Autoreferat

“Zastosowania struktur geometrycznych w układach Liego”

Javier de Lucas Araujo

Warszawa 2017

Podstawowe dane osobowe

Imię i nazwiska	Javier de Lucas Araujo
Adres pocztowy	Katedra Metod Matematycznych Fizyki Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego ul. Pasteura 5, 02-093, Warszawa, Polska
E-mail	javier.de.lucas@fuw.edu.pl
Strona internetowa	www.fuw.edu.pl/~delucas

Stopnie naukowe

1. **Profesor contratado doctor:** Otrzymałem tytuł '*Profesor contratado doctor*'[1] nadany przez ANECA (Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación, Krajowa Agencja Oceny i Akredytacji) w 2012.
2. **Doktorat z fizyki:** Obroniłem pracę doktorską '*Lie systems and applications to Quantum Mechanics*', napisaną pod kierunkiem prof. J.F. Cariñena Marzo, na Wydziale Nauk Ścisłych Uniwersytetu w Saragossie (Hiszpania) w dniu 23 października 2009 r. Moja praca doktorska otrzymała najwyższą możliwą ocenę, tj. celujący z wyróżnieniem (SOBRESALIENTE CUM LAUDE), i zostałem nagrodzony '*Premio Extraordinario de Doctorado 2009/2010*' za wyróżnioną rozprawę doktorską przez Wydział Fizyki Uniwersytetu w Saragossie w 2011 r.[2]
3. **Magisterium z fizyki**. Wydział Fizyki, Uniwersytet w Salamance, 2004 r. Otrzymałem stypendium 'Beca de colaboración' dla najlepszych studentów kończących studia z fizyki w roku 2004[3].

Przebieg kariery naukowej

1999–2004	Studia magisterskie, Fizyka, Uniwersytet w Salamance, Salamanka (Hiszpania).
2004–2006	Studia doktoranckie, Matematyka, Wydział Matematyki, Uniwersytet w Salamance, Salamanka (Hiszpania).
2006–2009	Studia doktoranckie, Fizyka, Wydział Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet w Saragossie, Saragossa (Hiszpania).
2007–2009	Adiunkt, Wydział Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet w Saragossie, Saragossa (Hiszpania).
2009–2012	Stypendium podoktorskie, adiunkt, IMPAN, Warszawa (Polska).
2012–2013	Adiunkt, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Szkoła Nauk Ścisłych, Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa (Polska).
2013–2018	Adiunkt, Wydział Metod Matematycznych Fizyki, Uniwersytet Warszawski, Warszawa (Polska).

[1] Tytuł ten stanowi hiszpański odpowiednik polskiej habilitacji i oznacza, że naukowiec może być opiekunem doktorantów i otrzymać stanowisko naukowe na stałe. Byłem już pomocniczym opiekunem doktorantki Cristiny Sardón Muñoz od 2013 do 2015 r., która obroniła się na Uniwersytecie w Salamance w 2015 r. Uniwersytet w Salamance przyznał jej w roku 2016 nagrodę *'Premio especial de doctorado'* za wyróżniającą się pracę doktorską. Około 70% jej pracy doktorskiej była wykonana wyłącznie pod moją opieką (prof. P. García Estévez była jej promotorką) co wynika z jej publikacji i mojej rozprawy habilitacyjnej.

[2] Uniwersytet w Saragossie oferuje rocznie jedną taką nagrodę dla każdego wydziału.

[3] Napisanie pracy magisterskiej obowiązuje w Hiszpanii od wejścia w życie procesu bolońskiego.

Spis treści

Streszczenie

Układ Liego to nieautonomiczny układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, którego ogólne rozwiązanie można napisać jako nieautonomiczną funkcję, tzw. *zasada składania rozwiązań*, z generycznej rodziny rozwiązań szczególnych i zbioru stałych [**CL.PH12, PW, CGM00, CGM07**]. Istotnymi przykładami układów Liego są nieautonomiczne układy równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu i większość rodzajów równań różniczkowych Riccatiego, np. macierzowe i konforemne równania Riccatiego [**CL.PH12, PW, AW**].

Można wskazać dwa podstawowe powody zainteresowania układami Liego. Z jednej strony, analiza tych układów wymaga badania istotnych właściwości struktur geometrycznych, takich jak struktury k-symplektyczne [**LV.H1**], struktury Diraca [**CGL.H6**], odwzorowania momentu [**CGL.H6, CGL.H8**], lub skończenie wymiarowe algebry Liego pól wektorowych na rozmaitościach [**BBHL.H2, GKO92**]. Z drugiej strony, układy Liego pojawiają się w fizyce, biologii, medycynie, itd. [**BHL.H3**]. Skoro układy Liego nie są dobrze znane [**CL.PH12**], ich zastosowania prowadzą do nowatorskich podejść w badaniu starych i nowych problemów wymienionych pól badawczych [**LV.H1**].

Niniejszy autoreferat opisuje wyniki moich badań podoktorskich dotyczących zastosowań geometrycznych i algebraicznych struktur w układach Liego, zasadach składania rozwiązań i pokrewnych tematach pojawiających się w fizyce, biologii i matematyce. Moje rezultaty zostały opublikowane w następujących publikacjach:

- LV.H1. J. de Lucas i S. Vilariño, k-Symplectic Lie systems: theory and applications, *J. Differential Equations* **258**, 2221–2255 (2015). (Ranking JCR[4]: 14/312 w Mathematics) Swój wkład oceniam na 85%.
- BBHL.H2. A. Ballesteros, A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas i C. Sardón, Lie–Hamilton systems on the plane: Properties, classification and applications, *J. Differential Equations* **258**, 2873–2907 (2015). (Ranking JCR: 14/312 w Mathematics) Swój wkład oceniam na 60%.
- BHL.H3. A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas i C. Sardón, Lie–Hamilton systems on the plane: applications and superposition rules, *J. Phys. A* **48**, 345202 (2015). (Ranking JCR: 11/53 w Physics, Mathematical) Swój wkład oceniam na 65%.
- LTV.H4. J. de Lucas, M. Tobolski i S. Vilariño, A new application of k-symplectic Lie systems, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **12**, 1550071 (2015). (Ranking JCR: 41/53 w Physics, Mathematical) Swój wkład oceniam na 55%.
- HL.H5. F.J. Herranz, J. de Lucas i C. Sardón, Jacobi–Lie systems: theory and low dimensional classification w: *The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, AIMS Proceedings 2015, p. 605–614. Swój wkład oceniam na 70%.
- CGL.H6. J.F. Cariñena, J. Grabowski, J. de Lucas i C. Sardón, Dirac–Lie systems and Schwarzian equations, *J. Differential Equations* **257**, 2303–2340 (2014). (Ranking JCR: 16/312 w Mathematics) Swój wkład oceniam na 55%.
- BCHL.H7. A. Ballesteros, J.F. Cariñena, F.J. Herranz, J. de Lucas i C. Sardón, From constants of motion to superposition rules for Lie–Hamilton systems, *J. Phys. A* **46**, 285203 (2013). (Ranking JCR: 26/78 w Physics, Multidisciplinary) Swój wkład oceniam na 55%.

[4] Ranking JCR oznacza ranking w Journal Citation Reports w roku opublikowania artykułu. Dalsze informacje odnośnie danych bibliometrycznych publikacji można znaleźć w wykazie dorobku habilitacji.

CGL.H8. J.F. Cariñena, J. de Lucas i C. Sardón, Lie–Hamilton systems: theory and applications, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **10**, 1350047 (2013). (Ranking JCR: 45/55 w Physics, Mathematical) Swój wkład oceniam na 65%.

CLS.H9. J.F. Cariñena, J. de Lucas i C. Sardón, A new Lie systems approach to second-order Riccati equations, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **9**, 1260007 (2012). (Ranking JCR: 34/55 w Physics, Mathematical) Swój wkład oceniam na 70%.

Kiedy skończyłem pracę doktorską w 2009 r., istniało tylko kilka zastosowań struktur symplektycznych i dwójek Drinfelda w układach Liego [**CGM00, CR05**]. Po zbadaniu kilku nowych układów Liego typu Hamiltonowskiego [**CGL.H8, CLS.H9**] zauważyłem, że struktury geometryczne mogą grać istotną rolę w tej dziedzinie. Następnie, zastosowałem struktury Poissona, Diraca, Jacobiego i k-symplektyczne do znajdowania zasad składań rozwiązań i innych niezmienników układów Liego pojawiających się w fizyce, matematyce i biologii, np. niezmiennik Ermakova-Incea [**CGL.H8**], modele wiryczne [**BBHL.H2, BHL.H3**] albo *pola tensorowe Casimira* [**BHL.H3**]. Po pierwsze, to pozwoliło mi zinterpretować geometrycznie znane i nowe niezmienniki stowarzyszone z układami Liego [**BCHL.H7, LTV.H4**]. Po drugie, to dało początek technice uproszczenia metod obliczania zasad składań rozwiązań, stałych ruchu, itp. [**BCHL.H7**]. Po trzecie, moje badania doprowadziły do nowych wyników w nowoczesnych geometrycznych teoriach [**LV.H1**]. Pośrednio uzyskałem wiele rezultatów w zakresie istnienia, właściwości i zastosowania algebr Liego skończonego wymiaru pól wektorowych na płaszczyźnie [**BBHL.H2, HL.H5**]. To stanowiło inspirację dla innych autorów [**LS16, CS16, CS16II**].

W szczególności, słynna zasada składań rozwiązań równań Riccatiego [**LS**] została obliczona przy zastosowaniu niezmienników symplektycznych skonstruowanych za pomocą elementu Casimira $\mathfrak{sl}(2)$ [**BCHL.H7**]. Korzystając z tego, znalazłem jak uprościć obliczenie zasad składań rozwiązań dla tzw. układów *Liego-Hamiltona* za pomocą koalgebr Poissona [**BBHL.H2, BHL.H3, BCHL.H7**]. Udowodniłem, że każda struktura k-symplektyczna jest stowarzyszona z algebrami Poissona funkcji. To było wcześniej uznane za niemożliwe albo nieużyteczne [**LV.H1**]. Natomiast, pokazałem jak te algebry Poissona upraszczają obliczenie zasad składań rozwiązań i można z tego korzystać aby zbadać układy Liego pojawiające się w teorii sterowania i układach całkowalnych [**LV.H1**]. To stanowi nowe pole zastosowań struktur k-symplektycznych, które aktualnie są głównie stosowane w równaniach różniczkowych cząstkowych teorii pól [**LSV16**].

Zagadnienia opisane w tej habilitacji można znacznie rozwijać, ponieważ jeszcze wiele innych geometrycznych struktur może zostać zastosowane do układów Liego. Na przykład, struktury *Nambu-Poissona* zostały zastosowane w badaniu układów Liego w [**LS16**]. Dodatkowo, myślę, że układy Liego można przeanalizować za pomocą struktur wielosymplektycznych, rozmaitości Diraca typu 'twisted' i algebroidów Liego (popatrz [**CGL.H6**]). W najbliższym czasie planuję rozwinąć te pomysły.

Układy Liego były głównie zastosowane przed moimi podoktorskimi badaniami w macierzowych równaniach Riccatiego, układach typu Ermakova i kilku układach Liego pojawiających się w teorii sterowania i mechanice kwantowej przez Cariñena, Marmo, Winternitza i ich współpracowników [**CL.PH12, PW, CGM00**]. Natomiast, moja rozprawa habilitacyjna opisuje o wiele bardziej ogólną rodzinę zastosowań co ilustrują analizy układów Liego pojawiających się w układach wirycznych, równaniach Kummera–Schwarza, równaniach hierarchii Riccatiego, modelach z dyfuzją, równaniach Buchdahla i wiele innych ([**BBHL.H2, BHL.H3, CLS.H9**] i Tabela 2).

Analiza poprzednich metod i ich interpretacji fizycznych została przeprowadzona we współpracy z moją doktorantką, dr. C. Sardón, i stanowi część jej pracy doktorskiej [**CS15**]. W naszych artykułach skoncentrowałem się głównie na teoretycznej części pracy i proponowałem równania różniczkowe do analizy przy użyciu moich rezultatów. C. Sardón zastosowała moje rezultaty w układach fizycznych, np. w oscylatorach Winternitza–Smorodinskyego, i wzięła udział w redagowaniu naszych prac. Jej wkład w pierwszych pracach był czasami skromny, ale ostatni artykuł jej rozprawy doktorskiej, tj. [**EHL.PH1**], został praktycznie w całości wykonany przez nią.

Niniejsza rozprawa habilitacyjna ma dwa rozdziały. Pierwszy opisuje najważniejsze wyniki. Skoro układy Liego są raczej mało znane wśród naukowców, to przytaczam dość szczegółowo moje rezultaty i podaję dużo przykładów z moich prac. W drugim rozdziale wymieniam inne osiągnięcia naukowe zrealizowane po doktoracie. W szczególności, opisuję czternaście artykułów, tzw. [**EHL.PH1**]–[**CL.PH14**], które stanowią ścisłą kontynuację mojej rozprawy doktorskiej. Dodatkowo, drugi rozdział zawiera też artykuły [**E1**] i [**E2**] dotyczące geometrycznych właściwości i zastosowań równań różniczkowych, np. wykorzystywania wiązek dżetów nieskończonego wymiaru w badaniu symetrii nieliniowych oscylatorów, oraz opisuje mój udział w konferencjach, seminariach, odbyte pobyty naukowe w ośrodkach naukowych i wykłady wygłoszone na międzynarodowych konferencjach, uczelniach i w innych jednostkach naukowych. Więcej informacji można znaleźć w wykazie dorobku.

ROZDZIAŁ 1

Układy Liego i geometryczne struktury

1. Wstęp

Obecny rozdział opisuje najbardziej podstawowe pojęcia i techniki z teorii układów Liego [**CL.PH12, LS, CGM07, CGM00**]. Dodatkowo, podaje krótki stan przedmiotu na etapie przed osiągnięciami mojego autoreferatu, aby pomóc recenzentom w zrozumieniu znaczenia uzyskanych przeze mnie wyników. Chociaż większość poniższych rezultatów pojawia się w standardowej literaturze, opracowałem wspólnie z moimi współpracownikami bardziej użyteczne podejście w ostatnich latach.

Zakładamy, że struktury są rzeczywiste, gładkie i globalnie zdefiniowane. To uproszcza prezentację wyników i podkreśla najważniejsze fakty. Można wprowadzić dokładniejszy opis dodając odpowiednie techniczne założenia i szczegóły. Założymy w dalszym ciągu, że wszystkie równania różniczkowe są zwyczajne i nieautonomiczne.

