Prof. dr hab. Bronisław Jakubczyk
Instytut Matematyczny PAN
Warszawa

Opinia o cyklu prac habilitacyjnych "Zastosowania struktur geometrycznych w układach Liego" oraz innych osiągnięciach naukowych doktora Javiera de Lucasa Araujo.

Cykl habilitacyjny składa się z 9 prac oznaczonych w autoreferacie jako (H1)-(H9) i opublikowanych w latach 2012-2015. Prace te ukazały się w czasopismach: J. Differential Equations (3 prace), Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. (3 pr.), J. Phys. A (2 pr.) oraz praca konferencyjna. Wszystkie są współautorskie a łączna liczba współautorów z udziałem w pracach to: A. Ballesteros (2 prace), A. Blasco (1 pr.), J.F. Cariñena (3 pr.), J. Grabowski (1 pr.), F.J. Herranz (2 pr.), C. Sardon (7 pr.) i S. Vilariño (2 pr.).

Temat rozprawy. Tematem rozprawy jest analiza gładkich nieautonomicznych równań różniczkowych na rozmaitościach, których pola wektorowe generują skończenie wymiarową algebrę Liego, zwanych układami Liego. Dokładniej, układem Liego nazywane jest zależne od czasu pole wektorowe $X(t,\cdot) = X_t$, $t \in I\!R$, na gładkiej rozmaitości N takie, że podalgebra Liego $L_X = Lie\{X_t \mid t \in I\!R\}$ (algebra Vessiota-Guldberga) generowana przez rodzinę pól X_t w algebrze wszystkich pól wektorowych z nawiasem Liego jest skończonego wymiaru. Takie zależne od czasu pole definiuje nieautonomiczny układ dynamiczny na N, przynajmniej lokalnie, dany przez równanie różniczkowe

$$\dot{x} = X(t,x). \tag{RR}$$

Założenie, że algebra Liego L_X jest skończonego wymiaru m pozwala często na podanie recepty na rozwiązywanie tego nieliniowego równania lub przynajmniej na analizę własności rozwiązań, korzystając z wiedzy o algebrze L_X.

Takimi układami zajmował się już Sophus Lie pod koniec XIX wieku i jedną z konsekwencji założenia $dim\, L_X = m < \infty$ jest to, że lokalnie dowolne rozwiązanie $x(t)$ takiego równania można w typowych punktach przedstawić jako nieliniową funkcję układu m rozwiązań $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ tego równania oraz n parametrów $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ odpowiadających za warunki początkowe dla $x(t)$, gdzie $n = dim\, N$ (Tw. Lie-Scheffersa):

$$x(t) = F(x_1(t), \ldots, x_m(t), \lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{RS}$$

Powyższa własność jest nazywana własnością regułą składania rozwiązań a wyjściowym przykładem o tej własności są równania liniowe względem x na $N = I\!R^n$, wtedy $m = n$.

Operując dzisiejszymi terminami i zakładając zupełność pól wektorowych istnienie takiej własności można wytłumaczyć następująco. Potok zależnego od czasu pola wektorowego X można włożyć jako krzywą w grupę Liego G_X algebry Liego L_X działającą na N. Rozważenie jednocześnie m+1 rozwiązań $x(t), x_1(t), \ldots, x_m(t)$ prowadzi do działania tejże grupy na zmultiplikowanej przestrzeń stanu $N^{m+1} = N \times \cdots \times N$. Wymiar orbit działania grupy G_X nie przekracza wymiaru grupy, zatem działanie tej grupy da foliację orbit wymiaru nie większego niż $dimG_X = dimL_X = m$, w otoczeniu generycznych punktów. Przy wystarczająco dużym m foliacja ta będzie kowymiaru co najmniej n, skąd wniosek że z funkcji stałych na liściach foliacji można utworzyć n całek pierwszych

$G = (G_1, \cdots, G_n)$. W ten sposób można uzyskać związek między $m+1$ rozwiązaniami dany w postaci uwikłanej

$$G_i(x(t), x_1(t), \ldots, x_m(t)) = \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{U}$$

(Warunki początkowe dla każdego z rozwiązań $x_i(t)$ ustalamy a stałe λ_i parametryzują warunek początkowy dla $x(t)$.) Przy odpowiednim wyborze funkcji G_i układ ten daje się rozwiązać ze względu na $x(t)$, co daje regułę składania (RS).

