar{F}_1(t_1), \bar{F}_2(t_2)) - \bar{F}_1(t_1) - \bar{F}_2(t_2) + 1 \\
& = \begin{cases} \exp(-2t_1 - 1.5t_2) - \exp(-2.5t_1) - \exp(-1.5t_2) + 1 = 0.5082, & \text{dla } \mathcal{C}^{MO} \\ \exp(-2.5t_1 - 1.5t_2) - \exp(-2.5t_1) - \exp(-1.5t_2) + 1 = 0.4818, & \text{dla } \mathcal{C}^\perp. \end{cases} \quad (1.71)
\end{aligned}$$

Jak widać, łączne prawdopodobieństwo popadnięcia w default obu podmiotów dla kopuły MO jest większe niż dla kopuły multiplikatywnej, co jest wynikiem ogólnym i czego właśnie należało się spodziewać w świetle relacji (1.64).

Ad.4)

Analogiczna sytuacja ma miejsce dla łącznego prawdopodobieństwa jednoczesnego popadnięcia w default obu podmiotów, gdyż

$$\begin{aligned}
& P(T_1 \leq t = 0.5, T_2 \leq t = 0.5) \\
& = \begin{cases} \exp(-(2 + 1.5)t) - \exp(-2.5t) - \exp(-1.5t) + 1 = 0.4149, & \text{dla } \mathcal{C}^{MO} \\ \exp(-(2.5 + 1.5)t) - \exp(-2.5t) - \exp(-1.5t) + 1 = 0.3764, & \text{dla } \mathcal{C}^\perp. \end{cases} \quad (1.72)
\end{aligned}$$

co stanowi oczywiście szczególny przypadek sytuacji przedstawionej w punkcie Ad.3). Otrzymane prawdopodobieństwa są tutaj wyraźnie mniejsze od odpowiadających im prawdopodobieństw niejednoczesnego popadnięcia obu podmiotów w default dane wyrażeniem (1.71).

Zauważmy, że suma prawdopodobieństwa przetrwania i odpowiadających im prawdopodobieństw popadnięcia w default jest wyraźnie mniejsza od jedności co oznacza, że suma pozostałych prawdopodobieństw (czyli prawdopodobieństw krzyżowych) mówiących, że jeden podmiot przetrwa a drugi popadnie w default jest warta dokładniejszej analizy.

Obliczenia te przeprowadzimy dla odmiany na drodze analitycznej, przekształcając najpierw dwie pierwsze równości w (1.32) do postaci,

$$\begin{aligned}
& P(U_1 \leq v, U_2 > z) = v - C(v, z) = 1 - \bar{v} - C(v, z) = \bar{z} - \bar{C}(\bar{v}, \bar{z}), \\
& P(U_1 > v, U_2 \leq z) = z - C(v, z) = 1 - \bar{z} - C(v, z) = \bar{v} - \bar{C}(\bar{v}, \bar{z}), \quad (1.73)
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy dodatkowo z równości (1.53) łączącej daną kopułę z odpowiadającą jej kopułą dualną. Stosując powyższe równości do wspomnianych sytuacji otrzymujemy,

że

$$\begin{aligned}
 & P(T_1 \leq t_1 = 0.25, T_2 > t_2 = 0.75) = \bar{F}_2(t_2) - \bar{C}(\bar{F}_1(t_1), (\bar{F}_2(t_2))) = \\
 & = \begin{cases} \bar{F}_2(t_2)[1 - \bar{F}_1(t_1)], & \text{dla } \mathcal{C}^{MO}, \\ \bar{F}_2(t_2)[1 - \bar{F}_1(t_1)^{4/5}], & t_1 \leq t_2, \text{ dla } \mathcal{C}^\perp, \end{cases} \quad (1.74)
 \end{aligned}$$

skąd bezpośrednio wynika, iż rozważane prawdopodobieństwo dla kopuły multiplikatywnej jest nie mniejsze od tego dla kopuły MO.

Analogicznie

$$\begin{aligned}
 & P(T_1 > t_1 = 0.25, T_2 \leq t_2 = 0.75) = \bar{F}_1(t_1) - \bar{C}(\bar{F}_1(t_1), (\bar{F}_2(t_2))) = \\
 & = \begin{cases} \bar{F}_1(t_1) - \bar{F}_1(t_1)^{4/5}\bar{F}_2(t_2), & \text{dla } \mathcal{C}^{MO} \\ \bar{F}_1(t_1) - \bar{F}_1(t_1)\bar{F}_2(t_2), & \text{dla } \mathcal{C}^\perp, \end{cases} \quad (1.75)
 \end{aligned}$$

skąd, podobnie jak poprzednio, wynika bezpośrednio, iż rozważane prawdopodobieństwo dla kopuły multiplikatywnej jest nie mniejsze od tego dla kopuły MO.

Wniosek 1.1.5.1 (Dodatnie sprzężenie poprzez egzogeniczny szok totalny)

Szok totalny prowadzi do dodatniego sprzężenia pomiędzy podmiotami gospodarczymi, które mogą bezpośrednio ze sobą nie mieć nic wspólnego.

Wniosek 1.1.5.2 (Sukcesywne popadanie w default)

Jak można było oczekiwać, **najbardziej prawdopodobną sytuacją jest sukcesywne popadanie w default**, tzn. najpierw popada w default podmiot o najkrótszym czasie λ_j^{-1} a potem kolejno o coraz dłuższych. Wniosek ten jest słuszny dla obu rodzajów kopuł, przy czym dla kopuły MO tego typu sekwencja jest bardziej prawdopodobna.

1.1.6 Analiza zdarzeń i procesów skrajnych

Zdarzenia i procesy skrajne (a w tym np. ekstremalne) są związane przede wszystkim z istnieniem spłaszczenia (leptokurtyczności) rozkładów prawdopodobieństw a także skośności przejawiającymi się w istnieniu, odpowiednio, kurtozy zwanej też (ekscesem) oraz współczynnika asymetrii rozkładów, które mogą być zarówno dodatnie jak też ujemne. Innymi słowy, wspomniane zdarzenia i procesy związane są z pogrubionymi "ogonami" (ang. *fat tails*) tych rozkładów. Jesteśmy zainteresowani zwłaszcza analizą ich wzajemnych powiązań (ang. *tail dependence* oraz *market comovement*) - tego typu analiza stanowi jedno z ważniejszych zastosowań teorii kopuł. Dodajmy, że tego typu analiza jest ważnym elementem ogólniejszej dotyczącej stowarzyszenia (ang. *assotiation*) bazowych zmiennych losowych. W jej skład wchodzi, oprócz wspomnianej analizy skrajności, także analiza relacji zgodności, (ang. *concordance*), pozytywnej kwadrantowej zależności (ang. *positive quadrant dependence*) oraz badanie liniowych korelacji (ang. *linear correlations*). **(Możemy je systematycznie omówić o ile uznacie to Państwo to za celowe)**

