

Szkoła Doktorska Nauk Ścisłych i Przyrodniczych – Nauki Fizyczne

Egzamin pisemny

W rozwiązaniach przedstaw tok rozumowania prowadzący do wyniku.

Końcowe wyniki obliczeń zapisz z dokładnością 3 lub 2 cyfr znaczących, po odpowiednim zaokrągleniu, np. $1,23456 \cdot 10^{-19} \approx 1,23 \cdot 10^{-19}$ lub $1,2 \cdot 10^{-19}$.

Wartości wybranych stałych

prędkość światła w próżni	$c \approx 3,00 \cdot 10^8$ m/s
ładunek elementarny	$e \approx 1,60 \cdot 10^{-19}$ C
stała Coulomba	$k_e \approx 8,99 \cdot 10^9$ N m ² /C ²
stała Plancka	$h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js $\approx 4,14 \cdot 10^{-15}$ eVs
zredukowana stała Plancka	$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$ Js $\approx 6,58 \cdot 10^{-16}$ eVs
stała grawitacji	$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm ² /kg ²
stała Avogadra	$N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹
stała gazowa	$R \approx 8,31$ J/(K·mol)
stała Boltzmannna	$k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K $\approx 8,62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
stała Rydberga	$R_\infty \approx 1,10 \cdot 10^7$ m ⁻¹
rydberg	$Ry \approx 13,6$ eV
masa elektronu	$m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg ≈ 511 keV/c ²
masa protonu	$m_p \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg ≈ 938 MeV/c ²
jednostka masy atomowej	$u \approx 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg ≈ 931 MeV/c ²

Zadania 1–7 to zadania łatwiejsze.

Oddaj (prześlij) rozwiązania tylko czterech z tych zadań!

Za każde z tych czterech rozwiązań możesz zdobyć 6 punktów.

Zadania 8-12 to zadania trudniejsze.

Prześlij rozwiązania tylko dwóch z tych zadań!

Za każde z tych dwóch rozwiązań możesz zdobyć 8 punktów.

Zadania łatwiejsze

Zadanie 1. Tunel przez środek Ziemi.

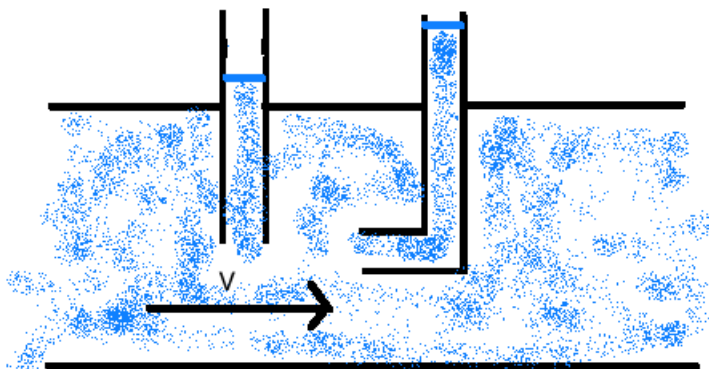
Gdyby można było wywiercić tunel przez środek kuli ziemskiej wzdłuż jej osi obrotu i do jednego końca tego tunelu wrzucić mały kamień, to po jakim czasie kamień ten przeleciałby na drugą stronę Ziemi? Przyjmij, że Ziemia jest idealną kulą o stałej gęstości, masie $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg i promieniu $R = 6370$ km. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³/(kg·s²)

Zadanie 2. Cząstka w polach \vec{E} i \vec{B} .

Cząstka o masie m i ładunku q porusza się w stałych i jednorodnych polach: elektrycznym $\vec{E} = -E\hat{e}_y$ i magnetycznym $\vec{B} = B\hat{e}_z$. W chwili początkowej cząstka znajduje się w początku układu współrzędnych, a jej prędkość wynosi wtedy $\vec{v}_0 = v_0\hat{e}_x$. Znaleźć zależność położenia tej cząstki od czasu i naszkicować trajektorię cząstki. Wartość prędkości cząstki jest przez cały czas dużo mniejsza od prędkości światła w próżni c .

Zadanie 3. Przepływająca woda.

