# Szkoła Doktorska, nauki fizyczne, egzamin

W rozwiązaniach przedstaw tok rozumowania prowadzący do wyniku.

Końcowe wyniki obliczeń zapisz z dokładnością 3 lub 2 cyfr znaczących, po odpowiednim zaokrągleniu, np. $1{,}234\,56 \cdot 10^{-19} \approx 1{,}23 \cdot 10^{-19}$ lub $1{,}2 \cdot 10^{-19}$.

**Wartości wybranych stałych**

| | |
|---|---|
| prędkość światła w próżni | $c \approx 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s |
| ładunek elementarny | $e \approx 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C |
| stała Coulomba | $k_e \approx 8{,}99 \cdot 10^{9}\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$ |
| stała Plancka | $h \approx 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \approx 4{,}14 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s}$ |
| zredukowana stała Plancka | $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \approx 6{,}58 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{eV\,s}$ |
| stała grawitacji | $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$ |
| stała Avogadra | $N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ |
| stała gazowa | $R \approx 8{,}31\ \mathrm{J/(K\,mol)}$ |
| stała Boltzmanna | $k_B \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \approx 8{,}62 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$ |
| stała Rydberga | $R_\infty \approx 1{,}10 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$ |
| rydberg | $\mathrm{Ry} \approx 13{,}6$ eV |
| masa elektronu | $m_e \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \approx 511\ \mathrm{keV}/c^2$ |
| masa protonu | $m_p \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \approx 938\ \mathrm{MeV}/c^2$ |

## Zadania 1–5 to zadania łatwiejsze.

## Prześlij rozwiązania tylko czterech tych zadań!

## Za każde z tych czterech rozwiązań możesz zdobyć 6 punktów.

## Zadania 6–9 to zadania trudniejsze.

## Prześlij rozwiązania tylko dwóch z tych zadań!

## Za każde z tych dwóch rozwiązań możesz zdobyć 8 punktów.

# 1 Zadanie – Elektrony i diament

Sąsiednie atomy węgla w krysztale diamentu znajdują się w odległości $d = 1{,}545 \cdot 10^{-10}$ m. Na kryształ padają elektrony przyśpieszane napięciem $U$. Długość fali de Broglie'a padającego elektronu jest równa $d$. Elektrony początkowo spoczywały. Przyśpieszanie zachodzi w próżni. Należy pominąć straty energii związane z promieniowaniem elektromagnetycznym przyśpieszanego ładunku.

Oblicz napięcie $U$.

# 2 Zadanie – Laser i parowanie

Laser chirurgiczny emituje promieniowanie podczerwone o długości fali 10,6 µm. Promieniowanie to pada na składającą się przede wszystkim z wody tkankę o objętości 0,1 mm$^3$. W czasie 1,00 ms wskutek oświetlenia przez laser: temperatura tkanki wzrasta od 36 °C do 100 °C, a następnie tkanka odparowuje. Należy przyjąć, że ciepło właściwe, ciepło parowania oraz gęstość tkanki są stałe i odpowiednio równe $c = 4200$ J/(kg K), $l = 2257$ kJ/kg, $\rho = 997$ kg/m$^3$.

Oblicz, ile fotonów zostało zaabsorbowanych przez tkankę.

# 3 Zadanie – Oscylator harmoniczny

Cząstka o masie $m$ może poruszać się wzdłuż osi $X$. Energia potencjalna cząstki jest równa

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

gdzie $\omega$ jest stałą. Gdy układ ten rozpatrywany jest kwantowo, to stan podstawowy, czyli o najniższej możliwej energii, opisywany jest funkcją falową

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$$

Natomiast gdy układ o tej samej energii rozpatrzony zostanie klasycznie, to zakres możliwych wartości $x$ okazuje się ograniczony.

Oblicz prawdopodobieństwo znalezienia układu kwantowego w stanie podstawowym poza obszarem $x$ dostępnym klasycznie.

*Wskazówka.*

$$\int_1^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \approx 0{,}139$$

# 4 Zadanie – Proces $e^+e^- \to \gamma\gamma$

Poruszający się prostoliniowo pozyton zderza się ze spoczywającym elektronem, w wyniku czego cząstki te anihilują i powstają dwa fotony (kwanty gamma). Kierunek ruchu każdego z fotonów tworzy kąt 30° z kierunkiem ruchu pozytonu przed zderzeniem.