Przykład 1.1.6.1 (Dolny indeks powiązania skrajności)

Celem wydobycia, wspomnianych powyżej, zależności pomiędzy zdarzeniami i procesami skrajnymi postawimy teraz zasadnicze (konkretne) pytanie a mianowicie, **jaka jest (procentowa) szansa zrealizowania się hipotezy mówiącej, że zaobserwowany zostanie krach, przykładowo, na indeksie Nikkei 225 z prawdopodobieństwem nie większym niż $v = 1\%$ pod warunkiem wystąpienia, także z prawdopodobieństwem nie większym niż 1% , krachu np. na indeksie S&P 500?** Szansę tą można wyrazić za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego $P(Q_{NKY} \leq v \mid Q_{SP} \leq v)$, gdzie Q_J , $J = NKY, SP$, jest zmienną losową z przedziału $[0, 1]$, czyli dystrybuantą określoną na bardziej fundamentalnej, a tutaj ukrytej, zmiennej losowej X_J (będącej wartością samego indeksu J); jak już mówiliśmy, nie jest niczym dziwnym w teorii kopuł, że prawdopodobieństwo może być jednocześnie traktowane jak zmienna losowa.

Wyrażmy teraz wprowadzone powyżej prawdopodobieństwo warunkowe za pomocą kopuły oraz zmiennej losowej v ,

$$\lambda(v) \stackrel{\text{def.}}{=} P(Q_{NKY} \leq v \mid Q_{SP} \leq v) = \frac{P(Q_{NKY} \leq v, Q_{SP} \leq v)}{P(Q_{SP} \leq v)} = \frac{\mathcal{C}(v, v)}{v}, \quad (1.76)$$

gdzie $\lambda(v)$ jest wielkością pozwalającą na zmierzenie stopnia powiązania między skrajnymi realizacjami obu procesów (zdarzeń) brzegowych (dodajmy, że ostatnią równość uzyskaliśmy wykorzystując trzecią równość w (1.32)). W tym celu wprowadźmy tzw. 'dolny indeks powiązania skrajności' (niedosłownie ang. *lower tail index*) dla znikającej wartości v (co w połączeniu z faktem analizy procesów brzegowych usprawiedliwia wprowadzenie nazwy 'skrajność'),

$$\lambda_L \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda(v \rightarrow 0^+) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{C}(v, v)}{v}. \quad (1.77)$$

Mówiąc trochę nieściśle ale obrazowo, granica ta jest prawdopodobieństwem jednoczesnego wystąpienia krachu (czy ogólniej sytuacji niekorzystnych) na obu rynkach dla oceny skrajnej ($v \rightarrow 0^+$).

Ćwiczenie 1.1.6.1 (Przykładowe dolne wskaźniki powiązania skrajności)

Wyznamy jeszcze wartości tego indeksy dla kilku charakterystycznych kopuł,

$$\lambda_L = \begin{cases} 0, & \text{dla kopuły minimalnej oraz dla kopuły multiplikatywnej} \\ 1, & \text{dla kopuły maksymalnej.} \end{cases} \quad (1.78)$$

Co więcej, np. dla rodziny kopuł gaussowskich (parametryzowanych współczynnikiem korelacji ρ) ma miejsce tzw. pozytywne uporządkowanie, tzn.

$$\mathcal{C}^- = \mathcal{C}_{\rho=-1}^G \prec \mathcal{C}_{-1 < \rho < 1}^G \prec \mathcal{C}_{\rho=0}^G = \mathcal{C}^\perp \prec \mathcal{C}_{0 < \rho < 1}^G \prec \mathcal{C}_{\rho=1}^G = \mathcal{C}^+, \quad (1.79)$$

(gdzie powiązanie dwóch kopuł za pomocą relacji mniejszości (pozytywnego uporządkowania) " \prec " oznacza, że wartości kopuły (poprzedzającej) stojącej po lewej stronie są prawie

wszędzie mniejsze od odpowiadających im wartości kopuły stojącej po prawej stronie tej relacji bądź też równe im) oraz

$$\lambda_L = \begin{cases} 0, & \text{dla } \rho < 1 \\ 1, & \text{dla } \rho = 1. \end{cases} \quad (1.80)$$

Jak widać, wynik (1.80) dla rodziny kopuł gaussowskich jest mocniejszy od ogólnego wyniku (1.79), gdyż stwierdza on po prostu, że dla kopuł gaussowskich o parametrze $\rho < 1$ brak jest jakiegokolwiek powiązania skrajności. Przy okazji zauważmy, że podrodzina kopuł gaussowskich parametryzowanych współczynnikiem liniowych korelacji $\rho \geq 0$ spełnia tzw. 'własność zależności kwadrantowej' (ang. *positive quadrant dependence*), czyli $\mathcal{C}^\perp \prec \mathcal{C}_{0 \leq \rho \leq 1}^G$.

Właśnie tego typu własności czynią ten indeks wielce przydatnym do badania stopnia powiązania dolnych skrajności, tym bardziej, że jest to badanie komplementarne w stosunku do badania stopnia liniowych korelacji, gdyż jak widać istnienie liniowych korelacji nie gwarantuje jeszcze nieznikania indeksu powiązania dolnych skrajności (analogiczna sytuacja ma miejsce dla indeksu powiązania górnych skrajności, o czym jest mowa poniżej w Przykładzie 1.1.6.2).

Ćwiczenie 1.1.6.1 (Dalsze wyjaśnienia)

Aby lepiej zrozumieć dlaczego jest to indeks dolny przypuśćmy, że v jest dystrybuantą daną wyrażeniem analogicznym do pierwszego w (1.9), ale określonym na dwukrotnie większej dziedzinie dziedzinie $x \in [-\infty, -1] \cup [1, \infty]$, zawierającej także, jak widać, ujemne wartości bazowej zmiennej losowej,

$$v = F_1(x) = \int_{-\infty}^x dx' f_1(x') = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{|x|^\alpha} & \text{dla } x \leq -1 \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{|x|^\alpha} & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \quad (1.81)$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji

$$f_1(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \frac{\alpha}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (1.82)$$

Zatem, dążenie zmiennej v do zera od strony wielkości większych od zera jest równoważne dążeniu zmiennej ukrytej x do ujemnej nieskończoności, gdzie ma ona rozkład potęgowy z wykładnikiem α , czyli posiada tam pogrubiony ogon (patrz pierwsze wyrażenie w (1.81)). Tym samym, nieznikanie dolnego indeksu powiązania oznacza powiązanie dolnych ogonów rozkładów.