Przez poziomą rurę przepływa idealny płyn, tzn. nielepki i nieściśliwy. Przepływ jest jednorodny, tzn. prędkość płynu jest wszędzie taka sama. W ścianie rury umieszczone są prostopadle dwie cienkie rurki, zakończone na tym samym poziomie tak, jak na rysunku. Różnica wysokości poziomów płynu w tych rurkach wynosi $\Delta h = 0,2$ m. Ile wynosi prędkość przepływu płynu w poziomej rurze?



Zadanie 3. Przepływająca woda

Zadanie 4. Izotermiczne rozprężanie.

Azot o masie $m = 1,5$ kg, rozprężając się izotermicznie w temperaturze $T = 300$ K, zużył ciepło w ilości $Q = 2,5 \cdot 10^5$ J. Ile razy zmieniło się ciśnienie i ile razy zmieniła się objętość gazu? Masa cząsteczkowa azotu $\mu = 28$ kg/kmol, a stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3$ J/(kmol·K). Traktujemy azot jako gaz doskonały.

Zadanie 5. Dyfrakcja na kryształach.

Przeprowadzono pomiar dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego na kryształach białka, stosując promieniowanie o długości fali $\lambda_1 = 3,0$ Å. Wyznacz maksymalną rozdzielczość d_{max1} , z jaką można wyznaczyć strukturę kryształu białka w oparciu o te pomiary. Jaka powinna być długość fali λ_2 użytego promieniowania, aby możliwe było rejestrowanie danych z rozdzielczością d_{max2} dwukrotnie większą?

Wskazówka: maksymalna rozdzielczość jest równoważna minimalnej odległości płaszczyzn sieciowych, od których można zaobserwować refleks.

Zadanie 6. Ściskanie rury z PCV.

Długość leżącej poziomo rury z PCV wynosi $L = 10$ m. Ile wyniesie długość tej rury postawionej pionowo? Gęstość PCV $\rho = 1300$ kg/m³, moduł Younga PCV $Y = 3,4$ GPa, a przyspieszenie ziemskie to $g = 9,81$ m/s².

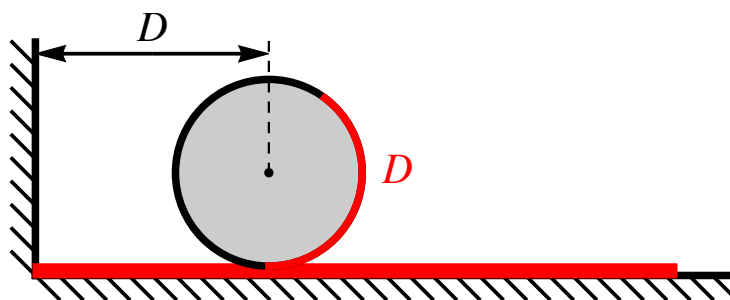
Zadanie 7. Bańki mydlane.

Dwie sferyczne bańki mydlane o promieniach, odpowiednio, r_1 i r_2 łączą się, tworząc bańkę mydlaną o promieniu r_3 . Wykazać, że objętość powstałej bańki jest większa niż suma objętości baniek początkowych, a powierzchnia powstałej bańki jest mniejsza niż suma powierzchni baniek początkowych. Wskazówka: Dla sferycznej bańki o promieniu r związek między ciśnieniem wewnętrznym p_{in} i ciśnieniem zewnętrznym p_{out} ma postać $p_{in} = p_{out} + 2\sigma/r$, gdzie σ jest napięciem powierzchniowym.

Zadania trudniejsze

Zadanie 8. Pas gumy.

Elastyczny pas gumy położony na gładkim stole wydłuża się jednorodnie wskutek przyłożenia odpowiedniej siły do jednego z końców pasa, podczas gdy położenie drugiego końca pasa jest ustalone. Przesuwając się, pas gumy obraca bez poślizgu walcową rolkę, której oś jest ustalona, prostopadła do kierunku rozciągania gumy i równoległa do powierzchni stołu. Punkt styku rolki z gumą znajduje się stale w odległości D od nieruchomego końca gumy. Gumę rozciągnięto od początkowej długości L_1 do długości L_2 w taki sposób, że ustalony punkt na powierzchni rolki pokonał drogę równą D , a guma była stale napięta. Wyznaczyć stosunek L_2/L_1 .