Za główne osiągniecie rozprawy uważam pokazanie metody konstrukcji układu funkcji G_i (w konsekwencji często też zależności (RS)) bez całkowania równania różniczkowego (RR), korzystając jedynie z znajomości struktury algebry Liego L_X i hamiltonianów przypisanych polom wektorowym z L_X.

Wyniki rozprawy. Numeracja prac H1-H9 w autoreferacie jest odwrotna do chronologicznej, omówię krótko wyniki w kolejności zbliżonej do chronologicznej. W krótkiej pracy H9 autorzy proponują nowe spojrzenie na nieautonomiczne równanie różniczkowe 2-go rzędu z nieliniowością wielomianową 3-go rzędu przez sprowadzenie go przez niestandartową transformatę Legendre'a do układu dwu równań z nieliniowością 2-go rzędu i zauważenie, że jest to układ Liego.

W pracach H8, H7, H3 i H2 wprowadza się układy Lie-Hamiltona i bada ich podstawowe własności z punktu widzenia własności składania rozwiązań. Wprowadzającą i analizującą odpowiednie pojęcia jest praca H8. Definiuje się tu układ Lie-Hamiltona jako układ pól wektorowych X_t, $t \in I\!R$, który generuje skończenie wymiarową algebrę Liego i dodatkowo każde z pól H_t jest hamiltonowskie względem pewnej, tej samej dla wszystkich, struktury Poissona Λ na N. Autorzy badają, które układy Lie posiadają strukturę Lie-Hamiltona i na ile ta struktura jest wyznaczona przez sam układ. Przedstawiają ogólne własności takich układów i własności układów ich całek pierwszych.

Jednym z najciekawszych dla mnie elementów tego podejścia jest wykorzystanie w pracy H7 faktu, że całki pierwsze tzw. diagonalnego rozszerzenia układu wyjściowego mogą prowadzić do jawnego wyznaczenia odwzorowania F. Autorzy wykorzystują tu geometryczne ujęcie problemu zawarte w pracy Cariñeny, Grabowskiego i Marmo z 2007 roku, wyjaśniającego rolę diagonalnych rozszerzeń. Drugim wykorzystanym elementem jest podejście A. Ballesterosa i O. Ragnisco z r. 1998 gdzie wskazano jak wykorzystać koalgebry i komnożenie do konstrukcji tzw. Casimirów i w konsekwencji całek pierwszych układów hamiltonowskich o skończenie wymiarowych algebrach i, co jest szczególnie istotne dla problemu konstrukcji reguły składania rozwiązań, konstrukcji dodatkowych funkcji Casimira dla układów złożonych (w tym wypadku przedłużeń diagonalnych). Konkretnie, w pracy H7 wykorzystuje się komnożenie w algebrze symetrycznej $S(L)$ nad algebrą Liego L układu do konstrukcji całek pierwszych diagonalnego (m+1)-krotnego rozszerzenia $\tilde{X}$ na N^{m+1} wyjściowego układu X na N. Kluczowy wynik pracy H7 to Twierdzenie 26 opisujące całki pierwsze diagonalnych przedłużeń w terminach m-tych obrazów przy komnożeniu zwykłych elementów Casimira dla algebry układu. Udaje się tu skonstruować układ całek pierwszych wystarczający dla jawnego wyznaczenia reguły składania F dla wielu mających znaczenie w fizyce układów jak układy Ermakova, równania Riccatiego, hamiltonowskie równania Kummera-Schwarza i układy Smorodinsky'ego-Winternitza.

Za główny wynik prac H2 i H3 konkludujący część wcześniejszych rozważań można uznać klasyfikację układów Liego-Hamiltona na płaszczyźnie oraz klasyfikację algebr

Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych na płaszczyźnie. W klasyfikacji korzysta się z wcześniejszych wyników. Mianowicie, już S. Lie podał klasyfikację skończenie wymiarowych algebr Liego pól wektorowych na $\mathbb{R}^n$ (lokalnie wokół punktów generycznych). Jego klasyfikacja została uściślona przez Gonzaléza, Kamrana i Olvera w roku 1992. Tę klasyfikację wykorzystują autorzy w H2, dodając szczegóły. Uzyskane wyniki stosuje się do analizy konkretnych układów znanych wcześniej jako równania Milne-Pinney'a, Kummera-Schwarza, zespolone równania Riccatiego, równania Buchdala i pewne układy Lotki-Volterry. Wyniki z pracy H2 są uzupełnione w artykule H3, gdzie dodatkowe geometryczne i algebraiczne rozważania prowadzą do ciekawych warunków dostatecznych na to by algebra Liego Vessiota-Guldberga dla układu Liego była dana przez pola hamiltonowskie i do jawnego wyznaczenia tensora Poissona. Otrzymuje się nowe wyniki dla układów na płaszczyźnie, w szczególności dla równań Cayleya-Kleina typu Ricattiego, zespolonych równań Bernoulliego i projektywnych równań Schroedingera.

W pracy H6 autorzy uogólniają podejście do problemu konstrukcji reguł składania rozwiązań do ogólniejszej klasy układów, tzw. układów Liego-Diraca, gdzie struktura Poissona na rozmaitości N jest zastąpiona ogólniejszą strukturą Diraca. Struktura taka jest zadana przez podwiązkę L wiązki Pontriagina $\mathcal{P}N = TN \oplus_N T^*N$, $dim\, L = dim\, N = n$, będącą maksymalną izotropową podwiązką dla kanonicznej metryki na włóknach $\mathcal{P}N$ (sygnatury $(+, \cdots, +, - \cdots, -)$, każdy ze znaków n razy) wynikającej z kanonicznego parowania kowektorów i wektorów:

$$\langle(\alpha, v), (\bar{\alpha}, \bar{v})\rangle = \alpha(\bar{v}) + \bar{\alpha}(v).$$

Na cięciach wiązki L można wprowadzić naturalny nawias, który przy założeniu inwolutywności L wprowadza strukturę Liego na cięciach, definiując w ten sposób strukturę algebroidu Liego w $\Gamma(L)$. Dodatkowo, w sposób podobny do definicji hamiltonowskich pól wektorowych z wykorzystaniem struktury symplektycznej na T^*N, wprowadza się pola hamiltonowskie względem struktury Diraca (N, L) oraz nawias Poissona dla odpowiadających im hamiltonianów. Po wprowadzeniu tych struktur daje się stosować metody zastosowane wcześniej dla układów Liego-Hamiltona, z podobnymi wynikami. W szczególności przedłużenia diagonalne stosują się do struktur Liego-Diraca i do hamiltonianów układu X, hamiltonowskiego względem wyjściowej struktury Diraca na N. W ten sposób dostaje się też całki pierwsze przedłużeń diagonalnych z pomocą koalgebr Poissona, podobnie jak w przypadku zwykłych układów Liego-Hamiltona. Autorzy analizują tą metodą rozwiązania dla kilku wersji równań typu Schwarza (z pochodną Schwarza). Uważam pracę H6 (37 stron w J. Differential Equations) za bardzo solidny wkład w tą tematykę.

W krótkiej pracy H4 i artykule H1 rozważa się k-symplektyczne struktury Liego (które są innym uogólnieniem struktur Liego-Hamiltona) i ich zastosowanie do konstrukcji reguł składania rozwiązań. Struktura k-symplektyczna (N, Ω) na rozmaitości N wymiaru $n(k+1)$ (to założenie w pracach H1 i H4 można by pominąć) jest to zamknięta 2-forma różniczkowa $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ na N o wartościach w $\mathbb{R}^k$, dla której część wspólna jąder $ker\ \omega_i$ składowych 2-form jest trywialna. Podobnie jak w przypadku formy symplektycznej dla każdej 2-formy ω_i można definiować hamiltonowskie pola wektorowe i ich hamiltoniany. Z definicji, pole k-hamiltonowskie Y to pole wektorowe, które jest hamiltonowskie ze względu na każdą formę ω_i. Warunek o trywialności jądra implikuje jednoznaczność pola Y przy danych jego hamiltonianach $(h_1, \ldots, h_k)$ względem presymplektycznych form $\omega_1, \ldots, \omega_k$. Badanie takich struktur było zapoczątkowane przez C. Gunthera, A. Awane'a i przez szkołę hiszpańską z Manuelem de Leon z Madrytu na czele. W pracy H1 pokazuje się, że konstrukcje i własności układów Liego-Hamiltona dają się w większości przenieść na przypadek k-symplektyczny. Autorzy wykazują jednak, że łatwiej niż przy wcześniejszych metodach daje się uzyskać odpowiednią ilość całek pierwszych dla przedłużeń diagonalnych pewnych układów Liego. W ten sposób uzyskuje się dodatkowe narzędzie dla konstrukcji reguł składania rozwiązań.