Podkreślmy, że dla kopuł leżących pomiędzy multiplikatywną a maksymalną (wliczając w to tę ostatnią)⁹ dolny indeks powiązania λ_L może być większy od zera i nie większy od jedności co oznacza, że istnieje dla nich powiązanie zdarzeń skrajnych dla procesów brzegowych. Efekt ten nie występuje zarówno dla kopuły multiplikatywnej jak też dla kopuł leżących poniżej niej. Ułatwia to dobranie właściwej kopuły, zwracając uwagę na obszar poszukiwań.

⁹Jak wiadomo, w zbiorze kopuł można wprowadzić relację uporządkowania, czyli można powiedzieć co to znaczy, że dana kopuła jest mniejsza od innej.

Przykład 1.1.6.2 (Górny indeks powiązania skrajności)

Można teraz wprowadzić równie ważne pojęcie 'górnego indeksu powiązania skrajności' (niedosłownie ang. *upper tail index*) λ_U wykorzystując pojęcie kopuły dualnej. Pytanie jakie teraz stawiamy jest komplementarne do postawionego w Przykładzie 5a mianowicie, **jaka jest (procentowa) szansa zrealizowania się hipotezy mówiącej, że zaobserwowany zostanie boom, przykładowo, na indeksie Nikkei 225 z prawdopodobieństwem większym niż v pod warunkiem wystąpienia, także z prawdopodobieństwem większym niż v , boomu np. na indeksie S&P 500?** Poszukiwane prawdopodobieństwo można wyrazić następująco,

$$P(Q_{NKY} > v \mid Q_{SP} > v) = \frac{P(Q_{NKY} > v, Q_{SP} > v)}{P(Q_{SP} > v)} = \frac{1 - 2v + \mathcal{C}(v, v)}{1 - v}, \quad (1.83)$$

gdzie drugą równość uzyskaliśmy wykorzystując kolejno (1.49), (1.51), (1.52), (1.53) a następnie definicję kopuły oraz unormowanie prawdopodobieństwa. Teraz możemy już zdefiniować 'górną indeks powiązania skrajności' jako następującą granicę

$$\lambda_U \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2v + \mathcal{C}(v, v)}{1 - v}. \quad (1.84)$$

Analogicznie jak dla indeksu λ_L , granica ta jest prawdopodobieństwem jednoczesnego wystąpienia boomu (czy też ogólniej mówiąc, sytuacji korzystnej) na obu rynkach dla oceny skrajnej ($v \rightarrow 1^-$).

Zauważmy jeszcze, że dysponując obydwoma wskaźnikami λ_L oraz λ_U można by nawet pokusić się o prognozę odpowiadającą na pytanie czy w danych warunkach bardziej prawdopodobny jest krach czy też boom? Niestety, prognoza ta jest ściśle zależna od użytej kopuły i często daje wynik remisowy. Na przykład, dla rodziny kopuł gaussowskich $\lambda_U = \lambda_L$, gdzie λ_L jest dane wyrażeniem (1.80). Dla rodziny kopuł T -Studenta, dla skończonej liczby stopni swobody ν , otrzymuje się także remis, mianowicie

$$\lambda_L = \lambda_U \begin{cases} > 0, & \text{dla } \rho > -1 \\ = 0, & \text{dla } \rho = 1. \end{cases} \quad (1.85)$$

Fakt, że dla rodziny kopuł T , dla prawie wszystkich wartości współczynnika liniowych korelacji ρ , dolny i górny wskaźnik nie znikają, w przeciwieństwie do rodziny kopuł gaussowskich, wynika z faktu, że dla skończonej liczby stopni swobody ($\nu < \infty$) rozkład t -Studenta posiada pogrubione ogony (dolny i górny). Wynik ten pozwala lepiej zrozumieć uwarunkowania w jakich wskaźniki powiązania skrajności λ_L i λ_U (oraz dualne do nich - patrz poniżej) uaktywniają się (nie znikają).

Ćwiczenie 1.1.6.2 (Kopuła mieszana górna)

Tytułem prostego ćwiczenia sprawdzimy, że kopuła mieszana górna $\mathcal{C}_{\alpha>0, \beta=0}^F = (1-\alpha)\mathcal{C}^\perp + \alpha\mathcal{C}^+$ posiada zarówno dolny jak i górny wskaźnik powiązania skrajności większy od zera

i oba wskaźniki są sobie równe. Korzystając bezpośrednio z definicji (1.77) otrzymujemy, że dolny wskaźnik powiązania skrajności wynosi

$$\lambda_L = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{C}_{\alpha, \beta=0}^F(v, v)}{v} = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \alpha)v^2 + \alpha \min(v, v)}{v} = \lim_{v \rightarrow 0^+} (\alpha + (1 - \alpha)v) = \alpha (> 0). \quad (1.86)$$

Analogicznie, korzystając z definicji (1.84) otrzymujemy, że górny wskaźnik powiązania skrajności przyjmuje wartość

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2v + \mathcal{C}_{\alpha, \beta=0}^F(v, v)}{1 - v} = \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2v + (1 - \alpha)v^2 + \alpha \min(v, v)}{1 - v} \\ &= \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{1 - (2 - \alpha)v + (1 - \alpha)v^2}{1 - v} = \lim_{v \rightarrow 1^-} (1 - (1 - \alpha)v) = \alpha. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Należy podkreślić, że analogiczne obliczenia przeprowadzone dla kopuły mieszanej dolnej $\mathcal{C}_{\alpha=0, \beta>0}^F = \beta\mathcal{C}^- + (1 - \beta)\mathcal{C}^\perp$ dają zerowe wartości wskaźników powiązania skrajności.

Wszystkie powyższe obliczenia są prostą konsekwencją faktu, że za istnienie powiązań skrajności odpowiedzialna jest tylko kopuła \mathcal{C}^+ , dla której oba wskaźniki są równe 1; dla pozostałych dwóch kopuł bazowych wskaźniki te znikają.

Wybrane własności indeksów powiązania skrajności

Podamy teraz dalsze, przydatne własności indeksów powiązania skrajności, przy czym "na pierwszy ogień" pójdą te związane z faktem, że zbiór wszystkich kopuł można rozłożyć na dwa podzbiory kopuł wzajemnie dualnych. Mianowicie, pomiędzy wskaźnikami: λ_L , λ_U , $\bar{\lambda}_L$ i $\bar{\lambda}_U$, gdzie dwa ostatnie indeksy dotyczą kopuły dualnej dodanej (są one zdefiniowane analogicznie do indeksów λ_L i λ_U , gdyż kopuła dualna do danej jest także kopułą) istnieją łatwe do wykazania relacje,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_L &= \lambda_U, \\ \bar{\lambda}_U &= \lambda_L \end{aligned} \quad (1.88)$$

1.1.7 Wskaźniki Kendalla i Spearmana

Relacja zgodności a wskaźnik Kendalla

Mówiąc nieściśle ale obrazowo, relacja zgodności pomiędzy bazowymi zmiennymi losowymi X i Y ma miejsce wtedy i tylko wtedy gdy prawdopodobieństwo tego, że obie wielkości są zgodne, czyli obie duże bądź też obie małe jest większe od zdarzenia przeciwnego tzn. gdy jedna z nich jest duża a druga mała. Intensywność tej relacji mierzy współczynnik Kendalla, τ , zdefiniowany za pomocą różnicy prawdopodobieństw obu sytuacji,

$$\tau \stackrel{\text{def.}}{=} P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0), \quad (1.89)$$

gdzie zmienne wektorowe (X_1, Y_1) oraz (X_2, Y_2) są od siebie statystycznie niezależne i posiadają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa.