Niech $(V,[\cdot,\cdot])$ będzie algebrą Liego z nawiasem Liego $[\cdot,\cdot] : V\times V \to V$. Definiujemy $\mathrm{Lie}(\mathcal{B},V,[\cdot,\cdot])$ jako najmniejszą podalgebrę Liego algebry Liego $(V,[\cdot,\cdot])$ zawierającą podzbiór $\mathcal{B}\subset V$. Oznaczamy $(V,[\cdot,\cdot])$ przez V i $\mathrm{Lie}(\mathcal{B},V,[\cdot,\cdot])$ przez $\mathrm{Lie}(\mathcal{B},[\cdot,\cdot])$ lub $\mathrm{Lie}(\mathcal{B})$ o ile znaczenie takich skrótów wynika z kontekstu.

DEFINICJA 1.1. *Polem wektorowym zależnym od t* na N nazywamy odwzorowanie $X:\mathbb{R}\times N\to TN$ spełniające $\tau\circ X=\pi$, gdzie $\pi:(t,x)\in\mathbb{R}\times N\mapsto x\in N$ i $\tau:TN\to N$ jest kanoniczną projekcją wiązki stycznej do N.

Każde pole wektorowe zależne od t na N jest równoważne rodzinie pól wektorowych $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ postaci $X_t : x\in N\mapsto X(t,x)\in TN$ na N.

DEFINICJA 1.2. ([**CL.PH12**], Definicja 2.1) *Minimalna algebra Liego* pola wektorowego X zależnego od t to najmniejsza (w sensie inkluzji) algebra Liego pól wektorowych V^X zawierająca rodzinę pól wektorowych $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, tj. $V^X=\mathrm{Lie}(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}},[\cdot,\cdot])$.

DEFINICJA 1.3. *Krzywa całkowa* pola wektorowego X zależnego od t na N to krzywa całkowa $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times N$ pola wektorowego $\bar{X}:=\partial_t+X(t,x)$ na $\mathbb{R}\times N$, która jest cięciem wiązki $\mathrm{pr}:(t,x)\in\mathbb{R}\times N\mapsto t\in\mathbb{R}$, tj. $\mathrm{pr}\circ\gamma=\mathrm{Id}_N$, gdzie Id_N to odwzorowanie tożsamościowe rozmaitości N.

Innymi słowy, krzywa całkowa pola wektorowego X zależnego od t na N to cięcie $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times N$ wiązki $\mathrm{pr}:(t,x)\in\mathbb{R}\times N\mapsto t\in\mathbb{R}$ spełniające

$$\frac{\mathrm{d}\pi\circ\gamma}{\mathrm{d}t}=X(t,\pi\circ\gamma). \tag{1.1}$$

Układ (1.1) nazywamy *układem stowarzyszonym* z X. Odwrotnie, układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu na N w postaci normalnej jednoznacznie określa pole wektorowe zależne od t na N, których krzywe całkowe, γ, są takie, że $\pi\circ\gamma$ to rozwiązania szczególne (1.1). To umożliwia oznaczenie przez X pola wektorowego zależnego od t i układu stowarzyszonego z nim [**CL.PH12**].

DEFINICJA 1.4. ([**CGL.H8**], Definicja 4) Niech X będzie polem wektorowym zależnym od t na N. Jego *dystrybucja stowarzyszona*, $\mathcal{D}^X$, to uogólniona dystrybucja na N postaci

$$\mathcal{D}^X_x:=\{Y_x \mid Y\in V^X\}\subset T_xN,\qquad \forall x\in N,$$

i jego *kodystrybucja stowarzyszona*, $\mathcal{V}^X$, to uogólniona kodystrybucja na N dana wzorem

$$\mathcal{V}_x^X := \{\vartheta \in T_x^*N \mid \vartheta(Z_x) = 0, \forall\ Z_x \in \mathcal{D}_x^X\} = (\mathcal{D}_x^X)^\circ \subset T_x^*N, \qquad \forall x \in N,$$

gdzie $(\mathcal{D}_x^X)^\circ$ to *annihilator* podprzestrzeni $\mathcal{D}_x^X$ dla każdego $x \in N$.

Uogólniona dystrybucja $\mathcal{D}^X$ jest inwolutywna i regularna na każdej spójnej części pewnego otwartego gęstego podzbioru $U^X \subset N$. Wówczas, $\mathcal{V}^X$ to kodystrybucja regularna na każdej spójnej części U^X [**CGL.H8**, p. 5]. Najważniejszy przypadek w tej rozprawie dotyczy uogólnionej dystrybucji $\mathcal{D}^X$ zgenerowanej przez skończenie wymiarową V^X. Wtedy, $\mathcal{D}^X$ jest całkowalna na N (cf. [**JP**, p. 63]). Wymienione powyżej pojęcia są przydatne dla obliczenia stałych ruchu i zasad składań rozwiązań układów Liego.

DEFINICJA 1.5. *Układem Liego* nazywamy X, której minimalna algebra Liego, V^X, jest skończenie wymiarowa. Skończenie wymiarową algebrę Liego V zawierającą V^X nazywamy *algebrą Liego Vessiota-Guldberga* X [**BBHL.H2, CL.PH12, PW**].

Algebra Liego V^X układu Liego X zawiera istotną informację dotyczącą właściwości X, np. kiedy V^X jest rozwiązalna, to możemy całkować X za pośrednictwem kwadratur [**CRG**].

PRZYKŁAD 1.6. Każdy układ Liego na $\mathbb{R}$ jest lokalnie dyfeomorficzny do równania Riccatiego [**Eg07, PW, LS**], tj. równania różniczkowego danego wzorem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_1(t) + a_2(t)x + a_3(t)x^2, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

gdzie $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ są dowolnymi funkcjami zależnymi od t. Istnieje mnóstwo aplikacji równań Riccatiego w fizyce [**NR02, Ra71**].

Równanie Riccatiego (1.2) jest układem stowarzyszonym z polem wektorowym zależnym od t postaci $X := \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha(t)X_\alpha$, gdzie

$$X_1 := \partial_x, \qquad X_2 := x\partial_x, \qquad X_3 := x^2\partial_x. \tag{1.3}$$

Skoro

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2, \qquad [X_2, X_3] = X_3,$$

takie pola wektorowe generują algebrę Liego $V \simeq \mathfrak{sl}(2)$. Skoro X przyjmuje wartości w V, tj. $X_t \in V$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, to $V^X \subset V$ i V^X jest skończenie wymiarowa. Wówczas, X jest układem Liego i V jest algebrą Liego Vessiota-Guldberga układu X. Postać minimalnej algebry Liego V^X zależy od $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$, np. $V^X = 0$ kiedy $a_\alpha(t) = 0$ dla $\alpha = 1, 2, 3$.

PRZYKŁAD 1.7. Dajmy teraz przykład układu Liego analizowanego w [**BBHL.H2**, Przykład 2.1]. Badamy układ równań różniczkowych

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_1(t) + a_2(t)x + a_3(t)(x^2 - y^2), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a_2(t)y + a_3(t)2xy, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.4}$$

gdzie $a_1(t), a_2(t), a_3(t)$ są dowolnymi funkcjami zależnymi od t. Układ (1.4) jest szczególnym przypadkiem równania Riccatiego na płaszczyźnie opisywanego w [**Eg07**]. Pisząc $z := x + \mathrm{i}y$, układ (1.4) przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = a_1(t) + a_2(t)z + a_3(t)z^2, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{1.5}$$

To szczególny przypadek zespolonego równania Riccatiego, który gra ważną rolę w różnych problemach fizycznych, np. w badaniu nieautonomicznych równań Schrödingera [**Sc12**] i innych [**BHL.H3**]. Szczególne rozwiązania okresowych równań tego typu zostały zbadane w [**Ca97, Or12**] i jeszcze inne rodzaje zespolonych równań Riccatiego pojawiły się w [**FMR10**]. Równania różniczkowe (1.5) pojawiają się też w zastosowaniu metody Weina–Normana w kwantowych oscylatorach harmonicznych [**CK13**].

Układ (1.4) określa pole wektorowe zależne od t dane wzorem $X \coloneqq \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha(t) X_\alpha$, gdzie

$$X_1 \coloneqq \partial_x, \qquad X_2 \coloneqq x\partial_x + y\partial_y, \qquad X_3 \coloneqq (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y \tag{1.6}$$

generują algebrę Liego Vessiota-Guldberga $V \simeq \mathfrak{sl}(2)$. Zatem, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset V^X \subset V$ i V^X jest skończenie wymiarowa i X jest układem Liego. Algebra Liego V to algebra Liego Vessiota-Guldberga dla X i układy postaci (1.4) są układami Liego.

Rzeczywiste i zespolone równania Riccatiego są szczególnymi równaniami Riccatiego nad unormowanymi algebrami z dzieleniem. Udowodniłem, że takie równania są równaniami konforemnymi Riccatiego w [**LT.PH2**]. Przykład 1.7 jest, dodatkowo, szczególnym przykładem równania Riccatiego Cayleya–Kleina zdefiniowanym i analizowanym w [**BHL.H3**]. Wykazałem, że wszystkie takie równania różniczkowe są układmi Liego. Szczegóły zostały przeanalizowane z moimi współpracownikami i studentami w [**BBHL.H2, BHL.H3, LT.PH2**].

Równanie Riccatiego pozornie wygląda prosto. Chociaż jego stowarzysone pole wektorowe ma prostą postać wielomianu drugiego rzędu, nie ma metody dla jego całkowania dla dowolnych funkcji zależnych od t. [**Ince**]. Jednakże, ogólne rozwiązanie, $x(t)$, równania Riccatiego (1.2) można sprowadzić do postaci

$$x(t) \coloneqq \frac{x_{(1)}(t)(x_{(3)}(t) - x_{(2)}(t)) + kx_{(2)}(t)(x_{(3)}(t) - x_{(1)}(t))}{x_{(3)}(t) - x_{(2)}(t) + k(x_{(3)}(t) - x_{(1)}(t))}, \qquad k \in \mathbb{R},$$

przez różne rozwiązania szczególne $x_{(1)}(t), x_{(2)}(t), x_{(3)}(t)$ [**Ince**]. To pozwala nam znaleźć ogólne rozwiązanie równania Riccatiego za pomocą trzech szczególnych rozwiązań. Ponadto, prowadzi to do uproszczenia aplikacji metod numerycznych w tych równaniach [**PW**]. Dodatkowo daje to nowe techniki analizy cech rozwiązań [**LT.PH2**]. Okazuje się, że (1.4) posiada podobne właściwości i w ogólności, Lie udowodnił, że każdy układ Liego ma podobną właściwość [**LS**], co uzasadnia następującą definicję [**CGM07, LCO09**].

DEFINICJA 1.8. *Zasadą składań rozwiązań* zależną od m szczególnych rozwiązań układu X na N nazywamy funkcję $\Phi : N^m \times N \to N$, $x = \Phi(x_{(1)}, \dots, x_{(m)}; \lambda)$, taką, że ogólne rozwiązanie, $x(t)$, układu X można sprowadzić do postaci $x(t) = \Phi(x_{(1)}(t), \dots, x_{(m)}(t); \lambda)$, gdzie $x_{(1)}(t), \dots, x_{(m)}(t)$ to generyczna rodzina szczególnych rozwiązań X i λ jest punktem N opisującym warunki początkowe.

PRZYKŁAD 1.9. Równania Riccatiego posiadają zasadę składań rozwiązań $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$x \coloneqq \frac{x_{(1)}(x_{(3)} - x_{(2)}) + kx_{(2)}(x_{(3)} - x_{(1)})}{x_{(3)} - x_{(2)} + k(x_{(3)} - x_{(1)})}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie Liego–Scheffersa określa warunki konieczne i wystarczające, aby zagwarantować, że X posiada zasadę składań rozwiązań [**LS**, Twierdzenie 44]. Nowoczesna postać tego wyniku [**CGM07**, Twierdzenie 1] jest opisywana następująco.

TWIERDZENIE 1.10. *(Twierdzenie Liego–Scheffersa* [**LS, CGM07**]*) Układ X posiada zasadę składań rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) X_\alpha$ dla pewnej rodziny $b_1(t), \dots, b_r(t)$ funkcji zależnych od t i dla zbioru $X_1, \dots, X_r$ pól wektorowych generujących r-wymiarową algebrę Liego. Innymi słowy, układ X posiada zasadę składań rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy V^X jest skończenie wymiarowa.*

Chociaż Twierdzenie Liego–Scheffersa charakteryzuje układy Liego, może być trudne określenie czy układ X jest układem Liego, tj. czy V^X jest skończenie wymiarowa czy nie. Aby to udowodnić, przyda się klasyfikacja możliwych skończenie wymiarowych algebr Liego V^X na ustalonej rozmaitości. Lie udowodnił, że każda algebra Liego Vessiota-Guldberga na $\mathbb{R}$ jest lokalnie dyfeomorficzna wokół *punktu generycznego* (tj. punktu wokół którego pola wektorowe generują dystrybucję regularną) do $\langle \partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x \rangle \simeq \mathfrak{sl}(2)$ [**LS, Lie1880**]. Klasyfikacja skończenie wymiarowych algebr Liego pól wektorowych na $\mathbb{R}^2$ została podana przez Lie [**Lie1880III**], ale jej skonstruowanie doprowadziło do wielu nieporozumień. González, Kamran i Olver wyjaśnili te wszystkie niejasności w [**GKO92**]. Wykazali, że każda algebra Liego skończonego wymiaru pól wektorowych na $\mathbb{R}^2$ jest lokalnie dyfeomorficzna wokół punktu generycznego do jednej z klas w Tabeli 1. Dlatego nazywamy klasyfikację w Tabeli 1 *klasyfikacją GKO*. Dodatkowo, Winternitz i jego współpracownicy sklasyfikowali prawie wszystkie algebry Liego pól wektorowych nad $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C}^n$ i zastosowali te wyniki, aby zbadać wielką rodzinę zespolonych układów Liego w postaciach kanonicznych [**SW84, SW84II**]. Fakt, że klasyfikacja Winternitza jest oparta na postaciach kanonicznych stanowi jedną wadę tego rezultatu, ponieważ nie można łatwo sprowadzić pewnych ważnych układów Liego do jednej z tych postaci i przydatniejszym będzie skorzystanie z innych metod.

Opis geometryczny zasad składań rozwiązań oraz jedna z metod ich znalezienia jest oparta na pojęciu *diagonalnej prolongacji* [**CGM07**].

DEFINICJA 1.11. Niech $X(t,x) := \sum_{i=1}^n X^i(t,x)\partial_{x^i}$ będzie polem wektorowym zależnym od t na N. *Diagonalną prolongacją* X do $N^{(m+1)}$ nazywamy pole wektorowe zależne od t na $N^{(m+1)}$ dane wzorem $\widetilde{X}^{[m+1]} := \sum_{a=0}^m \sum_{i=1}^n X^i(t, x_{(a)})\partial_{x^i_{(a)}}$.