Oblicz energię pozytonu przed zderzeniem.

## 5 Zadanie – Dwa atomy

Czas połowicznego rozpadu pewnego izotopu wynosi $T_{1/2} = 4$ min. Dwa atomy tego izotopu umieszczono w pułapce. Należy przyjąć, że atomy są rozróżnialne oraz że ich rozpady są niezależne.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w czasie $t = 2T_{1/2} = 8$ min od umieszczenia atomów w pułapce **tylko jeden** z atomów ulegnie rozpadowi.

**Zadania 6–9 to zadania trudniejsze.**

**Prześlij rozwiązania tylko dwóch z tych zadań!**

**Za każde z tych dwóch rozwiązań możesz zdobyć 8 punktów.**

## 6 Zadanie – Ubywający węgiel

Wagonik o masie $m$ wypełniony jest początkowo węglem o masie $M$ i spoczywa. Na wagonik działa stała siła o wartości $F$, skierowana równolegle do prostoliniowego toru, po którym wagonik może się poruszać. Przez dziurę w podłodze wagonika jednostajnie wysypuje się z niego węgiel w takim tempie, że po czasie $T$ w wagoniku nie ma już węgla. Pomiń opory ruchu.

a) Wyznacz prędkość wagonika w chwili, gdy wysypie się z niego cały węgiel.

b) Przedyskutuj przypadek $M \ll m$.

## 7 Zadanie – Wypływający płyn

Wnętrze cylindrycznego pojemnika ma kształt walca o wysokości $h = 10$ m i promieniu podstawy $R = 1$ m. Oś symetrii obrotowej pojemnika jest pionowa. Wnętrze pojemnika jest wypełnione cieczą doskonałą, to znaczy nielepką i nieściśliwą. W dnie pojemnika jest kołowy otwór o polu $S_0 = 0{,}1$ m$^2$. Gęstość cieczy jest równa $\rho = 1000$ kg/m$^3$. Należy przyjąć przyśpieszenie ziemskie $g = 10$ m/s$^2$ oraz pominąć zmianę ciśnienia atmosferycznego pomiędzy podstawą i górą cylindra.

Oblicz czas, po jakim ciecz wypłynie z wnętrza pojemnika.

## 8 Zadanie – Kwantowy cylinder

Nanorurka węglowa jest zwiniętą w cylinder pojedynczą warstwą grafitu (grafenu). W tej dwuwymiarowej powierzchni mogą poruszać się elektrony. Jako model nanorurki węglowej należy przyjąć powierzchnię boczną walca prostego o wysokości $L$ i obwodzie $D$. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do krawędzi powierzchni. Energia potencjalna elektronu na powierzchni jest równa 0.

a) Wyznacz zależność od położenia funkcji falowej dla jednego elektronu w stanie o określonej energii oraz odpowiadającą energię wraz z wartościami liczb kwantowych (normalizacja funkcji nie jest wymagana).

b) Dla $D = 2L$ wyznacz energię stanu podstawowego, $E_0$, dla jednego elektronu. Następnie wypisz: wartości energii kolejnych czterech stanów o określonej energii jako wielokrotności $E_0$, odpowiadające im liczby kwantowe oraz degeneracje.

c) Dla $D = 2L$ wyznacz jako wielokrotność $E_0$ energię stanu podstawowego 10 elektronów umieszczonych w tym układzie.

*Wskazówka.* Operator Laplace'a w układzie współrzędnych cylindrycznych $(\phi, z)$ na powierzchni walca o promieniu $R$ ma postać:

$$\Delta = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

## 9 Zadanie – Przepływ ciepła

Jeden mol jednoatomowego gazu doskonałego uległ następującej przemianie: wraz ze wzrostem objętości ciśnienie malało liniowo od wartości $3p_0$ przy objętości $V_0$ do wartości $p_0$ przy objętości $5V_0$, gdzie $p_0$ oraz $V_0$ są stałymi. W trakcie tej przemiany gaz początkowo pobierał ciepło, a potem je oddawał.

Wyznacz objętość gazu, przy której nastąpiła zmiana kierunku przepływu ciepła.