Można wykazać, że współczynnik τ daje się wyrazić za pomocą kopuły \mathcal{C} w następującym sposobie

$$\begin{aligned}\tau &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{C}(v, z) d\mathcal{C}(v, z) - 1 = 4 \langle C(U_1, U_2) \rangle - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{C}(v, z) \frac{\partial^2 \mathcal{C}(v, z)}{\partial v \partial z} dv dz - 1 = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{C}(v, z)}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{C}(v, z)}{\partial z} dv dz,\end{aligned}\tag{1.90}$$

przy czym $-1 \leq \tau \leq 1$ oraz $\tau = \pm 1$ dla $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\pm$. Jak widać wskaźnik τ ma charakter globalny i jest niezależny od rozkładów marginalnych.

Aby uniezależnić się od rozkładów marginalnych wprowadzono wskaźnik globalny, nazywan czasami (podobnie jak wskaźnik τ Kendalla) wskaźnikiem nieparametrycznym Spearmana ρ_S , który został zdefiniowany następująco

$$\rho_S \stackrel{\text{def.}}{=} 12 \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{C}(v, z) dv dz - 3.\tag{1.91}$$

Termin 'nieparametryczne' może być mylący, gdyż np. w przypadku wskaźnika ρ_S oraz dowolnej kopuły z rodziny kopuł Fréchet'a można łatwo wykazać, że zachodzi następujący związek pomiędzy tym współczynnikiem a parametrami parametryzującymi tą rodzinę: $\rho_S = \alpha - \beta$.

Rozdział 2

Symulacje komputerowe

Generowanie wprost z rozkładu wielowymiarowego¹ wektorowych zmiennych losowych stanowi wciąż problem otwarty - to co potrafimy zrobić to np. obejść go, redukując do zagadnienia jednowymiarowego a więc już rozwiązywalnego wprost. Możliwość numerycznego generowania takich zmiennych z dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa (ciągłego lub dyskretnego) stanowi podstawę i punkt wyjścia wszechstronnych zastosowań metod Monte Carlo w szeroko rozumianych finansach a także w innych dziedzinach (np. poza ekonomią - w naukach matematyczno-przyrodniczych). Dlatego, poniżej omówimy tą metodę wskazując na jej prostotę i uniwersalność a następnie zastosujemy ją np. do generowania zmiennych losowych z przykładowo wybranych kopuł.

Dodajmy jednak, że w przypadku gdy gęstość rozkładu prawdopodobieństwa oraz dziedzina na której jest określona są ograniczone to istnieje prosta Metoda Eliminacji von Neumanna [4] generowania wartości wielowymiarowych zmiennych losowych - metodę tą omówimy na wstępie niniejszego rozdziału wraz z jej uogólnieniem oraz charakterystycznymi przykładami.

Wszystkie omawiane w niniejszym rozdziale metody są niewrażliwe na to, że zmienne losowe mogą być statystycznie niezależne. Umożliwia to traktowanie tych metod jako pozwalających na generowanie ciągów skorelowanych zmiennych losowych.

2.1 Metoda Eliminacji von Neumanna

Zadaniem, jakie sobie stawiamy jest standardowe dla tego rozdziału a mianowicie chodzi losowanie wartości wielowymiarowej zmiennej losowej $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega$ z rozkładu posiadającego zadaną gęstość $f(x) \leq c$, przy czym m -wymiarowa dziedzina Ω jest ograniczona; kształt dziedziny nie odgrywa tutaj żadnej roli, przy czym im jest prostszy tym metoda jest bardziej efektywna (na ogół dziedzina jest zadana w postaci wielowymiarowej kostki lub kuli). Metoda jest na tyle prosta, że od razu przedstawimy ją w postaci algorytmu.

¹Przez rozkład wielowymiarowy rozumiemy gęstość prawdopodobieństwa określoną na dziedzinie wielowymiarowej.

Algorytm 2.1.1 (Generowanie zmiennych losowych metodą von Neumanna)

Algorytm składa się tylko z trzech kroków.

Krok 1

Losujemy kolejno wartości składowych m -wymiarowej zmiennej losowej z rozkładu jednorodnego. Jeżeli dziedziną Ω jest kostką (a z taką ma się najczęściej do czynienia), tzn. gdy $(-\infty <) a_j \leq x_j \leq b_j (< \infty)$, $j = 1, 2, \dots, m$, to wówczas po prostu $x_j = a_j + (b_j - a_j)R_j$, gdzie R_j jest kolejną j -tą liczbą przypadkową (dokładniej rzecz biorąc, pseudolosową) pobraną z generatora liczb losowych o rozkładzie jednorodnym określonym na odcinku jednostkowym. W przypadku innych kształtów, zdefiniowanych za pomocą jakiś dodatkowych warunków, należy za każdym razem sprawdzać, czy wylosowana składowa spełnia te warunki - jeżeli nie, to należy losowanie powtarzać aż do skutku. Tutaj właśnie pojawia się problem efektywności metody, która jak widać jest dla kostki stuprocentowa.

Krok 2

Po wylosowaniu wszystkich składowych x_j obliczamy gęstość prawdopodobieństwa, czyli wyznaczamy liczbę $f(\underline{x})$.

Krok 3

Następnie losujemy liczbę przypadkową $y = cR$, gdzie liczba przypadkowa R jest pobierana z tego samego generatora co uzyskane wcześniej (R_j , $j = 1, 2, \dots, m$). Jeżeli liczba $y \leq f(\underline{x})$ to wartość zmiennej losowej \underline{x} jest akceptowana, w przeciwnym razie kroki 1 - 2 należy powtórzyć aż do skutku (tutaj ponownie pojawia się problem efektywności metody).

Oczywiście, efektywność Metody Eliminacji pozostawia do życzenia, jednakże niedogodność ta jest częściowo niwelowana prostotą metody umożliwiającą skonstruowanie, jak widać, krótkiego i szybkiego (w realizacji pojedynczej pętli algorytmu. Dodajmy, że dla dziedziny w postaci kuli, sfery albo sympleksu znane są bardziej efektywne algorytmy (patrz rozdz.4 w książce [4]).

Zdarza się, że gęstość rozkładu można przedstawić w postaci sfaktoryzowanej - pozwala to na wykorzystanie dogodnej, Uogólnionej Metody Eliminacji (UME).