Skoro każde pole wektorowe można zrozumieć jako pole wektorowe zależne od t, poprzednią definicję można zastosować do pól wektorowych. Diagonalna prolongacja pola wektorowego to pole wektorowe [**CL.PH12**].

Cariñena, Grabowski i Marmo wymyślili nową metodę obliczenia zasad składań rozwiązań [**CGM07, CL.PH7**]. Warto podkreślić, że ta metoda to teoretyczne ulepszenie metody niezmienników Winternitza [**PW**]. Bardziej dokładnie, ta metoda pośrednio wynika z dowodu Twierdzenia Liego–Scheffersa [**LS**]. Metoda ta wygląda następująco:

(1) Wybierzmy bazę $X_1, \ldots, X_r$ algebry Liego Vessiota-Guldberga V stowarzyszoną z badanym układem Liego.
(2) Znajdźmy najmniejszą liczbę naturalną m taką, że diagonalne prolongacje pól wektorowych $X_1, \ldots, X_r$ do N^m są liniowo niezależne w generycznym punkcie.
(3) Wybierzmy współrzędne $x^1, \ldots, x^n$ w N. Definiując podobny układ współrzędnych w każdej kopii N w N^{m+1}, otrzymamy układ współrzędnych $\{x^i_{(a)} \mid i = 1, \ldots, n,\ a = 0, \ldots, m\}$ w N^{m+1}. Później obliczmy n wspólne całki pierwsze $F_1, \ldots, F_n$ dla wszystkich diagonalnych prolongacji $\widetilde{X}_1^{[m+1]}, \ldots, \widetilde{X}_r^{[m+1]}$ takie, że $\partial(F_1, \ldots, F_n)/\partial(x^1_{(0)}, \ldots, x^n_{(0)}) \neq 0$.
(4) Załóżmy, że poniższe całki pierwsze przyjmują określone wartości, tj. $F_i = k_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Za pomocą tych równań, napiszmy $x^1_{(0)} \ldots, x^n_{(0)}$ jako funkcje $x^1_{(a)}, \ldots, x^n_{(a)}$, dla $a = 1, \ldots, m$, i $k_1, \ldots, k_n$.
(5) Otrzymane wyrażenia określają zasadę składań rozwiązań za pośrednictwem generycznej rodziny m rozwiązań szczególnych i stałych $k_1, \ldots, k_n$.

Wyliczenie $F_1, \ldots, F_n$ w ramach poprzedniej metody wymaga rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych. Może się więc zdarzyć, że stosowanie tej procedury jest trudne lub w ogóle nieskuteczne. Inne techniki obliczenia zasad składań rozwiązań, np. opisywane przez Winternitza w [**PW, AHW81**], też wymagają całkowania pól wektorowych $X_1, \ldots, X_r$, co jest często skomplikowane i długie [**PW, CL.PH7**]. Formy kanoniczne układów Liego opisywane przez Winternitza [**SW84, SW84II**] są przydatne kiedy da się sprowadzić nasz układ Liego do postaci kanonicznej Winternitza, np. tak się zdarza dla równań oktonionowych Riccatiego [**LT.PH2**] i dla równań hierarchii Riccatiego [**GL16**]. Dodatkowo, ma to zastosowania w wielu układach fizycznych i w mechanice kwantowej kwaternionowej [**LT.PH2, GL16**].

Przed moją pracą habilitacyjną, zastosowanie układów Liego było raczej ograniczone do równań macierzowych Riccatiego, które były bardzo dokładnie zbadane przez Winternitza i jego

TABELA 1. Klasyfikacja GKO (Gonzáleza, Kamrana, Olvera) [**GKO92**] klas skończenie wymiarowych algebr Liego pól wektorowych na $\mathbb{R}^2$ i ich najważniejsze cechy. Mój wkład w niniejszej tabeli polega na obliczeniu dziedziny i układu modułowego generującego (pierwsze jedno czy dwa pola wektorowe napisane między nawiasami tworzą modułowy układ generujący) dla każdej algebry Liego. Te struktury zostały znalezione w pracy [**BBHL.H2**, Definicje 3.1 i 4.3], aby sklasyfikować skończenie wymiarowe algebry Liego pól wektorowych Hamiltonowskich na $\mathbb{R}^2$. Przez $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_2$ oznacza, że $\mathfrak{g}$ to suma prosta (jako liniowe podprzestrzenie) algebr Liego $\mathfrak{g}_1$ i $\mathfrak{g}_2$, gdzie $\mathfrak{g}_2$ jest ideałem algebry Liego $\mathfrak{g}$.

#	Prymitywna	Baza pól wektorowych X_i	Dziedzina
P_1	$A_\alpha \simeq \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$	$\{\partial_x, \partial_y\}, \alpha(x\partial_x + y\partial_y) + y\partial_x - x\partial_y, \quad \alpha \geq 0$	$\mathbb{R}^2$
P_2	$\mathfrak{sl}(2)$	$\{\partial_x, x\partial_x + y\partial_y\}, (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$	$\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$
P_3	$\mathfrak{so}(3)$	$\{y\partial_x - x\partial_y, (1 + x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y\}, 2xy\partial_x + (1 + y^2 - x^2)\partial_y$	$\mathbb{R}^2$
P_4	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y$	$\mathbb{R}^2$
P_5	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x - y\partial_y, y\partial_x, x\partial_y$	$\mathbb{R}^2$
P_6	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_x, x\partial_y, y\partial_y$	$\mathbb{R}^2$
P_7	$\mathfrak{so}(3,1)$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y, (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y$	$\mathbb{R}^2$
P_8	$\mathfrak{sl}(3)$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y, xy\partial_x + y^2\partial_y$	$\mathbb{R}^2$

#	Nieprymitywna	Baza pól wektorowych X_i	Dziedzina
I_1	$\mathbb{R}$	$\{\partial_x\}$	$\mathbb{R}^2$
I_2	$\mathfrak{h}_2$	$\{\partial_x\}, x\partial_x$	$\mathbb{R}^2$
I_3	$\mathfrak{sl}(2)$ (type I)	$\{\partial_x\}, x\partial_x, x^2\partial_x$	$\mathbb{R}^2$
I_4	$\mathfrak{sl}(2)$ (type II)	$\{\partial_x + \partial_y, x\partial_x + y\partial_y\}, x^2\partial_x + y^2\partial_y$	$\mathbb{R}^2_{x\neq y}$
I_5	$\mathfrak{sl}(2)$ (type III)	$\{\partial_x, 2x\partial_x + y\partial_y\}, x^2\partial_x + xy\partial_y$	$\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$
I_6	$\mathfrak{gl}(2)$ (type I)	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, x^2\partial_x$	$\mathbb{R}^2$
I_7	$\mathfrak{gl}(2)$ (type II)	$\{\partial_x, y\partial_y\}, x\partial_x, x^2\partial_x + xy\partial_y$	$\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$
I_8	$B_\alpha \simeq \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + \alpha y\partial_y, \quad 0 < \lvert\alpha\rvert \leq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_9	$\mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{h}_2$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_y$	$\mathbb{R}^2$
I_{10}	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{h}_2$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x$	$\mathbb{R}^2$
I_{11}	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x, y^2\partial_y$	$\mathbb{R}^2$
I_{12}	$\mathbb{R}^{r+1}$	$\{\partial_y\}, \xi_1(x)\partial_y, \dots, \xi_r(x)\partial_y, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{13}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\{\partial_y\}, y\partial_y, \xi_1(x)\partial_y, \dots, \xi_r(x)\partial_y, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{14}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$	$\{\partial_x, \eta_1(x)\partial_y\}, \eta_2(x)\partial_y, \dots, \eta_r(x)\partial_y, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{15}	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^r$	$\{\partial_x, y\partial_y\}, \eta_1(x)\partial_y, \dots, \eta_r(x)\partial_y, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{16}	$C^r_\alpha \simeq \mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + \alpha y\partial y, x\partial_y, \dots, x^r\partial_y, \quad r \geq 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^2$
I_{17}	$\mathbb{R} \ltimes (\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r)$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + (ry + x^r)\partial_y, x\partial_y, \dots, x^{r-1}\partial_y, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{18}	$(\mathfrak{h}_2 \oplus \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_y, \dots, x^r\partial_y, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{19}	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_y, 2x\partial_x + ry\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \dots, x^r\partial_y, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$
I_{20}	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \dots, x^r\partial_y, \quad r \geq 1$	$\mathbb{R}^2$

współpracowników [**HWA83, LW96**], różnych rodzajów równań Milnego–Pinneya, i niektórych układów sterowania [**CR03, CCR03**]. Z matematycznego punktu widzenia, geometryczne struktury, np. symplektyczne i Poissonowskie struktury, były rzadko wykorzystywane w analizie układów Liego. Parę zastosowań zostało znalezionych w układach całkowalnych [**CGM00**] i w analizie układów klasycznych i kwantowych [**CR03**].

2. Układy Liego-Hamiltona

2.1. Istotność układów Liego-Hamiltona. Niespodziewanie zauważyłem, że istnieje więcej zastosowań układów Liego posiadających algebry Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem *biwektora Poissona* [**IV**] niż aplikacje układów Liego nieposiadających żadnej stowarzyszonej struktury geometrycznej [**CGL.H8**]. Taki fakt został zilustrowany w Tabeli 2, gdzie podsumowuję wszystkie układy Liego tego typu znalezione w pracach [**LV.H1, BBHL.H2, BHL.H3, LTV.H4, HL.H5, CGL.H6, BCHL.H7, CGL.H8, CLS.H9**]. To doprowadziło mnie do następującej definicji.

DEFINICJA 2.1. [**CGL.H8**, Definicja 10] *Układem Liego-Hamiltona* X na N nazywamy układ Liego, którego algebra Liego Vessiota-Guldberga V^X składa się z pól wektorowych Hamiltonowskich względem pewnego biwektora Poissona na N.

PRZYKŁAD 2.2. ([**BCHL.H7**, Sekcja 7.4] and [**CGL.H8**, Sekcja 4]) Przeanalizujmy teraz równania Hamiltona dla n-wymiarowego oscylatora Winternitza–Smorodinskyego [**WSUF67**] na $\mathrm{T}^*\mathbb{R}_0^n$, gdzie $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, tj.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = p_i, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\omega^2(t)x_i + \dfrac{k}{x_i^3}, \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n, \tag{2.1}$$

gdzie $\omega(t)$ jest dowolną funkcją zależną od t i $k \in \mathbb{R}$. Takie oscylatory zwróciły dużo uwagi w klasycznej i kwantowej mechanice z powodu ich specjalnych właściwości [**GPS06, HBS05**]. Warto zauważyć, że (2.1) jest izotropicznym oscylatorem harmonicznym kiedy $k = 0$.

Układ (2.1) opisuje krzywe całkowe pola wektorowego zależnego od t na $\mathrm{T}^*\mathbb{R}_0^n$ danego wzorem

$$X = \sum_{i=1}^n \left[p_i \partial_{x_i} + \left(-\omega^2(t)x_i + \frac{k}{x_i^3} \right) \partial_{p_i} \right]. \tag{2.2}$$

Przeto, $X_t = X_3 + \omega^2(t)X_1$, gdzie

$$X_1 := -\sum_{i=1}^n x_i\partial_{p_i}, \qquad X_2 := \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(p_i\partial_{p_i} - x_i\partial_{x_i}\right), \qquad X_3 := \sum_{i=1}^n \left(p_i\partial_{x_i} + \frac{k}{x_i^3}\partial_{p_i} \right). \tag{2.3}$$

Skoro

$$[X_1, X_3] = 2X_2, \qquad [X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_2, X_3] = X_3,$$

układ (2.1) jest układem Liego posiadającym algebrę Liego Vessiota-Guldberga izomorficzną do $\mathfrak{sl}(2)$. Taka algebra Liego składa się z pól wektorowych Hamiltonowskich ze względu na naturalny biwektor Poissona $\Lambda := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} \wedge \partial_{p_i}$. Właśnie, niech $\widehat{\Lambda}$ będzie morfizmem między wiązkami wektorowymi postaci $\widehat{\Lambda} : \mathrm{T}^*\mathbb{R}_0^n \to \mathrm{T}\mathbb{R}_0^n$, gdzie $[\widehat{\Lambda}(\theta)](\theta') := \Lambda(\theta, \theta')$ dla dowolnych $\theta, \theta' \in \mathrm{T}^*\mathbb{R}_0^n$. Stąd $X_\alpha = -\widehat{\Lambda}(dh_\alpha)$, gdzie $\alpha = 1, 2, 3$ i

$$h_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2, \qquad h_2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i p_i, \qquad h_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(p_i^2 + \frac{k}{x_i^2} \right). \tag{2.4}$$

Zatem, X jest układem Liego-Hamiltona.

Każde pole wektorowe X_t, gdzie $t \in \mathbb{R}$, posiada funkcję Hamiltonowską $h_t = h_3 + \omega^2(t)h_1$ i

$$\{h_1, h_2\}_\Lambda = -h_1, \qquad \{h_1, h_3\}_\Lambda = 2h_2, \qquad \{h_2, h_3\}_\Lambda = h_3,$$

gdzie $\{\cdot,\cdot\}_\Lambda$ jest nawiasem Poissona stowarzyszonym z Λ [**IV**]. Wówczas, X można stowarzyszyć z funkcją Hamiltonowską zależną od t postaci $h := h_3 + \omega^2(t)h_1$ przyjmując wartości w algebrze Liego skończonego wymiaru funkcji (nad $\mathbb{R}$). Znalazłem podobną strukturę podczas badania równań Kummera–Schwarza drugiego rzędu [**BCHL.H7, CGL.H8**] i pewnych układów całkowalnych z wyrazami liniowymi trygonometrycznymi [**BCHL.H7, ADR12**]. Badania właściwości wymienionych powyżej układów doprowadziło mnie do następującej definicji.

DEFINICJA 2.3. ([**CGL.H8**, Definicja 11]) Struktura *Liego–Hamiltonowska* to trójka (N, Λ, h), gdzie (N, Λ) to rozmaitość Poissonowska, h to funkcja zależna od t i $h_t : N \to \mathbb{R}$ są takie, że $\mathfrak{W} := \mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\cdot,\cdot\}_\Lambda)$ jest skończenie wymiarowa. Nazywamy $\mathfrak{W}$ *algebrą Liego-Hamiltona* dla (N, Λ, h). Pole wektorowe X zależne od t *posiada strukturę Liego–Hamiltonowską* (N, Λ, h) jeżeli $X_t = -\widehat{\Lambda}(dh_t)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Krótko mówiąc, strukturę Liego–Hamiltonowską można zrozumieć jako krzywą w algebrze Liego skończonego wymiaru funkcji względem struktury Poissona i układ X posiada strukturę Hamiltonowską jeżeli można określić go przy pomocy struktury Liego–Hamiltonowskiej. Fakt ten ilustruje następujący przykład.