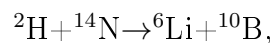
Zadanie 8. Pas gumy (rysunek).



Zadanie 8. Pas gumy (zdjęcie). Wykonał J. Grabarczyk.

Zadanie 9. Energia progowa.

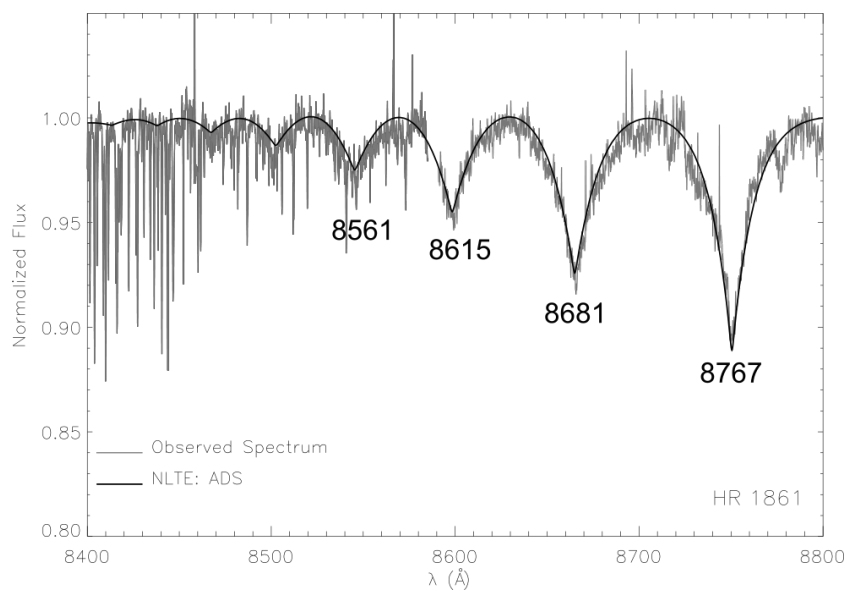
Rozpatrzmy endotermiczną reakcję jądrową:



której ciepło wynosi $Q = -10,1$ MeV. Jeśli w laboratorium deuteron ${}^2\text{H}$ jest rozpraszany na spoczywającym ${}^{14}\text{N}$, to jaką minimalną energię kinetyczną musi mieć deuteron ${}^2\text{H}$, by ta reakcja mogła zachodzić?

Zadanie 10. Widmo wodoru.

Na rysunku przedstawiono fragment widma światła emitowanego przez gwiazdę HR1861 [1], w którym widoczna jest część linii absorpcyjnych należących do jednej z tzw. serii widmowych wodoru. Kolejne linie odpowiadają przejściom z tego samego dolnego poziomu energetycznego do kolejnych górnych poziomów.



Zadanie 10. Widmo wodoru

Wykonaj niezbędne obliczenia i odpowiedz na poniższe pytania:

- Jaka jest główna liczba kwantowa n dolnego poziomu przejść należących do tej serii?

- b. Jaka jest krótkofalowa granica tej serii, to znaczy poniżej jakiej długości fali nie mogą już być obserwowane linie należące do tej serii?
- c. Jaka jest największa długość fali linii należącej do tej serii?

Długości fali na wykresie podane są w angstromach, $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m}$.

Stała Rydberga $Ry = 13,6\text{ eV}$, stała Plancka $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s} = 4,14 \cdot 10^{-15}\text{ eV}\cdot\text{s}$,
prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$.

[1] M. F. Nieva¹, N. Przybilla, Hydrogen and helium line formation in OB dwarfs and giants. A hybrid non-LTE approach, A&A 467, 295–309 (2007).

Zadanie 11. Określenie stężenia roztworu na podstawie pomiaru absorpcji.