2.1.1 Uogólniona Metoda Eliminacji

Niech gęstość rozkładu $p(\underline{x})$ da się przedstawić w postaci następującego iloczynu:

$$p(\underline{x}) = a f(\underline{x})g(\underline{x}), \quad (2.1)$$

gdzie $a(> 0)$ jest stałą, f gęstością prawdopodobieństwa natomiast funkcja g spełnia warunek $0 \leq g(\underline{x}) \leq 1$. W takiej sytuacji można zaproponować następujący prosty algorytm.

Algorytm 2.1.1.1 (Generowanie zmiennych losowych UME)

Algorytm składa się z następujących kroków.

Krok 1

Generujemy wartość wektorowej zmiennej losowej \underline{x} z rozkładu $f(\underline{x})$ (np. za pomocą zwykłej Metody Eliminacji).

Krok 2

Obliczamy $g(\underline{x})$.

Krok 3

Losujemy liczbę przypadkową R z rozkładu jednorodnego określonego na odcinku jednostkowym. Jeżeli $R \leq g(\underline{x})$ wówczas wylosowana wartość zmiennej losowej \underline{x} jest akceptowana; w przeciwnym razie cała procedura jest powtarzana aż do skutku.

Wykażemy, że tak uzyskane wartości wektorowej zmiennej losowej \underline{x} posiadają, jak trzeba, rozkład $p(\underline{x})$ - obliczmy w tym celu dystrybuantę $F(\underline{x})$. Mianowicie,

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) &= P(\underline{x}' \leq \underline{x}) \stackrel{\text{def.}}{=} P(\underline{x}' \leq \underline{x} \mid R \leq g(\underline{x}')) \\ &= \frac{\int_{\underline{x}' \leq \underline{x}} \int_{R \leq g(\underline{x}')} f(\underline{x}') d\underline{x}' dR}{\int \int_{R \leq g(\underline{x}')} f(\underline{x}') d\underline{x}' dR} \\ &= a \int^{\underline{x}} \left(\int_0^{g(\underline{x}')} dR \right) f(\underline{x}') d\underline{x}' = a \int^{\underline{x}} f(\underline{x}') g(\underline{x}') d\underline{x}' = \int^{\underline{x}} p(\underline{x}') \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie nierówność $\underline{x}' \leq \underline{x}$ należy rozumieć w sensie wektorowym, czyli dla każdej współrzędnej wektorów z osobna, natomiast definicja dystrybuanty w postaci prawdopodobieństwa warunkowego została narzucona przez sam algorytm. Ponadto, wykorzystaliśmy równość $\int \int_{R \leq g(\underline{x}')} f(\underline{x}') d\underline{x}' dR = \int \left(\int_0^{g(\underline{x}')} dR \right) f(\underline{x}') d\underline{x}' = \int f(\underline{x}') g(\underline{x}') d\underline{x}' = 1/a$, która wynika bezpośrednio z warunku normalizacyjnego dla gęstości rozkładu $p(\underline{x}')$. Zatem, algorytm doprowadził nas do dystrybuanty o, jak oczekiwaliśmy, wyjściowej gęstości rozkładu.

Rozważmy teraz uproszczenie powyższego algorytmu, wielce przydatne w sytuacji, gdy $g(\underline{x}')$ jest dystrybuantą. Wtedy, nierówność wykorzystywana w kroku 3 może być zapisana w postaci: $\underline{z} = g^{-1}(R) \leq \underline{x}$; oczywiście \underline{z} ma rozkład o dystrybuancie g (co wynika bezpośrednio z metody odwracania dystrybuant). Stąd, powyższy algorytm przybiera następującą postać.

Algorytm 2.1.1.2 (Uproszczona UME)

Krok 1

Bez zmian.

Krok 2

Generujemy wartość wektorowej zmiennej losowej \underline{z} z rozkładu posiadającego dystrybuantę g . Jeżeli wartość ta jest mniejsza (w sensie wektorowym) od \underline{x} to wartość należy zaakceptować; w przeciwnym razie należy całe postępowanie powtórzyć, i tak aż do skutku.

Algorytm ten (pomimo, że bardzo prosty) podlegać będzie dalszym modyfikacjom aż do powstania pokrewnego umożliwiającego analityczne (a nie tylko numeryczne) odwracanie dystrybuant. Modyfikacje te są możliwe w sytuacji gdy funkcję $g(\underline{x})$ daje się przedstawić w postaci superpozycji: $g(\underline{x}) = g(h(\underline{x}))$, przy czym $g(h)$ jest dystrybuantą. Stąd, otrzymujemy kolejną odmianę wyjściowego algorytmu

2.2 Symulacje Monte Carlo zmiennych wielowymiarowych za pomocą kopuł

Przedstawiamy szeroko stosowaną metodę wykorzystującą jednowymiarowe rozkłady warunkowe (ang. *conditional sampling method*) do losowania zmiennych wielowymiarowych za pomocą kopuł. Omówienie składa się z dwóch części:

- 1) w pierwszej (rozdz.2.2.1) przedstawiamy metodę ogólną wraz z opierającym się na niej algorytmem
- 2) a w drugiej (rozdz.2.2.2) wykorzystujemy ją używając kopuł.

To ostatnie podejście wymaga omówienia ze względu na fakt istnienia bazującego na nim oprogramowania (patrz np. odpowiednie pakiety w *Matlabie* [6] lub *R* [?]).

2.2.1 Zasadnicze elementy metody

Idea metody jest zaskakująco prosta [4] i polega na zauważeniu, że każdą gęstość łączną rozkładu wielowymiarowego $f(x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1)$, gdzie $m \geq 2$, można sprowadzić do iloczynu odpowiednich, jednowymiarowych gęstości warunkowych w następujący sposób:

$$f(x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1) = f(x_m | x_{m-1}, \dots, x_2, x_1) f(x_{m-1}, \dots, x_2, x_1), \quad (2.3)$$

gdzie $f(x_m | x_{m-1}, \dots, x_2, x_1)$ jest właśnie wspomnianą powyżej gęstością warunkową (równość (2.3) nie wymaga dowodu, gdyż wynika bezpośrednio z definicji gęstości warunkowej). Analogicznie przedstawiamy kolejną gęstość łączną określona na dziedzinie zdarzeń o jeden wymiar niższej:

$$f(x_{m-1}, \dots, x_2, x_1) = f(x_{m-1} | x_{m-2}, \dots, x_2, x_1) f(x_{m-2}, \dots, x_2, x_1), \quad (2.4)$$

którą podstawiamy do równania (2.4) otrzymując:

$$f(x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1) = f(x_m | x_{m-1}, \dots, x_2, x_1) f(x_{m-1} | x_{m-2}, \dots, x_2, x_1) f(x_{m-2}, \dots, x_2, x_1). \quad (2.5)$$

Kontynuując to postępowanie otrzymujemy w końcu, że

$$f(x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1) = f(x_m | x_{m-1}, \dots, x_2, x_1) f(x_{m-1} | x_{m-2}, \dots, x_2, x_1) f(x_{m-2} | x_{m-3}, \dots, x_2, x_1) \dots f(x_3 | x_2, x_1) f(x_2 | x_1) f(x_1), \quad (2.6)$$

czyli uzyskujemy jednocząstkową (jednowymiarową) faktoryzację wyjściowej wielowymiarowej gęstości. Równość ta stanowi wystarczającą podstawę poniższego, szeroko wykorzystywanego algorytmu, gdyż operuje już tylko gęstościami jednowymiarowymi.

