

**Autotest**  
czerwiec 2010

**Liczby i ich zbiory**

**Zadanie 1.** Niech  $A$  będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 6,  $B$  zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 2,  $C$  zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 3. Znaleźć i opisać zbiory:

$$\begin{array}{ll} A \cup B = & A \cap C = \\ C \setminus A = & A \cap C = \\ A \setminus C = & A \cap B \cap C = \\ A \cup B \cup C = & \end{array}$$

**Zadanie 2.** (\*) Niech  $A$  będzie zbiorem punktów płaszczyzny o współrzędnych  $(x, y)$ , dla których  $x^2 + y^2 < 1$ ,  $B$  – zbiorem punktów płaszczyzny o współrzędnych  $(x, y)$ , dla których  $x^2 + y^2 < 4$ ,  $C$  – zbiorem punktów płaszczyzny o współrzędnych  $(x, y)$ , dla których  $(x-2)^2 + y^2 < 4$ . Naszkicować na płaszczyźnie zbiory

$$A \cup B, \quad A \cup B \cup C, \quad B \cap C, \quad A \setminus B, \quad A \cap B \cap C.$$

**Zadanie 3.** Rozłożyć na czynniki wyrażenia:

$$(a) \quad xy + yz + x + z =$$

$$(b) \quad y^3(a-x) - x^3(a-y) + a^3(x-y) = (*)$$

**Zadanie 4.** Uprościć wyrażenia:

$$(a) \quad \left( \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \right) \left( \frac{a^2+b^2}{2ab} + 1 \right) \frac{ab}{a^2+b^2} =$$

$$(b) \quad \frac{1}{(x+y)^2} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^3} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) =$$

**Zadanie 5.** Rozwiązać równania

$$(a) \quad \sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$$

$$(b) \quad 5^x - 5^{3-x} = 20 \quad (*)$$

$$(c) \quad \sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}} \quad (**)$$

$$(d) \quad \log(x-2) - \log(4-x) = 1 - \log(13-x) \quad (*)$$

**Zadanie 6.** Rozwiązać nierówności

$$(a) \quad \frac{2}{x-1} < \frac{3}{x}$$

$$(b) \quad \left| \frac{1}{x+2} \right| < \left| \frac{2}{x-1} \right|$$

**Zadanie 7.** W jakim stosunku należy zmieszać dwa roztwory cukru o stężeniach 7% i 18%, aby otrzymać roztwór 13-procentowy?

### Funkcje: własności, wykresy...

**Zadanie 8.** Sporządzić wykres funkcji  $f(x) = |x + 1|$ , określić jej dziedzinę i zbiór wartości. W jakim przedziale wartości argumentu  $x$  funkcja jest rosnąca?

**Zadanie 9.** Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ ax + 4y + z = 5 \\ 6x + (a + 2)y + 2z = 13 \end{cases}$$

jeśli  $a$  jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą.

**Zadanie 10.** Sporządzić wykres funkcji  $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$ . Znaleźć miejsca zerowe tej funkcji.

**Zadanie 11.** (\*) Dla jakich wartości parametru rzeczywistego  $m$  równanie

$$2x^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0$$

ma dwa pierwiastki spełniające warunek  $|x_2 - x_1| = 1$ ?

**Zadanie 12.** (\*) Rozwiązać równanie

$$x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0$$

**Zadanie 13.** (\*) Sporządzić wykres funkcji  $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ . Podać dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

**Zadanie 14.** (\*) Sporządzić wykres funkcji  $f(x) = -2^x - 1$ . Podać dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

**Zadanie 15.** (\*) Nie posługując się kalkulatorem ani tablicami logarytmów uporządkować według wielkości liczby:

$$\log_3 6, \log_4 8, \log_3 5.$$

**Zadanie 16.** (\*) Rozwiązać równania

$$(a) \sin x + \cos x = 1, \quad (b) 3 \sin x = 2 \cos^2 x$$

**Zadanie 17.** Czy wiesz ile to jest?

$$\cos 120^\circ = ?, \quad \sin \frac{\pi}{4} = ?, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = ?, \quad \operatorname{ctg} 210^\circ = ?$$

**Zadanie 18.** (\*) Czy potrafisz wyrazić poniższe wielkości w terminach funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ ? Przykład  $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = ?, \quad \cos(270^\circ - \alpha) = ?, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = ?, \quad \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = ?$$

**Zadanie 19.** Czy pamiętasz wzory na sin i cos kątów podwojonych:

$$\sin 2\alpha = \quad \cos 2\alpha =$$

**Zadanie 20.** Znaleźć sumę wszystkich liczb dwucyfrowych niepodzielnych przez 3.

**Zadanie 21.** Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Znaleźć iloraz tego ciągu wiedząc, że suma drugiego i czwartego wyrazu tego ciągu jest dwa razy większa od sumy pierwszego i trzeciego wyrazu.

**Zadanie 22.** (\*\*) Znaleźć pochodne funkcji

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad g(x) = \sin x + \cos x, \quad h(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$$

**Zadanie 23.** (\*\*) Pod jakim kątem przecinają się krzywe

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = x^2?$$

**Zadanie 24.** Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 i 4. Zbudowano okrąg  $o(O, r)$  o środku  $O$  leżącym na przeciwprostokątnej, styczny do większej przyprostokątnej i zawierający wierzchołek przeciwległy do większej przyprostokątnej. Znaleźć promień okręgu.

**Zadanie 25.** Przez środek boku trójkąta równobocznego poprowadzono prostą tworzącą z tym bokiem kąt ostry  $\alpha$  i dzielącą pole trójkąta w stosunku 7 : 1. Obliczyć  $\alpha$

**Zadanie 26.** (\*) Obliczyć objętość równoległościanu, którego wszystkie boki są rombami o boku  $a$  i kącie ostrym  $\alpha$ .

**Zadanie 27.** Kulę metalową o promieniu  $R$  przetopiono na stożek, którego powierzchnia boczna jest trzy razy większa od pola podstawy. Znaleźć wysokość stożka.