PRZYKŁAD 2.4. ([**CGL.H8**, p. 10–12]) Układ X postaci (2.2) posiada strukturę Liego–Hamiltonowską $(\mathrm{T}^*\mathbb{R}^n_0, \Lambda, h = h_3 + \omega^2(t)h_1)$. Właśnie, $X_t = -\widehat{\Lambda}(dh_t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Stowarzyszona algebra Liego-Hamiltona ma postać $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$. Jeżeli $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}} = \langle X_1, X_3\rangle$, to $\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}} = \{h_1, h_3\}$ i $\mathfrak{W} = \{h_1, h_2, h_3\}$.

Najważniejsze twierdzenie teorii układów Liego-Hamiltona jest wymienione następnie. Krótko mówiąc, takie twierdzenie ustala, że każdy układ Liego-Hamiltona można określić za pomocą krzywej w skończenie wymiarowej algebrze Liego funkcji względem struktury Poissona.

TWIERDZENIE 2.5. *(*[**CGL.H8**, Twierdzenie 16]*) Układ X posiada strukturę Liego–Hamiltonowską wtedy i tylko wtedy, gdy jest układem Liego-Hamiltona.*

2.2. Istnienie i klasyfikacja układów Liego-Hamiltona na niskowymiarowych rozmaitościach. Po zdefiniowaniu układów Liego-Hamiltona, zainteresowałem się warunkami charakteryzującymi kiedy układ Liego można zrozumieć jako układ Liego-Hamiltona względem jakiejś struktury Poissonowskiej. Jedyny układ Hamiltonowski na linii liczb rzeczywistych to $X = 0$ [**CGL.H6**]. Generalnie nie ma prostego do sprawdzenia kryterium opisującego czy jakiś układ Liego na ustalonej rozmaitości jest układem Liego-Hamiltona. Ta część pracy zawiera podsumowanie wyników uzyskanych przeze mnie w tym zakresie.

Aby ustalić kiedy układ Liego można zrozumieć jako układ Liego-Hamiltona przydatne jest następujące kryterium.

STWIERDZENIE 2.6. [**CGL.H6**, Stwierdzenie 5.1] *Jeżeli X jest układem Liego na nieparzysto-wymiarowej rozmaitości N i $\mathcal{D}^X_{x_0} = T_{x_0}N$ dla jednego punktu x_0 w N, to X nie jest układem Liego-Hamiltona na N.*

Na mocy poprzedniego stwierdzenia można wnioskować, że niektórych istotnych układów Liego, np. równania Kummera–Schwarza trzeciego rzędu [**CGL.H6**], nie można zbadać za pomocą układów Liego-Hamiltona. To doprowadziło mnie do badania układów Liego z algebrą Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem ogólniejszych struktur geometrycznych, np. struktury k-symplektycznej albo Diraca [**LV.H1, CGL.H6**].

Na podstawie klasyfikacji GKO sklasyfikowałem w [**BBHL.H2**] wszystkie algebry Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury Poissona na płaszczyźnie wokół punktu generycznego algebry Liego. Właśnie, *dziedzina algebry Liego pól wektorowych* to zbiór punktów generycznych algebry Liego. Moja klasyfikacja razem z dziedzinami algebr Liego pól wektorowych na płaszczyźnie i innymi pokrewnymi pojęciami została przedstawiona w Tabelach 1, 3 oraz 4 [**BBHL.H2, BHL.H3**]. To daje lokalną klasyfikację układów Liego-Hamiltona na płaszczyźnie. Następnie, opisuję moje najważniejsze wyniki dotyczące tego

TABELA 2. Istotne układy Liego-Hamiltona na płaszczyźnie według ich klas w Tabeli 1. Wszystkie następujące układy mają współczynniki, które są funkcjami rzeczywistymi zależnymi od czasu poza przypadkiem P_1. Układy ze znakiem '$*$' ($I_{14A}^{r=2}$ i $I_{14B}^{r=2}$) były analizowane w [**BBHL.H2**], natomiast układ ze znakiem '†' w P_3 został zbadany w [**BCHL.H7, ADR12**]. Układy Liego niniejszej tabeli zostały znalezione w pracach [**LV.H1**]–[**CLS.H9**] (więcej szczegółów w [**BHL.H3**]).

#	Układy Liego-Hamiltona
P_1	Równania Bernoulliego nad $\mathbb{C}$ postaci $\dot{z} = \mathrm{i}a(t)z + b(t)z^n$ dla rzeczywistego $a(t)$ i zespolonego $b(t)$
P_2	Równanie Riccatiego nad $\mathbb{C}$
	Równania Milnego–Pinneya i Kummera–Schwarza drugiego rzędu z $c > 0$
P_3	Rzutowalne równanie Schrödingera na $\mathbb{CP}^1$
	Układ na płaszczyźnie z trygonometrycznymi nieliniowościami †
P_5	Dyssypatywny oscylator harmoniczny
	Równania Riccatiego drugiego rzędu w postaci Hamiltonowskiej
I_4	Równanie Riccatiego nad liczbami podwójnymi
	Połączone równania Riccatiego
	Równania Milnego–Pinneya i Kummera–Schwarza drugiego rzędu z $c < 0$
	Równania Riccatiego dyfuzji na płaszczyźnie z $c_0 = 1$
I_5	Równania Riccatiego nad liczbami dualnymi
	Równania Milnego–Pinneya i Kummera–Schwarza drugiego rzędu z $c = 0$
	Oscylator harmoniczny
	Równania Riccatiego dyfuzji na płaszczyźnie z $c_0 = 0$
$I_{14A}^{r=1}$	Równanie zespolone Bernoulli'ego $\dot{z} = a_1(t)z + a_2(t)z^n$
	Uogólnione równania Buchdahla
	Układy Lotka–Volterra
$I_{14A}^{r=2}$	Kwadratowe wielomianowe układy postaci $\dot{x} = bx + c(t)y + f(t)y^2$, $\dot{y} = y$ gdzie $b \notin \{1,2\}^*$
$I_{14B}^{r=2}$	Kwadratowe wielomianowe układy postaci $\dot{x} = bx + c(t)y + f(t)y^2$, $\dot{y} = y$ gdzie $b \in \{1,2\}^*$
	Prymitywny model zakażenia wirusowego*

tematu. Aby uprościć notację w dalszym ciągu, U będzie oznaczało ściągalny otwarty podzbiór $\mathbb{R}^2$.

Forma objętości Ω na rozmaitości n-wymiarowej N to nie znikająca n-forma różniczkowa na N. *Dywergencja* pola wektorowego X na N względem Ω to jedyna funkcja $\mathrm{div}X : N \to \mathbb{R}$ spełniająca $\mathcal{L}_X\Omega = (\mathrm{div}\, X)\,\Omega$, gdzie $\mathcal{L}_X$ określa pochodną Liego w kierunku X. *Czynnik całkujący* X na $U \subset N$ to funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ taka, że $\mathcal{L}_{fX}\Omega = 0$ na U.

Kluczowym pojęciem dla osiągnięcia klasyfikacji algebr Liego Vessiota-Guldberga jest układ modułowy generujący.

DEFINICJA 2.7. ([**BBHL.H2**, Definicja 4.3]) Niech V będzie przestrzenią wektorową pól wektorowych na U. Mówi się, że V posiada *modułowy układ generujący* $(U_1, X_1, \ldots, X_p)$ jeżeli U_1 to otwarty podzbiór U taki, że $X \in V|_{U_1}$ można przedstawić w postaci $X|_{U_1} = \sum_{i=1}^p g_i X_i|_{U_1}$ dla pewnych funkcji $g_1, \ldots, g_p \in C^\infty(U_1)$ i pól wektorowych $X_1, \ldots, X_p \in V$.

PRZYKŁAD 2.8. ([**BBHL.H2**, Przykład 4.1]) Zbadamy algebrę Liego $P_3 \simeq \mathfrak{so}(3)$ na $\mathbb{R}^2$ w Tabeli 1. Pola wektorowe

$$X_1 = y\partial_x - x\partial_y, \qquad X_2 = (1 + x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$$

z algebry Liego P_3 spełniają, że $X_3 = g_1X_1 + g_2X_2$ na $U_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ dla funkcji $g_1, g_2 \in C^\infty(U_1)$ postaci $g_1 := (x^2 + y^2 - 1)/x$ i $g_2 := y/x$. Podzbiór $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty. Każdy element V jest liniową kombinacją elementów X_1, X_2 i $X_3 = g_1X_1 + g_2X_2$. Wtedy każdy $X \in V|_{U_1}$ może zostać przedstawiony na U_1 jako liniowa kombinacja ze współczynnikami zależnymi od t pól wektorowych X_1 i X_2. Więc (U_1, X_1, X_2) stanowi modułowy układ generujący dla P_3.

Obliczyłem modułowy układ generujący dla każdej klasy klasyfikacji GKO ([**BBHL.H2**, Tabela 1] i Tabela 1). To pojęcie ma kluczowe znaczenie dla następującego twierdzenia i wniosku.

TWIERDZENIE 2.9. *(*[**BBHL.H2**, Twierdzenie 4.4]*) Niech V będzie algebrą Liego pól wektorowych na $U \subset \mathbb{R}^2$ posiadającą modułowy układ generujący $(U_1, X_1, \ldots, X_p)$. Wówczas:*
1) Przestrzeń V składa się z pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury symplektycznej na U wtedy i tylko wtedy, gdy:

i) Dla funkcji $g_1, \ldots, g_p$ na $U_1 \subset U$ mamy

$$X|_{U_1} = \sum_{i=1}^{p} g_i X_i|_{U_1} \in V|_{U_1} \Longrightarrow \mathrm{div} X|_{U_1} = \sum_{i=1}^{p} g_i \mathrm{div} X_i|_{U_1}. \tag{2.5}$$

ii) Pola wektorowe $X_1, \ldots, X_p$ posiadają wspólny czynnik całkujący nieznikający na U.

2) Jeżeli $\mathcal{D}^V$ ma rząd dwa na U, to forma symplektyczna jest jednoznacznie określona poza nie-zerową stałą proporcjonalności.

WNIOSEK 2.10. *(*[**BBHL.H2**, Wniosek 4.5]*) Jeżeli algebra Liego Vessiota-Guldberga V na $U \subset \mathbb{R}^2$ składa się z pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury symplektycznej i posiada układ modułowy generujący pól wektorowych z zerową dywergencją, to każdy element V ma zerową dywergencję.*

Zastosowania Twierdzenia 2.9, Wniosku 2.10 i klasyfikacji GKO pozwalały mi sklasyfikować algebry Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich na $\mathbb{R}^2$. Moją klasyfikację można znaleźć w Tabeli 3.

Tabela 3 pozwala nam określić czy X jest układem Liego-Hamiltona i opisuje wszystkie ważne struktury stowarzyszone z tym faktem pod warunkiem, że możemy ustalić do której klasy klasyfikacji GKO należy V^X. Wtedy zamiana zmiennych pozwala nam sprowadzić V^X do postaci jednej z algebr Liego z Tabeli 3, co umożliwia znalezienie struktury symplektycznej względem której X jest układem Liego-Hamiltona. Jeżeli V^X jest izomorficzna tylko do jednej algebry Liego pojawiającej się w klasyfikacji GKO, to łatwo ustalić czy X jest układem Liego-Hamiltona czy nie.

Istnieje wiele izomorficznych klas algebr Liego Vessiota-Guldberga w klasyfikacji GKO, które nie są dyfeomorficzne, np. I_5, P_2 i I_4. Następujące wyniki pozwalają nam określić do której klasy należy algebra Liego Vessiota-Guldberga izomorficzna do poprzednich klas.

DEFINICJA 2.11. ([**BHL.H3**, Definicja 4.3]) Niech V będzie algebrą Liego Vessiota-Guldberga skończonego wymiaru i niech $S_2(V)$ będzie przestrzenią 2-kontrawariantnych tensorów symetrycznych z elementow w V. *Polem tensorowym Casimira* V nazywamy element $R \in S_2(V)$ taki, że $\mathcal{L}_X R = 0$ dla każdego $X \in V$.

TWIERDZENIE 2.12. *(*[**BHL.H3**, Twierdzenie 4.4]*) Niech V będzie algebrą Liego Vessiota-Guldberga należącą do jednej z klas P_2, I_4 lub I_5 klasyfikacji GKO. Niech R będzie nie-zerowym polem tensorowym Casimira V. Zapisując $R = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} R^{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta$, gdzie $\partial_1 = \partial_x$ i $\partial_2 = \partial_y$, zdefiniujemy*

$$\mathcal{I}(V) := \mathrm{sign}\left(\det(R^{\alpha\beta}(x))\right), \qquad \forall x \in \mathrm{dom}\, V,$$

gdzie $\mathrm{dom}\, V$ *jest dziedziną V. Jeżeli $\mathcal{I}(V) > 0$, to V jest lokalnie dyfeomorficzna do P_2; jeżeli $\mathcal{I}(V) < 0$, to V jest lokalnie dyfeomorficzna do I_4; jeżeli $\mathcal{I}(V) = 0$, to V jest lokalnie dyfeomorficzna do I_5.*

TABELA 3. Klasyfikacja 4 + 8 klas algebr Liego Vessiota–Gulbderga pól wektorowych Hamiltonowskich na $\mathbb{R}^2$ (opisana po raz pierwszy w [**BBHL.H2**]). Dla I_{12}, I_{14A} i I_{16}, mamy $j = 1,\dots,r$ i $r \geq 1$; w I_{14B} indeks j przyjmuje wartości $j = 2,\dots,r$.