Zauważmy jeszcze, że faktoryzacja (2.6), a co z tym idzie metoda ta, jest niewrażliwa na to czy zmienne są czy też nie są skorelowane a więc jest to **metoda umożliwiająca w**

ogólności generowanie skorelowanych liczb losowych. Ważne jest także zagadnienie odwrotne: wiedząc jak wyglądają korelacje zbudować rozkład z którego losowany byłby wektor przypadkowy. Tego typu problem dotyczący korelacji długoterminowych został rozwiązany stosunkowo niedawno za pomocą tzw. metody fourierowskiego filtrowania [?].

Oczywiście, w przypadku niezależnych zmiennych losowych wielowymiarowa gęstość faktoryzuje się od samego początku i losowanie pojedynczych składowych wielowymiarowego wektora przypadkowego można przeprowadzić po prostu w oparciu o bezwarunkowe rozkłady jednowymiarowe.

Algorytm 2.2.1.1 (Generowanie wielowymiarowych zmiennych losowych)

Zakładamy, że potrafimy losować liczby przypadkowe z dowolnego rozkładu jednowymiarowego (tego typu losowanie oferują np. wspomniane pakiety oprogramowania w *Matlabie* i *R*).

Krok 1

Losujemy pierwszą liczbę przypadkową x_1 ze znanego (bezwarunkowego) rozkładu jednowymiarowego $f(x_1)$.

Krok 2

Tak wylosowaną (ustaloną) liczbę przypadkową x_1 podstawiamy do jednowymiarowej gęstości warunkowej $f(x_2 | x_1)$ a następnie losujemy za pomocą niej drugą liczbę przypadkową x_2 .

Krok 3

Obie (ustalone) liczby x_1 i x_2 podstawiamy do jednowymiarowej gęstości warunkowej $f(x_3 | x_2, x_1)$ i losujemy trzecią liczbę przypadkową x_3 .

Podstawiając tak uzyskane liczby przypadkowe do kolejnej gęstości generujemy kolejną liczbę losową, itd; wreszcie, działając w ten sposób losujemy ostatnią liczbę x_m z jednowymiarowej gęstości $f(x_m | x_{m-1}, \dots, x_2, x_1)$, kompletując tym samym poszukiwaną wielowymiarową liczbę losową - oczywiście, procedurę tą można powtarzać tyle razy ile tych liczb potrzebujemy.

Należy podkreślić, że **jednym z prominentnych zastosowań omówionej powyżej metody oraz algorytmu jest symulacja komputerowa procesów stochastycznych** a na przykład, dla procesów Markowa ma nawet miejsce znaczne uproszczenie całego podejścia [4].

2.2.2 Generowanie wielowymiarowych zmiennych losowych poprzez kopuły

Rozważmy najpierw generowanie dwuwymiarowych zmiennych losowych przy użyciu jakiejś dowolnie wybranej kopuły $\mathcal{C}(v, z)$, a właściwie jej pochodnych po zmiennych v oraz z przy czym zakładamy, że te pochodne istnieją (patrz wyrażenia (1.32)). Oczywiście, dane są także dystrybuanty rozkładów brzegowych zmiennych losowych X i Y odpowiednio $F(X = x)$ oraz $F(Y = y)$, gdzie $x = F^{-1}(v)$ a $y = F^{-1}(z)$.

Algorytm 2.2.2.1 (Generowanie poprzez kopuły)

Krok 1

Losujemy po prostu zmienną v z rozkładu jednorodnego określonego na odcinku $[0, 1]$. Oczywiście, można zamiast zmiennej v odlosować zmienną z - tutaj zdecydowaliśmy się na tą pierwszą.

Krok 2

Podstawiamy tą wylosowaną wartość v do dystrybuanty warunkowej zmiennej z (zdefiniowanej za pomocą pochodnej z danej kopuły \mathcal{C} po v)

$$F_v(z) \stackrel{\text{def.}}{=} P(U_2 \leq z \mid U_1 = v) = \mathcal{C}_{2|1}(v, z) = \frac{\partial \mathcal{C}(v, z)}{\partial v}. \quad (2.7)$$

Krok 3

Następnie losujemy liczbę przypadkową rn za pomocą generatora liczb losowych o rozkładzie jednorodnym określonym na odcinku $[0, 1]$. Odwracając tak otrzymaną jednowymiarową dystrybuantę warunkową, uzyskujemy wartość zmiennej losowej

$$z = F_v^{-1}(rn), \quad (2.8)$$

kompletując tym samym poszukiwany dwuwymiarowy wektor losowy (v, z) .

Należy powiedzieć, że algorytm ten można bezpośrednio rozszerzyć na większą liczbę wymiarów - wtedy rzecz jasna korzysta się z kopuł określonych na dziedzinie o odpowiednio większym wymiarze.

Ćwiczenie 2.2.2.1 (Kopuła Franka oraz brzegowe rozkłady wykładnicze)

Aby zilustrować przedstawione podejście rozważmy kopułę Franka oraz wykładnicze rozkłady brzegowe. Z definicji kopuły Franka (1.10) oraz ostatniej równości w (2.7) można łatwo uzyskać (po zróżniczkowaniu) jawną postać kopuły warunkowej Franka

$$\mathcal{C}_{1|2}(v, z) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{[\exp(-\alpha v) - 1]}{\exp(-\alpha) - 1} [\exp(-\alpha z) - 1]} \frac{\exp(-\alpha v)}{\exp(-\alpha) - 1} [\exp(-\alpha z) - 1]. \quad (2.9)$$