W jeszcze jednej pracy H5 zaproponowano podobną do poprzednich ideę konstrukcji całek pierwszych układu układu (RR). Tym razem wykorzystuje się do tego struktury Liego-Jacobiego (Λ, R) na rozmaitości N, gdzie Λ jest polem biwektorowym a R polem wektorowym i para ta spełnia aksjomaty struktury Liego-Jacobiego. Względem takiej struktury definiuje się pola hamiltonowskie, ich hamiltoniany, nawias Poissona funkcji itp. Zakładając, że pola X_t są hamiltonowskie względem takiej struktury wykorzystuje się elementy Casimira algebry Liego generowanej przez hamiltoniany pól X_t do konstrukcji całek pierwszych układu (RR). Wykazano, że dla pewnych układów nie istnieje struktura Liego-Jacobiego taka, że układ X jest hamiltonowski względem tej struktury. Do klasyfikacji układów Liego na $\mathbb{R}^2$ podanej w pracy H3 dodaje się tutaj wyniki mówiące, które z tych układów są hamiltonowskie ze względu na pewną strukturę Liego-Jacobiego a które nie są względem żadnej takiej struktury.

Podsumowanie i ocena cyklu habilitacyjnego. Za główną ideę cyklu habilitacyjnego można uznać wykorzystanie struktur geometrycznych na rozmaitości N do analizy zachowania się rozwiązań nieautonomicznego równania różniczkowego (RR) będącego układem Liego. Wykorzystuje się struktury, które pozwalają przejść od pól wektorowych X_t do reprezentujących je funkcji (hamiltonianów). Kolejno analizuje się pod tym kątem struktury symplektyczne i Poissona, struktury Diraca, struktury k-hamiltonowskie i struktury Liego-Jordana. Przejście od pól wektorowych do funkcji daje się wykonać jeśli pola wektorowe są hamiltonowskie względem jednej z takich struktur. Pierwszym celem takiego przejścia jest konstrukcja stałych ruchu (całek pierwszych) układu (RR). Autor cyklu prac H1-H9 zauważył też, i jest to istotny wkład w wiedzę w tym temacie, że można wykorzystać hamiltonowskość układu do konstrukcji praw składania rozwiązań (SR). Uzyskuje to, wykorzystując geometryczne podejście do praw składania zawarte w pracy Cariñeny, Grabowskiego i Marmo z r. 2007. Podejście to wymaga znalezienia wystarczającej ilości całek pierwszych tzw. przedłużeń diagonalnych wyjściowego układu. Pokazuje się, że jeśli układ wyjściowy (RR) jest hamiltonowski na N ze względu na jedną z wymienionych struktur geometrycznych to jego przedłużenie diagonalne na zmultiplikowaną rozmaitość N^{m+1} również jest hamiltonowskie ze względu na zmultiplikowanie rozważanej struktury. W ten sposób problem redukuje się do szukania całek pierwszych (stałych ruchu) układu na N^{m+1}.

Dodatkowo, w pracy H7 z r. 2013 autorzy A. Ballesteros, J.F. Cariñena, F.J. Herranz, J. de Lucas i C. Sardon wykorzystują ideę zawartą w artykule Ballesterosa i Ragnisco z r. 1998, gdzie wskazano jak wykorzystać komnożenie w koalgebrze (i bialgebrze) związanej z algebrą Liego do konstrukcji tzw. elementów Casimira układów złożonych. Istotnym pomysłem autora (autorów) publikacji H7 jest zauważenie, że multiplikowanie układu (RR) do układu diagonalnego na N^{m+1} odpowiada m-krotnemu złożeniu komnożenia $\Delta : L \to L \otimes L$ dając $\Delta^M : L \to L^{\otimes(m+1)}$. Wykorzystuje się to i znalezione elementy Casimira do otrzymania całek pierwszych układów hamiltonowskich przedłużeń diagonalnych wyjściowego układu.