#	Prymitywna	Funkcje Hamiltonowskie h_i	ω	Algebry Liego-Hamiltona
P_1	$A_0 \simeq \mathfrak{iso}(2)$	$y,\ -x,\ \frac{1}{2}(x^2+y^2),\ 1$	$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	$\overline{\mathfrak{iso}}(2)$
P_2	$\mathfrak{sl}(2)$	$-\frac{1}{y},\ -\frac{x}{y},\ -\frac{x^2+y^2}{y}$	$\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{y^2}$	$\mathfrak{sl}(2)$ or $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{R}$
P_3	$\mathfrak{so}(3)$	$\frac{-1}{2(1+x^2+y^2)},\ \frac{y}{1+x^2+y^2},\ -\frac{x}{1+x^2+y^2},\ 1$	$\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$	$\mathfrak{so}(3)$ or $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}$
P_5	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$y,\ -x,\ xy,\ \frac{1}{2}y^2,\ -\frac{1}{2}x^2,\ 1$	$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	$\overline{\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2} \simeq \mathfrak{h}_6$
#	Imprymitywna	Funkcje Hamiltonowskie h_i	ω	Algebry Liego-Hamiltona
I_1	$\mathbb{R}$	$\int^y f(y')\mathrm{d}y'$	$f(y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	$\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}^2$
I_4	$\mathfrak{sl}(2)$ (type II)	$\frac{1}{x-y},\ \frac{x+y}{2(x-y)},\ \frac{xy}{x-y}$	$\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x-y)^2}$	$\mathfrak{sl}(2)$ or $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{R}$
I_5	$\mathfrak{sl}(2)$ (type III)	$-\frac{1}{2y^2},\ -\frac{x}{y^2},\ -\frac{x^2}{2y^2}$	$\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{y^3}$	$\mathfrak{sl}(2)$ or $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{R}$
I_8	$B_{-1} \simeq \mathfrak{iso}(1,1)$	$y,\ -x,\ xy,\ 1$	$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	$\overline{\mathfrak{iso}}(1,1) \simeq \mathfrak{h}_4$
I_{12}	$\mathbb{R}^{r+1}$	$-\int^x f(x')\mathrm{d}x', -\int^x f(x')\xi_j(x')\mathrm{d}x'$	$f(x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	$\mathbb{R}^{r+1}$ or $\mathbb{R}^{r+2}$
I_{14A}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$ (type I)	$y,\ -\int^x \eta_j(x')\mathrm{d}x',\quad 1 \notin \langle \eta_j \rangle$	$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$ or $(\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r) \oplus \mathbb{R}$
I_{14B}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$ (type II)	$y,\ -x,\ -\int^x \eta_j(x')\mathrm{d}x',\ 1$	$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	$\overline{(\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r)}$
I_{16}	$C_{-1}^r \simeq \mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$y,\ -x,\ xy,\ -\frac{x^{j+1}}{j+1},\ 1$	$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$	$\overline{\mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}}$

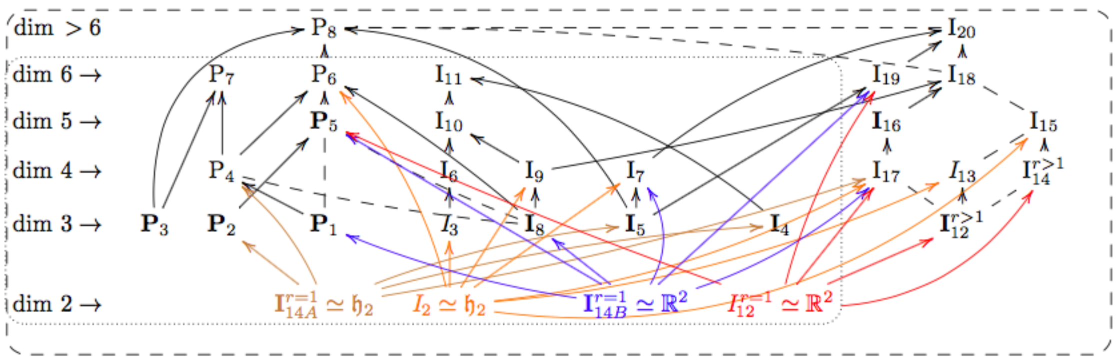
Wraz ze współpracownikami i moją byłą doktorantką zastosowałem poprzednie wyniki, aby ustalić do której klasy klasyfykacji GKO należą oscylatory Winternitza–Smorodinskiego, równania Kummera–Schwarza drugiego stopnia i inne znane rodzaje układów Liego na płaszczyźnie [**BHL.H3**].

Aby sprowadzić V^X do postaci jednej z algebr Liego pojawiających się w klasach Tabeli 3, zauważyłem, że następujące twierdzenie pozwala nam określić do której klasy należy algebra Liego Vessiota-Guldberga izomorficzna do $\mathfrak{sl}(2)$ i ustalić dla niej symplektyczną strukturę taką, że V^X składa się z pól wektorowych Hamiltonowskich bez wykorzystywania zamiany zmiennych.

STWIERDZENIE 2.13. *(*[**BHL.H3**, Stwierdzenie 3.1]*) Niech V będzie algebrą Liego Vessiota-Guldberga na płaszczyźnie. Pola wektorowe V są polami wektorowymi Hamiltonowskimi względem biwektora $\Lambda \in V \wedge V \backslash \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy V posiada jednowymiarową trywialną reprezentację Liego w $V \wedge V$.*

TWIERDZENIE 2.14. *(*[**BHL.H3**, Twierdzenie 3.6]*) Jeżeli V jest algebrą Liego Vessiota-Guldberga na płaszczyźnie posiadającą dwuwymiarowy ideał I, $I \wedge I \neq \{0\}$ i elementy V działają na I jako operatory bezśladowe, tj. odwzorowania $\vartheta_X : Y \in I \mapsto [X,Y] \in I$ są bezśladowe dla każdego $X \in V$, to V jest algebrą Liego pól wektorowych Hamiltonowskich względem każdego elementu $I \wedge I \backslash \{0\}$.*

TABELA 4. Niepełny diagram inkluzji między klasami klasyfikacji GKO [**BBHL.H2**]. Znacznie uzupełnia on relacje inkluzji podane między klasami algebr Liego nieskończonego wymiaru podanymi w [**GKO92**]. Algebry Liego zamieszczone poza linią z krótkimi punktami mają wymiar większy od 6. Napiszemy $A \dashrightarrow B$, aby oznaczyć, że podklasa A jest dyfeomorficzna do podalgebry Liego klasy B. Każda algebra Liego zawiera I_1. Klasy pogrubione i kursywą stanowią algebry Liego pól wektorowych Hamiltonowskich i algebry Liego rzędu pierwszego, odpowiednio. Kolory pozwalają nam odróżnić strzałki.



Zastosowania poprzednich wyników pozwoliły znaleźć w prosty sposób struktury symplektyczne dla prawie wszystkich algebr Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich na płaszczyźnie (popatrz przykłady 3.4, 3.5, 3.8–3.11 w [**BHL.H3**]).

2.3. Algebry Liego-Hamiltona. Algebry Liego-Hamiltona stanowią ważne pojęcie w analizie układów Liego-Hamiltona. Na przykład, grają one istotną rolę w obliczeniu zasad składań rozwiązań [**BCHL.H7**] i stałych ruchu układów Liego-Hamiltona [**CGL.H8**]. Moje najważniejsze wyniki w tym temacie wyglądają następująco.

Każdy układ Liego może mieć różne stowarzyszone nieizomorficzne algebry Liego-Hamiltona [**BBHL.H2**, Przykład 5.1]. Ten fakt jest kluczowy dla linearyzacji układów Liego-Hamiltona i dla zastosowania różnych metod [**CGL.H8**]. Na przykład, układ Liego-Hamiltona X na N posiadający odpowiednie odwzorowanie momentum, algebrę Liego-Hamiltona izomorficzną do V^X taką, że $\dim V^X = \dim N$ można zlinearyzować jednocześnie z jego strukturą Poissona [**CGL.H8**, Stwierdzenie 23].

Następujące stwierdzenia zostały odkryte i zastosowane w [**BBHL.H2**], żeby ustalić wszystkie algebry Liego-Hamiltona dla układów Liego-Hamiltona na płaszczyźnie. Ich klasyfikację można znaleźć w Tabeli 3.

STWIERDZENIE 2.15. *(*[**BBHL.H2**, Stwierdzenie 5.1] *Układ Liego-Hamiltona X na spójniej symplektycznej rozmaitości (N,ω) posiada stowarzyszoną algebrę Liego-Hamiltona $(\mathcal{H}_\Lambda,\{\cdot,\cdot\}_\omega)$ izomorficzną do V^X wtedy i tylko wtedy, gdy każda algebra Liego-Hamiltona nie izomorficzna do V^X jest izomorficzna do $V^X\oplus\mathbb{R}$.*

STWIERDZENIE 2.16. *(*[**BBHL.H2**, Stwierdzenie 5.2] *Jeżeli układ Liego-Hamiltona X na symplektycznej spójnej rozmaitości (N,ω) posiada stowarzyszoną algebrę Liego-Hamiltona $(\mathcal{H}_\Lambda,\{\cdot,\cdot\}_\omega)$ izomorficzną do V^X, to też posiada algebrę Liego-Hamiltona izomorficzną do $V^X\oplus\mathbb{R}$.*

WNIOSEK 2.17. *(*[**BBHL.H2**, Wniosek 5.3] *Jeżeli X jest układem Liego-Hamiltona względem spójnej rozmaitości (N,ω) posiadającym algebrę Liego-Hamiltona $(\mathcal{H}_\Lambda,\{\cdot,\cdot\}_\omega)$ takim, że $1\in\{\mathcal{H}_\Lambda,\mathcal{H}_\Lambda\}_\omega$, to X nie posiada żadnej algebry Liego-Hamiltona izomorficznej do V^X.*

STWIERDZENIE 2.18. *(*[**BBHL.H2**, Stwierdzenie 5.4] *Jeżeli X to układ Liego-Hamiltona na spójnej rozmaitości N posiadający V^X składającą się z pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury symplektycznej ω nie posiadającej żadnej algebry Liego-Hamiltona $(\mathcal{H}_\Lambda, \{\cdot,\cdot\}_\omega)$ izomorficznej do V^X, to wszysktie algebry Liego-Hamiltona dla X (względem nawiasu Liego $\{\cdot,\cdot\}_\omega$) są izomorficzne.*

2.4. Stałe ruchu dla układów Liego-Hamiltona. Struktury Liego–Hamiltonowskie pozwalają nam przeanalizować i zbadać stałe ruchu, symetrie Liego i inne właściwości układów Liego-Hamiltona. Zacznijmy od pokazania jednego wyniku, który można zrozumieć jako rozszerzenie dla układów nieautonomicznych znanego rezultatu dotyczącego stałych ruchu autonomicznych układów Hamiltonowskich [**FM**].

STWIERDZENIE 2.19. [**BCHL.H7**, Stwierdzenie 7] *Niech X będzie układem Liego-Hamiltona na N posiadającym strukturę Liego–Hamiltonowską (N, Λ, h). Funkcja niezależna od t jest stałą ruchu dla X wtedy i tylko wtedy, gdy komutuje względem nawiasu Poissona ze wszystkimi elementami $\mathcal{H}_\Lambda$. Rodzina $\mathcal{I}^X$ stałych ruchu niezależnych od t tworzy algebrę Poissona $(\mathcal{I}^X, \cdot, \{\cdot,\cdot\}_\Lambda)$.*

Następne stwierdzenie rozszerza poprzedni wynik dla stałych ruchu zależnych od t dla układów Liego-Hamiltona.

STWIERDZENIE 2.20. *(*[**BCHL.H7**, Lemat 9 i Stwierdzenie 12]*) Rozmaitość Poissona (N, Λ) indukuje rozmaitość Poissona $(\mathbb{R} \times N, \bar{\Lambda})$ ze strukturą Poissona*

$$\{f, g\}_{\bar{\Lambda}}(t, x) := \{f_t, g_t\}_\Lambda(x), \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times N.$$

Jeżeli X jest układem Liego-Hamiltona na N posiadającym strukturę Liego–Hamiltonowską (N, Λ, h), to $(\overline{\mathcal{I}}^X, \cdot, \{\cdot,\cdot\}_{\bar{\Lambda}})$, gdzie $\overline{\mathcal{I}^X}$ jest przestrzenią wszystkich stałych ruchu zależnych od t dla układu X, jest algebrą Poissona.

Struktura Poissona stowarzyszona z układem Liego-Hamiltona pozwala nam stworzyć skuteczne metody obliczenia stałych ruchu pewnego konkretnego rodzaju: tzw. *całki Liego* i *wielomianowe całki Liego* zdefiniowane w [**BCHL.H7**] i pojawiające się w problemach fizycznych [**Ma95**]. Odgrywają one istotną rolę w opisie zasad składań rozwiązań układów Liego-Hamiltona. Dodatkowo, takie całki ruchu są użyteczne w analizie układów fizycznych jak przedstawiono w następujących przykładach.

DEFINICJA 2.21. ([**BCHL.H7**, Definicje 13 i 16]) Niech X będzie układem Liego-Hamiltona na N posiadającym strukturę Liego–Hamiltonowską (N, Λ, h). *Wielomianową całką Liego X* względem (N, Λ, h) nazywamy stałą ruchu zależną od t dla X postaci $f_t := \sum_{I \in M} \lambda_I(t) h^I$, gdzie każdy I jest r-multi-indeksem: zbiór $(i_1, \ldots, i_r)$ nieujemnych liczb całkowitych gdzie $r \in \mathbb{N}$, zbiór M jest skończoną rodziną multi-indeksów, każdy $\lambda_I(t)$ jest funkcją zależną od t, i $h^I := h_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot h_r^{i_r}$ dla ustalonej bazy $\{h_1, \ldots, h_r\}$ algebry Liego-Hamiltona $\mathcal{H}_\Lambda$. Nazywamy *całką Liego* całkę ruchu dla której $\lambda_J = 0$ dla każdej J spełniającej $|J| := \sum_{\alpha=1}^r i_\alpha \neq 1$.

STWIERDZENIE 2.22. *(*[**BCHL.H7**, Stwierdzenia 14 i 15]*) Niech X będzie układem Liego-Hamiltona ze strukturą Liego–Hamiltonowską (N, Λ, h). Przestrzeń $\mathfrak{L}_h^\Lambda$ całek Liego względem (N, Λ, h) tworzy algebrę Liego $(\mathfrak{L}_h^\Lambda, \{\cdot,\cdot\}_{\bar{\Lambda}})$ izomorficzną do $(\mathcal{H}_\Lambda, \{\cdot,\cdot\}_\Lambda)$. Algebra Liego $\mathfrak{L}_h^\Lambda$ składa się ze stałych ruchu niezależnych od t wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{H}_\Lambda$ jest Abelowa.*

Niech $S_\mathfrak{g}$ i $U_\mathfrak{g}$ będą symetrycznymi i uniwersalnymi otaczającymi algebrami $\mathfrak{g}$ [**Va84**]. Obie algebry Liego można zrozumieć jako algebry Liego Poissona, gdzie druga będzie nieabelowa, względem naturalnego łączonego iloczynu i nawiasów Liego $\{\cdot,\cdot\}_{S_\mathfrak{g}}$ i $[\cdot,\cdot]_{U_\mathfrak{g}}$ (popatrz [**Va84, CL99, BCHL.H7**]). Tzw. *odwzorowanie symetryzujące* $\lambda : S_\mathfrak{g} \to U_\mathfrak{g}$ jest izomorfizmem między $\mathfrak{g}$-przestrzeniami, tj. $\lambda(\{v, P\}_{S_\mathfrak{g}}) = [v, \lambda(P)]_{U_\mathfrak{g}}$ dla każdego $P \in S_\mathfrak{g}$ i $v \in \mathfrak{g}$ [**Va84**].