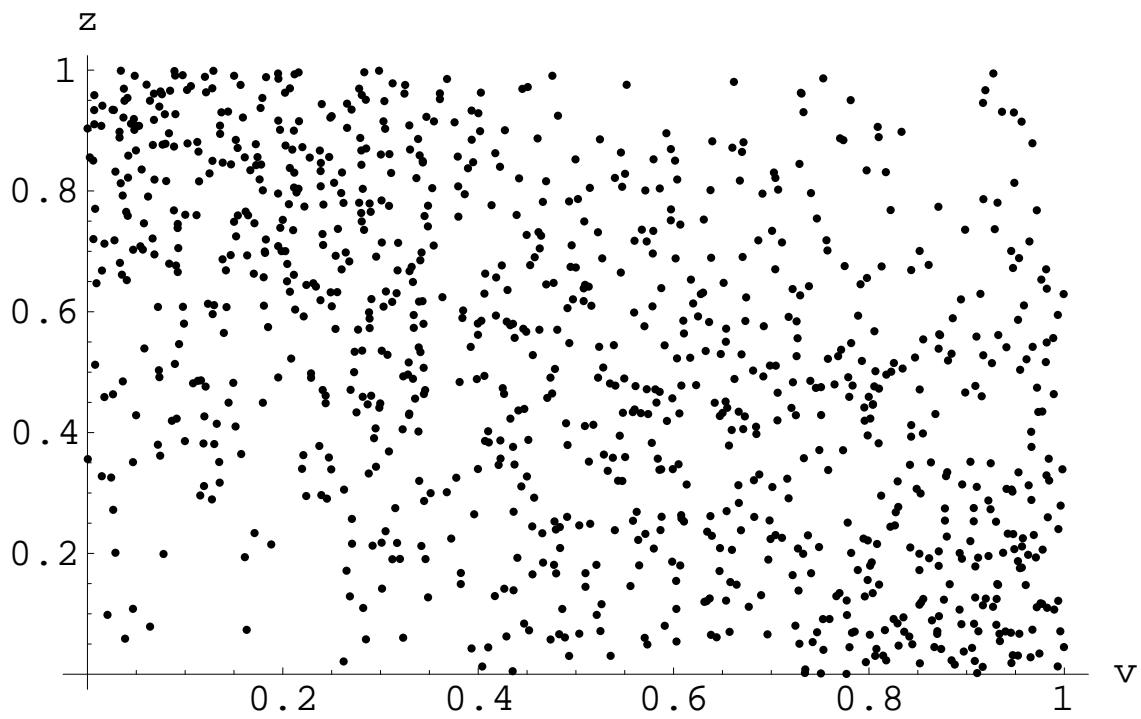
Następnie, korzystając z równania

$$rn = \mathcal{C}_{1|2}(v, z) \quad (2.10)$$

(przy wcześniej ustalonym v) wyznaczamy wartość poszukiwanej zmiennej z w zależności od rn ,

$$z = F_v^{-1}(rn) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 + \frac{\alpha rn [\exp(-\alpha) - 1]}{\exp(-\alpha v)(1 - \alpha rn) + \alpha rn} \right\}. \quad (2.11)$$

W ten sposób otrzymujemy punkt (v, z) . Działając w pętli programu komputerowego możemy symulować na tej drodze dowolnie zadaną liczbę punktów w płaszczyźnie (v, z) . Właśnie na rys.2.1 przedstawiliśmy otrzymany wynik dla 1000 punktów. Widoczne jest zagęszczenie punktów wokół antyprzekątnej. Wynika to z faktu, że właśnie w tym obszarze krzywizna kopuły jest największa (patrz dodatkowo rys.1.13)).



Rysunek 2.1: Punkty na płaszczyźnie (v, z) odlosowane z kopuły Franka. Widoczne jest ich zagęszczenie wokół antyprzekątnej.

Rozdział 3

Kalibracja kopuł

Stosowanie każdej teorii, a w tym interesującej nas teorii kopuł, wymaga efektywnych sposobów wyznaczania potrzebnych parametrów charakteryzujących funkcje wchodzące w skład stosowanych formuł, czyli kalibracji teorii. W naszym przypadku są to:

- gęstości rozkładów marginalnych,
- wybrane kopuły.

Metodą, która dobrze nadaje się do realizacji tego typu zadania jest *Metoda największej wiarygodności* (MNW) (ang. *Maximum Likelihood Method*) oraz jej różne warianty.

3.1 Metoda Największej Wiarygodności

W niniejszym rozdziale omówimy *Metodę Największej Wiarygodności*. Sformułujemy ją dla ogólnej sytuacji wielu zmiennych (gdyż sformułowanie dla dwóch zmiennych jest niemal identyczne). **Metoda ta opiera się na założeniu, że parametry określające gęstości rozkładów marginalnych oraz te definiujące wybraną kopułę są od siebie niezależne.**

Niech, zbiór wektorów $\{\underline{x}_t\}_{t=1}^T = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ jest zbiorem T serii niezależnych danych empirycznych, z których każda składa się z n elementów (mogą to być np. miesięczne dochody $n \geq 2$ firm podawane w okresie T miesięcy). **Zakładamy, że serie danych empirycznych, czyli wektory \underline{x}_t , $t = 1, 2, \dots, T$, są od siebie niezależne.** Dzięki temu, gęstość prawdopodobieństwa ρ określona na tych wektorach jako na zmiennych wektorowych, daje się sfaktoryzować, tzn.

$$\rho(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_T) = \prod_{t=1}^T f(\underline{x}_t), \quad (3.1)$$

gdzie f jest poszukiwaną gęstością łączną; wyznaczymy ją dopiero wtedy, gdy znalezione zostaną wartości wspomnianych parametrów. Oczywiście, gęstość tą przedstawimy za pomocą gęstości kopuły $c(F(x_{1t}), F(x_{2t}), \dots, F(x_{nt}))$ oraz gęstości brzegowych

f_j , $j = 1, 2, \dots, n$, (jak zwykle, F_j jest dystrybuantą rozkładu brzegowego o gęstości f_j). Uogólniając relację (1.34) na dowolną (skończoną) liczbę zmiennych $n \geq 2$, otrzymujemy

$$f(\underline{x}_t) = f(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}) = c(F(x_{1t}), F(x_{2t}), \dots, F(x_{nt})) \prod_{j=1}^n f_j(x_{jt}). \quad (3.2)$$

Podstawiając (3.2) do (3.1) otrzymujemy, że gęstość

$$\rho(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_T) = \prod_{t=1}^T c(F(x_{1t}), F(x_{2t}), \dots, F(x_{nt})) \prod_{j=1}^n f_j(x_{jt}). \quad (3.3)$$

Teraz możemy już sformułować zasadniczy warunek na którym opiera się metoda, **żadamy mianowicie aby gęstość ρ określona na dostępnych danych empirycznych przyjmowała wartość maksymalną ze względu na wartości określających ją parametrów**. Wygodniej jest żądać tego od logarytmu z ρ - zresztą mogłaby to być każda inna (dwukrotnie różniczkowalna) funkcja jedno-jednoznaczna. Za warunkiem tym stoi intuicja mówiąca, że skoro określone dane empiryczne zaistniały tzn., że są bardziej prawdopodobne od innych, czyli najbardziej prawdopodobne a więc maksymalizujące ρ .