Sądzę, że wyniki cyklu habilitacyjnego znacznie poszerzają wiedzę na temat układów Liego i mogą pozwolić na lepsze zrozumienie oraz bardziej dogłębną analizę zachowań rozwiązań nieautonomicznych równań różniczkowych definiowanych przez pola wektorowe $X(t, \cdot)$ generujące algebrę Liego skończonego wymiaru. Metoda zaproponowana w tych pracach może w przyszłości pozwolić na analizę wielu nowych układów mających znaczenie dla fizyki. W ten sposób wyniki te stanowią istotny wkład w dziedzinę metod matematycznych fizyki. Metody stosowane w tych badaniach, choć w większości znane, są niebanalne. Część z nich jest udoskonalana dla uzyskania wyników tych publikacji.

Opis i ocena innych dokonań naukowych. W swoim dorobku po doktoracie poza cyklem habilitacyjnym autor podaje 16 publikacji, wszystkie z współautorami, większość opublikowana renomowanych czasopismach takich jak J. of Physics A (3 prace), J. of Mathematical Analysis and Applications (2 prace), J. Differential Equations, J. Geometric Mechanics, J. Mathematical Physics (po jednej pracy). Najczęściej cytowane dwie prace, w J. Geom. Mech. i w Dissertationes Mathematicae z r. 2011, posiadają 13 cytowań (bez autocytowań) - dane według autoreferatu z Web of Knowledge. Jednak wg. Scholar Google np. druga z tych prac posiada 24 cytowania, bez autocytowań.

Duża część tych publikacji dotyczy układów Liego i reguł składania. Nie omawiając szczegółowo tych publikacji można powiedzieć, że część ich istotnej zawartości naukowej to analiza różnych wariantów równań Riccatiego, w tym układu Gambiera, równań Abela z nieliniowością wyższych rzędów i innych. W pracach tych nie używa się metod hamiltonowskich, są to raczej metody bezpośrednie.

Publikacje przed doktoratem obejmują 9 pozycji, z tego najczęściej cytowane są dwie prace z r. 2008 z Carinñeną w Phys. Letters A dotycząca równań Milne-Pinney'a (16 cytowań zewnętrznych) i artykuł z Carinñeną i Rañadą w czasopiśmie SIGMA (14 cytowań zewnętrznych) o teorii układów Liego i zastosowaniu do układów Ermakova.

Oprócz dorobku publikacyjnego należy wspomnieć o dużym doświadczeniu i dorobku dydaktycznym habilitanta. Był on też promotorem pomocniczym Cristiny Sardon w jej doktoracie obronionym w r. 2015. Uczestniczył w organizacji pięciu międzynarodowych spotkań naukowych (konferencji) w Instytucie Matematycznym PAN oraz w ośrodku konferencyjnym IM PAN w Będlewie. Trzeba dodać, że kandydat wizytował też inne ośrodki naukowe poza Polską i Hiszpanią, w tym CRM w Montrealu oraz ENS w Paryżu. Już po doktoracie w r. 2009 brał udział z referatami w 23 międzynarodowych konferencjach, część z nich to referaty zaproszone.

Konkluzja. Podsumowując powyższe uwagi mogę stwierdzić, że wyniki zawarte w cyklu habilitacyjnym (H1)-(H9) wnoszą istotny wkład w dziedzinę metod matematycznych fizyki. Metody hamiltonowskie zaproponowane w podejściu habilitanta dla analizy układów Liego i ich wykorzystanie do konstrukcji reguł składania rozwiązań nieliniowych, nieautonomicznych równań różniczkowych stanowią oryginalny i wartościowy wkład w tę tematykę. Fakt, że wszystkie prace są współautorskie może nieco osłabiać bardzo dobre wrażenie przy lekturze dorobku, jednak bardzo (nawet zaskakująco) wysoki wkład w każdą pracę zadeklarowany przez autora świadczy o jego dużym udziale w tych publikacjach. Biorąc też pod uwagę pozostałe dokonania nie mam wątpliwości, że przedstawiony dorobek spełnia wymogi stawiane dla uzyskania stopnia doktora habilitowanego.

BJ

Warszawa, 5 września 2017

Bronisław Jakubczyk