STWIERDZENIE 2.23. *(*[**BCHL.H7**, Stwierdzenie 19]*) Funkcja f jest wielomianową całką Liego dla układu Liego-Hamiltona X względem struktury Liego-Hamiltonowskiej (N,Λ,h) wtedy i tylko wtedy, gdy $f_t = D(P_t)$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$, gdzie $D:(S_{\mathfrak{g}},\cdot,\{\cdot,\cdot\}_{S_{\mathfrak{g}}})\to(C^\infty(N),\cdot,\{\cdot,\cdot\}_\Lambda)$ jest morfizmem między algebrami Poissona takim, że jego obcięcie do $\mathfrak{g}$ jest injektywnym morfizmem między algebrami Liego z $D(\mathfrak{g}) = \mathcal{H}_\Lambda$, i krzywa P_t jest liniową kombinacją z liniowymi współczynnikami zależnymi od t wielomianów spełniających równanie różniczkowe*

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \{P, w_t\}_{S_{\mathfrak{g}}} = 0, \qquad P\in S_{\mathfrak{g}}, \tag{2.6}$$

gdzie w_t reprezentuje krzywą w $\mathfrak{g}$ taką, że $D(w_t) = h_t$ dla każdej $t\in\mathbb{R}$.

WNIOSEK 2.24. *(*[**BCHL.H7**, Wniosek 21]*) Niech X będzie układem Liego-Hamiltona posiadającym strukturę Liego–Hamiltonowską (N,Λ,h) indukując morfizm między algebrami Poissona $D: S_{\mathfrak{g}}\to C^\infty(N)$ jak w Stwierdzeniu 2.23. Funkcja $F := D(C)$, gdzie C jest elementem Casimira $S_{\mathfrak{g}}$, jest całką ruchu niezależnym od t dla X. Jeżeli $\mathcal{C}$ jest elementem Casimira $U_{\mathfrak{g}}$, to $F = D(\lambda^{-1}(\mathcal{C}))$ jest stałą ruchu niezależną od t dla X.*

PRZYKŁAD 2.25. ([**BCHL.H7**, Sekcja 7.1]) Rozważamy teraz klasyczny układ Erkamova [**CL.PH12**]:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2(t)x + \frac{b}{x^3}, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega^2(t)y, \end{cases}$$

gdzie $\omega(t)$ jest nie stałą częstotliwością i $b\in\mathbb{R}$. Ten układ pojawia się w wielu zastosowaniach występujących w problemach mechaniki klasycznej i kwantowej [**LA08**]. Zapisując ten układ równań różniczkowych jako układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x, & \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\omega^2(t)x + \frac{b}{x^3}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y, & \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\omega^2(t)y, \end{cases} \tag{2.7}$$

otrzymamy układ Liego posiadający algebrę Liego Vessiota-Guldberga V izomorficzną do $\mathfrak{sl}(2)$ [**CL.PH12**]. Rzeczywiście, układ (2.7) opisuje całki ruchu pola zależnego od t postaci $X = X_3 + \omega^2(t)X_1$, gdzie pola wektorowe

$$X_1 := -x\partial_{v_x} - y\partial_{v_y}, \quad X_2 := \frac{1}{2}\left(v_x\partial_{v_x} + v_y\partial_{v_y} - x\partial_x - y\partial_y\right), \quad X_3 := v_x\partial_x + v_y\partial_y + \frac{b}{x^3}\partial_{v_x},$$

spełniają relacje konmutacyjne

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2, \qquad [X_2, X_3] = X_3. \tag{2.8}$$

Jest to układ Liego-Hamiltona. Faktycznie, pola wektorowe X_1, X_2, X_3 są Hamiltonowskie ze względu na biwektor Poissona $\Lambda := \partial_x\wedge\partial_{v_x} + \partial_y\wedge\partial_{v_y}$. Ich funkcje Hamiltonowskie są postaci:

$$h_1 = \frac{1}{2}(x^2+y^2), \qquad h_2 = -\frac{1}{2}(xv_x + yv_y), \qquad h_3 = \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + \frac{b}{x^2}\right)$$

i tworzą bazę dla $(\mathcal{H}_\Lambda, \{\cdot,\cdot\}_\Lambda) \simeq (\mathfrak{sl}(2), [\cdot,\cdot])$ taką, że

$$\{h_1, h_2\} = -h_1, \qquad \{h_1, h_3\} = -2h_2, \qquad \{h_2, h_3\} = -h_3. \tag{2.9}$$

Ponieważ $X = X_3 + \omega^2(t)X_1$ i $\omega(t)$ nie jest stałą, to każda stała zależna od t dla X jest wspólną całką pierwszą dla pól wektorowych X_1, X_2, X_3. Zamiast znaleźć f rozwiązując układ równań cząstkowych $X_1f = X_2f = X_3f = 0$, korzystamy z Wniosku 2.24. To bezpośrednio prowadzi do znalezienia całki ruchu układu za pomocą elementu Casimira algebry symetrycznej $\mathfrak{sl}(2)$. Jeżeli $\{v_1, v_2, v_3\}$ to baza $\mathfrak{sl}(2)$ spełniająca

$$[v_1, v_2] = -v_1, \qquad [v_1, v_3] = -2v_2, \qquad [v_2, v_3] = -v_3, \tag{2.10}$$

to element Casimira $\mathfrak{sl}(2)$ przyjmuje postać $\mathcal{C} = \frac{1}{2}(v_1\widetilde{\otimes}v_3 + v_3\widetilde{\otimes}v_1) - v_2\widetilde{\otimes}v_2 \in U_{\mathfrak{sl}(2)}$. Wówczas, odwzorowanie odwrotne odwzorowania symetryzującego [**Va84**], $\lambda^{-1} : U_{\mathfrak{sl}(2)} \to S_{\mathfrak{sl}(2)}$, pozwala nam znaleźć element Casimira $S_{\mathfrak{sl}(2)}$:

$$C = \lambda^{-1}(\mathcal{C}) = v_1 v_3 - v_2^2. \tag{2.11}$$

Izomorfizm między algebrami Liego $\phi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathcal{H}_\Lambda$ spełniający $\phi(v_\alpha) = h_\alpha$ dla $\alpha = 1,2,3$ pozwala nam skonstruować morfizm między algebrami Poissona D jak w Stwierdzeniu 2.23. Przeto, otrzymamy za pośrednictwem wniosku 2.24, że

$$F := D(C) = \phi(v_1)\phi(v_3) - \phi^2(v_2) = h_1 h_3 - h_2^2 = (v_y x - v_x y)^2 + b\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

W ten sposób odzyskamy, z dokładnością do addytywnej lub niezerowej multiplikatywnej stałej, dobrze znany niezmiennik Lewisa–Riesenfelda pojawiający sie w wielu zagadnieniach fizycznych [**LA08**]. Jeśli $\omega(t)$ jest stała, to $V^X \subset V$ i F jest stałą ruchu dla X.

2.5. Zasady składań rozwiązań dla układów Liego-Hamiltona. Algebry Liego-Hamiltona pozwalają nam obliczyć zasady składań rozwiązań równań różniczkowych dla układów Liego-Hamiltona w prostszy sposób niż poprzednimi metodami:

- Metoda ta pozwala nam unikać całkowania układów równań różniczkowych cząstkowych/zwyczajnych jak w metodach Winternitza, Cariñena i ich współpracowników [**CGM07, CGM00**],
- Nie trzeba sprowadzić układu do postaci kanonicznej czego wymagało, na przykład, korzystanie z wyników Winternitza [**PW, SW84, SW84II**].
- Umożliwia interpretację geometryczną zasad składań rozwiązań. Natomiast, inne metody tylko pozwalają obliczyć postać zasady składań rozwiązań.

Moja metoda daje się wykorzystać w badaniu układów Liego-Hamiltona i innych uogólnień tych układów, np. w układach Liego-Diraca [**CGL.H6**]. Zasady składań superpozycji dla prawie wszystkich najważniejszych układów Liego można analizować moją metodą, co pokazuje jej istotność. Procedura ta wymaga wykorzystywania koalgebr Poissona. Teraz zdefiniuję to pojęcie.

Niech $(A, \star_A, \{\cdot,\cdot\}_A)$ i $(B, \star_B, \{\cdot,\cdot\}_B)$ będą algebrami Poissona i niech $\star_A$, $\star_B$ będą przemienne. Wtedy $A \otimes B$ staje się algebrą Poissona $(A\otimes B, \star_{A\otimes B}, \{\cdot,\cdot\}_{A\otimes B})$ definiując

$$(a\otimes b) \star_{A\otimes B} (c\otimes d) = (a \star_A c) \otimes (b \star_B d),$$
$$\{a\otimes b, c\otimes d\}_{A\otimes B} = \{a,c\}_A \otimes b \star_B d + a \star_A c \otimes \{b,d\}_B$$

dla każdych $a, c \in A$ i $b, d \in B$. Podobnie, strukturę Poissona na $A^{(m)} := \overbrace{A\otimes\ldots\otimes A}^{m-\text{times}}$ można skonstruować indukcyjnie.

Koalgebra Poissona to trójka $(A, \star_A, \{\cdot,\cdot\}_A, \Delta)$ taka, że $(A, \star_A, \{\cdot,\cdot\}_A)$ jest algebrą Poissona i $\Delta : (A, \star_A, \{\cdot,\cdot\}_A) \to (A\otimes A, \star_{A\otimes A}, \{\cdot,\cdot\}_{A\otimes A})$, tzw. *koprodukt*, jest *kołącznym* homomorfizmem między algebrami Poissona [**CP95**], tj. $(\Delta\otimes \mathrm{Id})\circ\Delta = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\circ\Delta$.

Każdy układ Liego-Hamiltona X na N można wyposażyć w strukturę Liego–Hamiltonowską i stowarzyszoną z nim algebrę Liego-Hamiltona $\mathcal{H}_\Lambda \simeq \mathfrak{g}$. Wówczas, istnieje naturalny injektywny morfizm algebr Liego $\phi : \mathfrak{g} \to C^\infty(N)$ przyporządkujący każdemu elementowi $\mathfrak{g}$ odpowiedni element w $\mathcal{H}_\Lambda$. Wtedy, $S_\mathfrak{g}$ staje się koalgebrą Poissona względem jednoznaczego koproduktu $\Delta : S_\mathfrak{g} \to S_\mathfrak{g}\otimes S_\mathfrak{g}$ spełniającego $\Delta(v) = v\otimes 1 + 1\otimes v$ (patrz [**BCHL.H7**]). Ponadto,

LEMAT 2.26. *(*[**BCHL.H7**, Lemat 23]*) Odwzorowanie* $\Delta^{(m)} : (S_\mathfrak{g}, \cdot, \{\cdot,\cdot\}_{S_\mathfrak{g}}) \to (S_\mathfrak{g}^{(m)}, \cdot_{S_\mathfrak{g}^{(m)}}, \{\cdot,\cdot\}_{S_\mathfrak{g}^{(m)}})$ *, dla* $m > 1$*, zdefiniowane rekurencyjnie*

$$\Delta^{(m)} := (\overbrace{\mathrm{Id}\otimes\ldots\otimes\mathrm{Id}}^{(m-2)-\text{times}} \otimes \Delta^{(2)}) \circ \Delta^{(m-1)}, \qquad m > 2, \tag{2.12}$$

gdzie $\Delta^{(2)} := \Delta$ *jest naturalnym koproduktem w* $S_{\mathfrak{g}}$*, jest morfizmem algebr Poissona.*

LEMAT 2.27. *(*[**BCHL.H7**, Lemat 24]*) Morfizm* $\phi : \mathfrak{g} \hookrightarrow C^\infty(N)$ *algebr Liego daje początek rodzinie morfizmów algebr Poissona* $D^{(m)} : S_{\mathfrak{g}}^{(m)} \hookrightarrow C^\infty(N)^{(m)} \subset C^\infty(N^m)$ *takich, że dla wszystkich* $v_1, \ldots, v_m \in \mathfrak{g} \subset S_{\mathfrak{g}}$ *mamy*

$$\Big[D^{(m)}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m)\Big](x_{(1)}, \ldots, x_{(m)}) = [D(v_1)](x_{(1)}) \cdot \ldots \cdot [D(v_m)](x_{(m)}), \tag{2.13}$$

gdzie $x_{(p)}$ *jest punktem rozmaitości* N *umieszczonym w pozycji* p *iloczynu* $N \times \ldots \times N := N^m$ *i* D *jest morfizmem algebr Liego indukowanym przez* ϕ *opisanym w Stwierdzeniu 2.23.*

Powyższe wyniki pozwalają nam udowodnić Twierdzenie 2.29 i zapewniają metodę obliczenia stałych ruchu niezależnych od t dla diagonalnych prolongacji układów Liego-Hamiltona. Na podstawie tego wyniku można algebraicznie obliczyć zasady składań rozwiązań układów Liego-Hamiltona. Dodatkowo, warto podkreślić, że takie twierdzenie jest uogólnieniem (prawdziwym tylko dla tzw. *prymitywnych koproduktów*) twierdzenia integralności dla symetrycznych koalgebraicznych układów opisywanych w [**BR**].