W dalszym ciągu logarytm naturalny z ρ nazywamy funkcją wiarygodności i oznaczamy przez L ; zatem, na mocy (3.3)

$$L(\underline{\theta}) = L^c(\underline{\theta}^c, \underline{\theta}^f) + L^f(\underline{\theta}^f) \quad (3.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} L^c(\underline{\theta}^c, \underline{\theta}^f) &= \sum_{t=1}^T \ln c(F(x_{1t}), F(x_{2t}), \dots, F(x_{nt})), \\ L^f(\underline{\theta}^f) &= \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

traktujemy jako cząstkowe funkcje wiarygodności a $\underline{\theta} = (\underline{\theta}^f, \underline{\theta}^c)$ jest wektorem parametrów przy czym $\underline{\theta}^f = (\underline{\theta}_1^f, \underline{\theta}_2^f, \dots, \underline{\theta}_n^f)$ jest wektorem parametrów, którego składowe (w ogólności też wektory) określają gęstości rozkładów brzegowych odpowiednio f_1, f_2, \dots, f_n , natomiast $\underline{\theta}^c$ parametryzuje kopułę (której gęstością jest c). Dla prostoty oznaczeń parametry uwidocznione zostały tylko po lewej stronie obu równości w (3.5).

Warunek, na którym opiera się metoda można teraz wyrazić następująco:

$$\nabla_{\underline{\theta}} L(\underline{\theta}) = \left(\nabla_{\underline{\theta}^c} L^c(\underline{\theta}^c, \underline{\theta}^f), \nabla_{\underline{\theta}^f} L^c(\underline{\theta}^c, \underline{\theta}^f) + \nabla_{\underline{\theta}^f} L^f(\underline{\theta}^f) \right) = 0 \quad (3.6)$$

gdzie różniczkowanie cząstkowe $\nabla_{\underline{\theta}} \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\nabla_{\underline{\theta}^c}, \nabla_{\underline{\theta}^f} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}^c}, \frac{\partial}{\partial \underline{\theta}^f} \right)$ jest nazywane operatorem nabla lub gradientem.

Poniżej, w rozdz.3.1.1 przedstawiono prosty przykład pokazujący funkcjonowanie zarówno MNW jak też jej uproszczonego wariantu.

3.1.1 Uproszczona Metoda Największej Wiarygodności

Szczególnie popularna modyfikacja Metody Największej Wiarygodności opiera się na obserwacji, że **znikanie gradientu cząstkowej funkcji wiarygodności związanego z gęstościami rozkładów brzegowych** $\nabla_{\underline{\theta}^f} L^f(\underline{\theta}^f)$ prowadzi do **znikania analogicznego gradientu cząstkowej funkcji wiarygodności związanego z gęstością kopuły** $\nabla_{\underline{\theta}^f} L^c(\underline{\theta}^c, \underline{\theta}^f)$. Wynika to z konstrukcji gęstości kopuły, która stanowi superpozycję dystrybuant brzegowych. Ze stwierdzenia tego można wywieść algorytm, który przedstawiamy poniżej.

Algorytm 3.1.1.1 (Uproszczona Metoda Największej Wiarygodności, UMNW)

Krok 1

Z równania (wektorowego)

$$\nabla_{\underline{\theta}^f} L^f(\underline{\theta}^f) = 0 \quad (3.7)$$

wyznaczamy estymatę wektora parametrów $\underline{\theta}^f$ w oparciu o dane empiryczne, tzn. estymata parametru θ_j^f , $j = 1, 2, \dots, n$, czyli $\hat{\theta}_j^f$, jest funkcją odpowiednich danych empirycznych $\{x_{jt}\}_{t=1}^T$,

$$\hat{\theta}_j^f = \hat{\theta}_j^f(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jT}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Dysponując tymi estymatami można już przejść do drugiego kroku algorytmu.

Krok 2

Traktując otrzymane w pierwszym kroku algorytmu estymaty jako ustalone, można rozwiązać kolejne równanie (wektorowe)

$$\nabla_{\underline{\theta}^c} L^c(\underline{\theta}^c, \underline{\theta}^f) = 0, \quad (3.9)$$

wyrażając estymatę wektora parametrów $\underline{\theta}^c$ za pomocą danych empirycznych oraz za pomocą estymaty $\underline{\theta}^f$, tzn.

$$\hat{\theta}_j^c = \hat{\theta}_j^c(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jT}; \hat{\theta}_j^f), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

Jak widać, UMNW jest prostszą od MNW a uzyskane estymaty parametrów nie ustępują jakością analogicznym, otrzymanym w ramach tej ostatniej (będzie jeszcze o tym mowa poniżej).

Aby zobaczyć jak w praktyce działa warunek (3.7) wykonajmy na początek proste ćwiczenie polegające na wyznaczeniu estymaty wartości oczekiwanej i wariancji jednowymiarowego rozkładu Gaussa.

Ćwiczenie 3.1.1 (Estymacja parametrów rozkładu normalnego)

Założmy, że jednowymiarowa zmienna losowa x podlega rozkładowi Gaussa, wówczas funkcja największej wiarygodności przyjmuje postać

$$L^f(\underline{\theta}^f) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - T \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (x_t - \mu)^2 \quad (3.11)$$

gdyż w wyrażeniu (3.4) obecny jest tylko drugi składnik co oznacza, że w tym przypadku warunki (3.6) i (3.7) są sobie równoważne a warunek (3.9) nie istnieje ponadto, $\underline{\theta}^f = (\mu, \sigma)$. Korzystając właśnie z równania (3.6) lub (3.7), czyli przyrównując do zera pierwsze pochodne cząstkowe powyższej funkcji wiarygodności po parametrach μ i σ , otrzymujemy wyrażenia na estymaty tych parametrów

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu})^2. \quad (3.12)$$

Można wykazać [8], że tak otrzymany estymator wartości oczekiwanej jest nieobciążony. Jeżeli chodzi o estymator wariancji to sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdyż jest on obciążony. Jej estymator nieobciążony został znaleziony na niezależnej drodze - jest postaci

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu})^2. \quad (3.13)$$

Jak widać, estymator otrzymany metodą MNW lub UMNW powinien zostać polepszony o czynnik $T/(T-1)$.

Bibliografia

- [1] U. Cherubini, E. Luciano, W Vecchiato: *Copula Methods in Finance*, J. Wiley, 2006.
- [2] J.-P. Bouchaud: *Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk management*, Cambridge, 2000.
- [3] R. Zieliński: *Metody Monte Carlo*, WNT, Warszawa 1970.
- [4] R. Zieliński: *Generatory liczb losowych. Programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych*, WNT, Warszawa 1972.
- [5] P. Glasserman: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, 2004.
- [6] Oprogramowanie *Matlab*.
- [7] Oprogramowanie *Mathematica*.
- [8] R. Nowak: *Statystyka dla fizyków*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2002.