Zmierzono widmo absorpcyjne w zakresie UV pewnej substancji, umieszczając jej roztwór w kuwecie kwarcowej o drodze optycznej $l = 0,5\text{ cm}$. W widmie widoczne są dwa wąskie pasma z maksimum dla długości fali 280 nm i 220 nm o absorpcji, odpowiednio, $A_{280} = 0,5$ i $A_{220} = 3,05$, natomiast absorpcja zarejestrowana dla długości fali większych niż 320 nm jest stała i wynosi $A_{>320} = 0,10$. Następnie roztwór dwukrotnie rozcieńczono (tym samym rozpuszczalnikiem, w jakim był sporządzony pierwszy roztwór) i ponownie zarejestrowano widmo w tej samej kuwecie. Tym razem w maksimach dla długości fali 280 nm i 220 nm absorpcja wynosiła, odpowiednio, $A'_{280} = 0,30$ i $A'_{220} = 1,75$, natomiast absorpcja dla długości fali większych niż 320 nm nie uległa zmianie.

Wyznacz stężenie wyjściowego roztworu badanej substancji, wiedząc, że w warunkach przeprowadzonego pomiaru jej dziesiętne molowe współczynniki absorpcji dla długości fali 280 nm i 220 nm wynoszą, odpowiednio, $\varepsilon_{280} = 10000\text{ M}^{-1}\text{cm}^{-1}$ oraz $\varepsilon_{220} = 150000\text{ M}^{-1}\text{cm}^{-1}$.
Odpowiedź uzasadnij.

Uwagi:

Absorpcja to logarytm dziesiętny stosunku natężenia wiązki promieniowania padającego na badaną próbkę do natężenia wiązki promieniowania przechodzącego przez badaną próbkę. Dziesiętny molowy współczynnik absorpcji to wartość absorpcji roztworu o stężeniu 1 M badanego w kuwecie o długości drogi optycznej 1 cm.

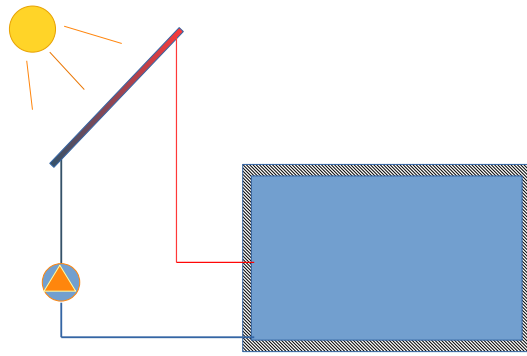
Zadanie 12. Ogrzewanie basenu.

Dany jest układ składający się z basenu z wodą (krytego i odizolowanego od otoczenia), ogrzewacza solarnego i pompy. Pompa tłoczy wodę z basenu przez ogrzewacz solarny i z powrotem, a masowe natężenie przepływu wynosi $\frac{dm}{dt} = 0,04\text{ kg/s}$. Ile czasu potrzeba na ogrzanie wody w basenie o $\Delta T = 1^\circ\text{C}$? Ile wyniesie czas ogrzewania, jeśli wydajność pracy pompy zwiększy się dwukrotnie, tj. dwukrotnie zwiększy się masowe natężenie przepływu $\frac{dm}{dt}$ przez ogrzewacz solarny?

Należy pominąć straty ciepłne i przyjąć, że sprawność ogrzewacza η jest stała $\eta = \eta_0 = 50\%$. Masa wody w basenie wynosi $M = 5000\text{ kg}$, ciepło właściwe wody to $c_w = 4200\text{ J}/(\text{kg K})$. Temperatura wody w basenie jest jednorodna i początkowo wynosi $T_0 = 15^\circ\text{C}$. Natężenie promieniowania słonecznego wynosi $I = 800\text{ W/m}^2$, a powierzchnia ogrzewacza to $A = 10\text{ m}^2$.
Wskazówka: Sprawność ogrzewacza

$$\eta = \frac{P}{AI},$$

gdzie $P = \frac{dm}{dt}c_w(T_{\text{out}} - T_{\text{in}})$ jest mocą ogrzewacza solarnego, a T_{in} i T_{out} są temperaturami odpowiednio na wejściu i wyjściu z ogrzewacza.



Zadanie 12. Ogrzewanie basenu.