STWIERDZENIE 2.28. *(*[**BCHL.H7**, Stwierdzenie 25]*) Jeżeli* X *jest układem Liego-Hamiltona na* N *posiadającym strukturę Liego–Hamiltonowską* (N, Λ, h)*, to jego diagonalna prolongacja* $\widetilde{X}^{[m+1]}$ *do każdego* N^{m+1} *jest także układem Liego-Hamiltona wyposażonym w strukturę Liego-Hamiltonowską* $(N^{m+1}, \Lambda^{m+1}, \widetilde{h})$ *postaci*

$$\Lambda^{m+1}(x_{(0)}, \ldots, x_{(m)}) := \sum_{a=0}^{m} \Lambda(x_{(a)}),$$

gdzie korzystaliśmy z izomorfizmu wiązek wektorowych $\mathrm{T}N^{m+1} \simeq \mathrm{T}N \oplus \cdots \oplus \mathrm{T}N$ *(*$m+1$ kopii*), i* $\widetilde{h}_t := D^{(m+1)}(\Delta^{(m+1)}(h_t))$*, gdzie* $D^{(m+1)}$ *jest morfizmem algebr Poissona (2.13) indukowanym przez morfizm algebr Liego* $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{H}_\Lambda \subset C^\infty(N)$*.*

TWIERDZENIE 2.29. *(*[**BCHL.H7**, Twierdzenie 26]*) Jeśli* X *jest układem Liego-Hamiltona posiadającym strukturę Liego–Hamiltonowską* (N, Λ, h) *i* C *jest elementem Casimira algebry Poissona* $(S_{\mathfrak{g}}, \cdot, \{,\}_{S_{\mathfrak{g}}})$*, to:*
(i) Funkcje postaci

$$F^{(k)} = D^{(k)}(\Delta^{(k)}(C)), \qquad k = 2, \ldots, m, \tag{2.14}$$

są stałymi niezależnymi od t *dla diagonalnych prolongacji* $\widetilde{X}$ *pola wektorowego zależnego od czasu* X *do* N^m*. Dodatkowo, jeżeli funkcje* $F^{(k)}$ *są niestałe, to tworzą zbiór* $(m-1)$ *funkcjonalnie niezależnych funkcji w inwolucji.*
(ii) Funkcje postaci

$$F_{ij}^{(k)} = S_{ij}(F^{(k)}), \qquad 1 \le i < j \le k, \qquad k = 2, \ldots, m, \tag{2.15}$$

gdzie S_{ij} *jest permutacją zmiennych* $x_{(i)} \leftrightarrow x_{(j)}$*, są stałymi ruchu niezależnymi od* t *dla diagonalnych prolongacji* $\widetilde{X}$ *do* N^m*.*

3. Układy Liego-Diraca

Twierdzenie 'no-go' dla układów Liego-Hamiltona, tj. Twierdzenie 2.6, pozwala nam udowodnić, że równania Schwarza nie są układami Liego-Hamiltona [**CGL.H6**]. Rozpatrzmy równania Schwarza [**Be07, OT09**]

$$\{x, t\} = \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-2} = 2b_1(t), \tag{3.1}$$

gdzie $\{x, t\}$ to *pochodna Schwarza* funkcji $x(t)$ ze względu na zmienną t i $b_1(t)$ jest dowolną funkcją zależną od t [**NM13**]. To równanie jest szczególnym przypadkiem równania Kummera–Schwarza trzeciego rzędu [**CGL.PH6**] i pojawia się w analizie rekurencyjnych równań różniczkowych

Riccatiego i równań różniczkowych Kummera–Schwarza drugiego-rzędu [**NM13**]. Dla uproszczenia, załóżmy w dalszym ciągu, że $b_1(t)$ nie jest stałą.

Układ pierwszego rzędu równań różniczkowych uzyskany przez dodawanie zmiennych $v := \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ i $a := \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ w (3.1), tj.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a, \qquad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{v} + 2b_1(t)v, \tag{3.2}$$

jest układem Liego. Rzeczywiście, układ ten jest stowarzyszony z polem wektorowym zależnym od t postaci

$$X_t^{3KS} = v\partial_x + a\partial_v + \left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{v} + 2b_1(t)v\right)\partial_a = Y_3 + b_1(t)Y_1,$$

gdzie pola wektorowe Y_1, Y_2, Y_3 na $\mathcal{O}_2 := \{(x,v,a) \in \mathrm{T}^2\mathbb{R} \,|\, v \neq 0\}$, gdzie $\mathrm{T}^2\mathbb{R}$ to druga wiązka styczna do $\mathbb{R}$ [**LM87**], mają postać

$$Y_1 := 2v\partial_a, \qquad Y_2 := v\partial_v + 2a\partial_a, \qquad Y_3 := v\partial_x + a\partial_v + \frac{3}{2}\frac{a^2}{v}\partial_a, \tag{3.3}$$

i generują algebrę Liego pól wektorowych V^{3KS} izomorficzną do $\mathfrak{sl}(2)$. Zatem, X^{3KS} to pole wektorowe zależne od t przyjmujące wartości w V^{3KS}, tj. X^{3KS} jest układem Liego. Skoro $\mathcal{D}^{3KS} = T\mathcal{O}_2$ i $\mathcal{O}_2$ jest trójwymiarową rozmaitością, to Twierdzenie 'no-go' dla układów Liego-Hamiltona ustala, że to nie jest układ Liego-Hamiltona i wymagane jest inne podejście do jego badania. Pomimo tego, V^{3KS} składa się z pól wektorowych Hamiltonowskich ze względu na formę presymplektyczną

$$\omega_1 := \frac{\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}a}{v^3}.$$

Właśnie,

$$\iota_{Y_1}\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{2}{v}\right), \qquad \iota_{Y_2}\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{a}{v^2}\right), \qquad \iota_{Y_3}\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{a^2}{2v^3}\right),$$

gdzie $\iota_X\omega$ to zwężenie formy symplektycznej ω z polem wektorowym X.

Powyższe relacje uzasadniają definicję i analizę układów Liego posiadających algebry Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury presymplektycznej. Pomimo tego, łatwiej zrozumieć struktury presymplektyczne jako szczególne przypadki struktur Diraca [**IV**] i analizować układy Liego z algebrą Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury Diraca. Wprowadzamy teraz te pojęcia.

Wiązką Pontryagina lub *uogólnioną wiązką styczną* na rozmaitości N nazywamy wiązkę wektorową $\mathcal{P}N := T^*N \oplus_N TN$ nad N, gdzie $\oplus_N$ to suma Whitneya wiązek wektorowych. Wiązkę Pontryagina można wyposażyć w naturalne parowanie między formami i wektorami. *Rozmaitość Diraca* to dwójka (N, L), gdzie N jest rozmaitością i L to podwiązka $TN \oplus_N T^*N$ taka, że: a) L jest maksymalną izotropową podwiązką względem parowania między formami i wektorami, b) przestrzeń cięć, $\Gamma(L)$, jest całkowalna ze względu na tzw. *nawias Couranta* $[\cdot,\cdot]_C$ na $\Gamma(\mathcal{P}N)$ [**Co90**].

Poprzedni przykład dotyczący równania Schwarza i inne przykłady rozwinięte w [**LV.H1, LTV.H4, HL.H5, CGL.H6**] uzasadniają badanie układów Liego posiadających algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich ze względu na strukturę Diraca. Warto przypomnieć, że pole wektorowe Hamiltowskie względem struktury Diraca (N, L), tj. *pole wektorowe L-Hamiltonowskie*, jest polem wektorowym X na N takim, że $X + \mathrm{d}h \in \Gamma(L)$ dla pewnej funkcji $h \in C^\infty(N)$, tzw. *funkcja L-Hamiltonowska*. Przestrzeń funkcji L-Hamiltonowskich oznaczamy przez $\mathrm{Adm}(N, L)$. Jeżeli $X \in \Gamma(L)$, to mówi się, że X jest *polem wektorowym cechowania*. Struktura Diraca pozwala nam zdefiniować nawias Poissona $\{\cdot,\cdot\}_L$ na przestrzeni funkcji L-Hamiltonowskich. Dodatkowo, każda rozmaitość Diraca indukuje algebroid Liego $(\mathcal{P}N, [\cdot,\cdot]_C, \rho : \mathcal{P}N \to TN)$, gdzie ρ, zwane *kotwicą*, jest naturalnym rzutem z $\mathcal{P}N$ na TN [**Ma08**].

Powyższy przykład ilustruje istnienie układów Liego niebędących układami Liego-Hamiltona i posiadających algebry Liego Vessiota-Guldberga składające się z pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury Diraca. Poprzedni i inne podobne przykłady można znaleźć w [**CGL.H6**]. Z tego punktu widzenia, naturalne uogólnienie układów Liego-Hamiltona do układów stowarzyszonych z algebrami Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury Diraca wygląda następująco.

DEFINICJA 3.1. ([**CGL.H6**, Definicja 5.2]) *Układ Liego–Diraca* to trójka (N, L, X), gdzie (N, L) jest rozmaitością Diraca i X jest układem Liego posiadającym algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych L-Hamiltonowskich.

DEFINICJA 3.2. ([**CGL.H6**, Definicja 6.1]) *Funkcja Hamiltonowska Liego–Diraca* to trójka (N, L, h), gdzie (N, L) oznacza rozmaitość Diraca i h jest t-parametryczną rodziną dopuszczalnych funkcji $h_t : N \to \mathbb{R}$ takich, że $\operatorname{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\cdot,\cdot\}_L)$ jest algebrą Liego skończonego wymiaru. Pole wektorowe zależne od t posiada funkcję Hamiltonowską Liego–Diraca (N, L, h) jeśli $X_t + \mathrm{d}h_t \in \Gamma(L)$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

TWIERDZENIE 3.3. *(*[**CGL.H6**, Twierdzenie 6.4]*) Każdy układ Liego–Diraca (N, L, X) posiada funkcję Hamiltonowską Liego–Diraca (N, L, h).*

3.1. Prolongacja układów Liego Diraca i zasady składań rozwiązań. Zbadajmy teraz właściwości diagonalnych prolongacji układów Liego–Diraca. To pozwala nam zastosować takie struktury w obliczeniach zasad składań rozwiązań i wprowadzić nowe pojęcia generalizujące diagonalne prolongacje pól wektorowych zależnych od t.

Niech $\tau : E \to N$ będzie wiązką wektorową. *Diagonalna prolongacja* do N^m jest iloczynem kartezjańskim $E^{[m]} := E \times \dots \times E$ m kopii E, który stanowi wiązkę wektorową na N^m w naturalny sposób:

$$E^{[m]}_{(x_{(1)},\dots,x_{(m)})} \simeq E_{x_{(1)}} \oplus \dots \oplus E_{x_{(m)}}\,.$$

Każde cięcie $X : N \to E$ w E posiada naturalną *diagonalną prolongację* do cięcia $X^{[m]}$ wiązki wektorowej $E^{[m]}$:

$$X^{[m]}(x_{(1)},\dots,x_{(m)}) := X(x_{(1)}) + \dots + X(x_{(m)})\,.$$

Niech dana będzie funkcja $f : N \to \mathbb{R}$. *Diagonalną prolongacją* funkcji f do N^m nazywamy funkcję daną wzorem $\widetilde{f}^{[m]}(x_{(1)},\dots,x_{(m)}) := f(x_{(1)}) + \dots + f(x_{(m)})$.

Możemy też rozpatrywać cięcia $X^{(j)}$ z $E^{[m]}$ postaci

$$X^{(j)}(x_{(1)},\dots,x_{(m)}) := 0 + \dots + X(x_{(j)}) + \dots + 0\,. \tag{3.4}$$

Jasne jest, że jeśli (X_i) jest bazą składającą się z lokalnych cięć z wiązki wektorowej E, to $(X_i^{(j)})$, gdzie $j \in 1,\dots,m$, jest bazą lokalnych cięć z $E^{[m]}$.

Skoro mamy naturalne kanoniczne izomorfizmy

$$(TN)^{[m]} \simeq TN^m \quad \text{i} \quad (T^*N)^{[m]} \simeq T^*N^m\,,$$

możemy zinterpretować diagonalną prolongację $X^{[m]}$ pola wektorowego na N jako pole wektorowe $\widetilde{X}^{[m]}$ na N^m i diagonalną prolongację $\alpha^{[m]}$ z jedno-formy na N jako jedno formę $\widetilde{\alpha}^{[m]}$ na N^m. Kiedy m jest ustalony, to będziemy pisać po prostu $\widetilde{X}$ i $\widetilde{\alpha}$.

STWIERDZENIE 3.4. *(*[**CGL.H6**, Stwierdzenie 7.1]*) Diagonalna prolongacja do N^m pola wektorowego X na N to jedyne pole wektorowe $\widetilde{X}^{[m]}$ na N^m rzutowalne względem odwzorowania $\pi : (x_{(1)},\dots,x_{(m)}) \in N^m \mapsto x_{(1)} \in N$ na X i niezmiennicze względem permutacji zmiennych $x_{(i)} \leftrightarrow x_{(j)}$, gdzie $i, j = 1,\dots,m$. Diagonalna prolongacja do N^m z jedno-formy α na N to jedyna 1-forma $\widetilde{\alpha}^{[m]}$ na N^m taka, że $\widetilde{\alpha}^{[m]}(\widetilde{X}^{[m]}) = \widetilde{\alpha(X)}^{[m]}$ dla każdego pola wektorowego $X \in \Gamma(TN)$. Zatem, $d\widetilde{\alpha} = \widetilde{d\alpha}$ i $\mathcal{L}_{\widetilde{X}^{[m]}}\widetilde{\alpha}^{[m]} = \widetilde{\mathcal{L}_X\alpha}$. W szczególności, jeżeli α jest zamknięta (dokładna), taką będzie też diagonalna prolongacja $\widetilde{\alpha}^{[m]}$ do N^m.*

Niech (x^a) będzie lokalnym układem współrzędnych w N i niech $(x^a_{(i)})$ będzie indukowanym przez nich układem współrzędnych w N^m. Jeżeli $X := \sum_a X^a(x)\partial_{x^a}$ i $\alpha := \sum_a \alpha_a(x)dx^a$, to

$$\widetilde{X}^{[m]} = \sum_{a,i} X^a(x_{(i)})\partial_{x^a_{(i)}} \quad \text{oraz} \quad \widetilde{\alpha}^{[m]} = \sum_{a,i} \alpha_a(x_{(i)})dx^a_{(i)}\,. \tag{3.5}$$

Ustalmy wartość $m \in \mathbb{N}$. Jeżeli X_1 i X_2 są polami wektorowymi na N, to $\widetilde{[X_1, X_2]}^{[m]} = [\widetilde{X_1}^{[m]}, \widetilde{X_2}^{[m]}]$. Na mocy tego, diagonalne prolongacje do N^m elementów skończenie wymiarowej algebry Liego V na N tworzą algebrę Liego $\widetilde{V}^{[m]}$ izomorficzną do V. Tak jak dla standardowych pól wektorowych, można zdefiniować diagonalną prolongację pola wektorowego zależnego od t na N do N^m jako jedyne pole wektorowe zależne od t postaci $\widetilde{X}^{[m]}$ na N^m takie, że $\widetilde{X_t}^{[m]}$ jest diagonalną prolongacją X_t do N^m dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Jeżeli X to układ Liego-Hamiltona, to jego diagonalna prolongacja jest w naturalny sposób także układem Liego-Hamiltona [**BCHL.H7**]. Pokażemy teraz, że taki wynik można uogólnić do układów Diraca-Liego.

DEFINICJA 3.5. ([**CGL.H6**, Definicja 7.2]) Niech (N, L_N) i (M, L_M) będą rozmaitościami Diraca. Mówi się, że $\varphi : N \to M$ jest *odwzrowaniem Diraca 'forward'* między (N, L_N) i (M, L_M) jeżeli $(L_M)_{\varphi(x)} = \mathfrak{P}_\varphi(L_N)_x$, gdzie

$$\mathfrak{P}_\varphi(L_N)_x := \{\varphi_{*x}X_x + \omega_{\varphi(x)} \in T_{\varphi(x)}M \oplus T^*_{\varphi(x)}M \,|\, X_x + (\varphi^*\omega_{\varphi(x)})_x \in (L_N)_x\},$$

dla wszystkich $x \in N$.

STWIERDZENIE 3.6. *(*[**CGL.H6**, Stwierdzenie 7.3]*) Niech (N, L) będzie strukturą Diraca i niech będzie dany naturalny izomorfizm*

$$(TN^m \oplus_{N^m} T^*N^m)_{(x_{(1)},\dots,x_{(m)})} \simeq (T_{x_{(1)}}N \oplus T^*_{x_{(1)}}N) \oplus \dots \oplus (T_{x_{(m)}}N \oplus T^*_{x_{(m)}}N).$$

Diagonalna prolongacja $L^{[m]}$ tworzy rozmaitość Diraca $(N, L^{[m]})$.

Dla każdego $\pi_i : (x_{(1)}, \dots, x_{(m)}) \in N^m \mapsto x_{(i)} \in N$, gdzie $i = 1, \dots, m$, otrzymamy równość $\mathfrak{P}_{\pi_i}(L^{[m]}) = L$. Dodatkowo, $L^{[m]}$ jest niezmienniczy względem permutacji $x_{(i)} \leftrightarrow x_{(j)}$, dla $i, j = 1, \dots, m$.

WNIOSEK 3.7. *(*[**CGL.H6**, Wniosek 7.4]*) Niech będzie dana rozmiatość Diraca (N, L). Wówczas, $\rho_m(L^{[m]}) = \rho(L)^{[m]}$, gdzie ρ_m to rzutowanie $\rho_m : \mathcal{P}N^m \to TN^m$ rozmaitości Diraca $(N^m, L^{[m]})$. Zatem, jeżeli X jest L-polem wektorowym Hamiltonowskim względem L, to jego diagonalna prolongacja $\widetilde{X}^{[m]}$ do N^m jest L-polem Hamiltonowskim ze względu na $L^{[m]}$. Dodatkowo, $\rho^*_m(L^{[m]}) = \rho^*(L)^{[m]}$, gdzie ρ^*_m jest rzutowaniem kanonicznym $\rho^*_m : \mathcal{P}N^m \to T^*N^m$.*

WNIOSEK 3.8. *(*[**CGL.H6**, Wniosek 7.4]*) Jeżeli (N, L, X) jest układem Liego–Diraca, to $(N^m, L^{[m]}, \widetilde{X}^{[m]})$ jest układem Liego-Diraca.*

STWIERDZENIE 3.9. *(*[**CGL.H6**, Stwierdzenie 7.6]*) Niech X będzie polem wektorowym i niech f będzie funkcją na N. Wówczas:*

(a) *Jeżeli f jest funkcją L-Hamiltonowską dla X, to diagonalna prolongacja f do N^m jest funkcją $L^{[m]}$-Hamiltonowską diagonalnej prolongacji $\widetilde{X}^{[m]}$ na N^m.*
(b) *Jeżeli $f \in \mathrm{Cas}(N, L)$, to $\widetilde{f}^{[m]} \in \mathrm{Cas}(N^m, L^{[m]})$.*
(c) *Odwzorowanie $\lambda : (\mathrm{Adm}(N, L), \{\cdot,\cdot\}_L) \ni f \mapsto \widetilde{f}^{[m]} \in (\mathrm{Adm}(N^m, L^{[m]}), \{\cdot,\cdot\}_{L^{[m]}})$ jest injektywnym morfizmem algebr Liego.*

Skoro zazwyczaj $\widetilde{fg}^{[m]} \neq \widetilde{f}^{[m]}\widetilde{g}^{[m]}$, to λ nie jest morfizmem algebr Poissona.
Na mocy poprzedniego stwierdzenia można udowodnić następujące wnioski.

WNIOSEK 3.10. *(*[**CGL.H6**, Wniosek 7.7]*) Jeżeli $h_1, \ldots, h_r : N \to \mathbb{R}$ to zbiór funkcji na N rozmaitości Diraca (N, L) generujący algebrę Liego funkcji skończonego wymiaru ze względu na nawias Poissona $\{\cdot,\cdot\}_L$, to ich diagonalne prolongacje $\widetilde{h}_1^{[m]}, \ldots, \widetilde{h}_r^{[m]}$ do N^m generują algebrę Liego funkcji względem nawiasu Liego $\{\cdot,\cdot\}_{L^{[m]}}$ indukowanego przez strukturę Diraca $(N^m, L^{[m]})$.*

WNIOSEK 3.11. *(*[**CGL.H6**, Wniosek 7.8]*) Jeżeli (N, L, X) jest układem Liego–Diraca posiadającym funkcję Liego–Diraca-Hamiltonowską (N, L, h), to $(N^m, L^{[m]}, \widetilde{X}^{[m]})$ jest układem Liego–Diraca z funkcją Liego-Diraca-Hamiltonowską $(N^m, L^{[m]}, h^{[m]})$, gdzie każda $h_t^{[m]} := \widetilde{h}_t^{[m]}$ jest diagonalną prolongacją funkcji h_t do N^m.*

Poprzednie wyniki można zastosować w badaniu zasad składań rozwiązań układów Liego–Diraca jak zilustrowano w przykładach w [**CGL.H6**]. Mój kluczowy pomysł to rozszerzenie metody koalgebry Poissona do rozmaitości Diraca. To znacznie rozszerza zastosowania koalgebr Poissona.

4. Układy Liego k-symplektyczne

Analiza struktur k-symplektycznych została zapoczątkowana przez M. de León [**LMS88, LMS93, LSV16**], Awane [**Aw92**], Gunther [**Gu87**] i innych. Takie struktury pojawiły się jako uogólnienia geometrii symplektycznej w kontekście badania klasycznych teorii pól [**Gu87**]. Formalnie, definicja struktury k-symplektycznej jest następująca.

DEFINICJA 4.1. Niech N będzie rozmaitością $n(k+1)$-wymiarową i niech $\omega_1, \ldots, \omega_k$ będzie zbiorem k zamkniętych dwu-form na N. Zatem, $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ tworzy *strukturę k–symplektyczną* jeżeli $\bigcap_{i=1}^k \ker \omega_i(x) = \{0\}$, dla każdego $x \in N$. Pod takimi warunkami mówi się, że $(N, \omega_1, \ldots, \omega_k)$ to *rozmaitość k-symplektyczna*.

Struktura k-symplektyczna $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ na rozmaitości $n(k+1)$-wymiarowej N jest równoważna zamkniętej niezdegenerowanej formie $\Omega := \sum_{n=1}^k \omega_k \otimes e^k$ na N przyjmującej wartości w $\mathbb{R}^k$. Ta Ω nazywa się *formą polisymplektyczną* i pozwala nam uprościć formalizm struktur k-symplektycznych. Struktura k-symplektyczna sprawia kilka problemów: struktury k-symplektycznej nie można stowarzyszyć z algebrami Poissona funkcji i nie można jej zastosować, aby zbadać wszystkie równania różniczkowe cząstkowe [**LSV16, LV.H1**].

Zamiast korzystać ze standardowego podejścia, pokazałem, że struktury k-symplektyczne i ich pokrewne struktury i techniki są przydatne w analizie równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. W szczególności, uogólnienia algebr Poissona funkcji z geometrii symplektycznej pojawiają się i dają początek dla metod prostego obliczenia zasad składań rozwiązań. Dodatkowo znalazłem wiele układów Liego posiadających algebry Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury k-symplektycznej i zastosowałem w nich moje techniki. Opiszmy teraz bardziej szczegółowo moje odkrycia dotyczące układów Liego i struktur k-symplektycznych.

Rozpatrzmy znowu równanie Schwarza (3.1) za pomocą układu (3.2) na $\mathcal{O}_2$. Udowodnijmy teraz, że V^{3KS} generowana przez pola wektorowe (3.3) składa się z pól wektorowych Hamiltonowskich ze względu na struktury presymplektyczne rozmaitości 2-symplektycznej $(\mathcal{O}_2, \omega_1, \omega_2)$. Aby tak zrobić, szukamy dwu-form presymplektycznych ω takich, że Y_1, Y_2 i Y_3 są polami Hamiltonowskimi względem nich, tj. $\mathcal{L}_{Y_\alpha}\omega = 0$ dla $\alpha = 1, 2, 3$ i $\mathrm{d}\omega = 0$. Rozwiązując poprzedni układ równań różniczkowych dla ω, znajdziemy formy presymplektyczne

$$\omega_1 := \frac{\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}a}{v^3}, \qquad \omega_2 := -\frac{2}{v^3}(x\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}a + v\,\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}v). \tag{4.1}$$

Skoro $\ker \omega_1 = \langle \partial_x \rangle, \ker \omega_2 = \langle x\partial_x + v\partial_v + a\partial_a \rangle$ i $v \neq 0$ na $\mathcal{O}_2$, to ω_1 i ω_2 mają rząd dwa i $\ker \omega_1 \cap \ker \omega_2 = \{0\}$ na $\mathcal{O}_2$. Zatem, (ω_1, ω_2) tworzą strukturę dwu-symplektyczną.

Ciekawe, że Y_1, Y_2 i Y_3 są polami Hamiltonowskimi względem ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned} &\iota_{Y_1}\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{2}{v}\right), \qquad \iota_{Y_2}\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{a}{v^2}\right), \qquad \iota_{Y_3}\omega_1 = \mathrm{d}\left(\frac{a^2}{2v^3}\right), \\ &\iota_{Y_1}\omega_2 = -\mathrm{d}\left(\frac{4x}{v}\right), \quad \iota_{Y_2}\omega_2 = \mathrm{d}\left(2 - \frac{2ax}{v^2}\right), \quad \iota_{Y_3}\omega_2 = \mathrm{d}\left(\frac{2a}{v} - \frac{a^2x}{v^3}\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Chociaż układu (3.2) nie można zbadać za pomocą układów Liego-Hamiltona, struktury presymplektyczne pozwalają nam zbadać takie układy za pomocą podobnych technik rozwiniętych dla układów Liego-Hamiltona i Liego-Diraca [**CGL.H6, CGL.H8**]. Układ powyższy posiada algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem wszystkich form presymplektycznych poprzedniej struktury 2-symplektycznej. Pomimo tego, że już wiemy, że (3.1) można zbadać za pomocą układów Liego–Diraca, nowe podejście pozwala nam zbadać jednocześnie układ za pomocą wielu struktur presymplektycznych i oferuje nowe techniki z geometrii k-symplektycznej.

Tabela 5 podsumowuje wiele układów Liego posiadających algebry Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych k-Hamiltonowskich (popatrz [**LV.H1**] dla dalszych szczegółów). Tą tabelę można przedłużyć za pomocą innych układów, np. klas równań Riccatiego kwaternionowych. Takie przykłady sugerują podanie następującej definicji.

DEFINICJA 4.2. Niech $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ będzie strukturą k-symplektyczną na rozmaitości $n(k+1)$-wymiarowej. *Pole wektorowe k-Hamiltonowskie* względem k-symplektycznej $\omega_1, \ldots, \omega_k$ to pole wektorowe na N Hamiltonowskie ze względu na każdą strukturę presymplektyczną ω_i.

Równoważnie można powiedzieć, że X jest Ω–Hamiltonowskie względem formy polisymplektycznej Ω wtedy i tylko wtedy, gdy X jest k–Hamiltonowskie dla rozmatości k–symplektycznej stowarzyszonej z formą polisymplektyczną Ω. W dalszym ciągu, mówimy o polach *k–Hamiltonowskich* i/lub *Ω–Hamiltonowskich.* Oznaczamy przez $\mathrm{Ham}(\Omega)$, gdzie Ω jest formą polisymplektyczną stowarzyszoną z $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$, przestrzeń pól wektorowych Ω-Hamiltonowskich.

Ze względu na poprzednie komentarze, zdefiniujemy układy k-symplektyczne następująco.

DEFINICJA 4.3. ([**LV.H1**, Definicja 3.2]) Układ Lie X jest układem Liego *k–symplektycznym* jeżeli V^X jest skończenie wymiarową algebrą Liego pól wektorowych k-Hamiltonowskich ze względu na pewną strukturę k-symplektyczną $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$. Mówimy wtedy, że $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ jest *kompatybilną strukturą k-symplektyczną* układu Liego X.

Mówiąc inaczej, układ X na N jest układem k–symplektycznym wtedy i tylko wtedy, gdy posiada algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych k-Hamiltonowskich ze względu na pewną strukturę k-symplektyczną na N. Układy Liego-Hamiltona to szczególny przykład układu Liego k-symplektycznego. Natomiast, nie każdy układ k-symplektyczny jest układem Liego-Hamiltona, co wynika, na przykład, z mojego twierdzenia no-go dla układów Liego k-symplektycznych [**CGL.H6**, Twierdzenie 4.4] i równań Schwarza.

Każdy układ Liego k-symplektyczny można zrozumieć jako układ Liego–Diraca [**LV.H1**]. Właśnie, jeżeli X jest układem Liego k-symplektycznym względem struktury k-symplektycznej $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$, to V^X jest rodziną pól wektorowych Hamiltonowskich ze względu na każdą formę k-symplektyczną rodziny $\omega_1, \ldots, \omega_k$. Wówczas, V^X jest algebrą Liego składającą się z pól wektorowych Hamiltonowskich względem każdej struktury Diraca L^{ω_r} stowarzyszonej z formą presymplektyczną ω_r, gdzie $r = 1, \ldots, k$ [**CGL.H6, Co90**]. Kontynuując poprzednią notację mówimy, że (N, L^{ω_r}, X) jest układem Liego-Diraca. Nie każdy układ Liego-Diraca jest układem k-symplektycznym, np. układ Liego postaci $X \neq 0$ na $\mathbb{R}$ tworzy układ Liego-Diraca $(\mathbb{R}, T\mathbb{R}, X)$ ale X nie jest układem Liego k-symplektycznym. Natomiast, można zrozumieć układy k–symplektyczne jako układy Liego-Diraca na różne sposoby. To sugeruje, że trzeba znaleźć jakieś naturalne podejście do tych układów, które proponuję opisać przez struktury k-symplektyczne.

Ustalenie, czy układ Liego jest układem Liego k-symplektycznym wymaga rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych dla znalezienia kompatybilnej struktury k-symplektycznej. Trudno ustalić czy taki układ równań różniczkowych cząstkowych posiada wystarczające rozwiązania dla określenia kompatybilnej struktury k-symplektycznej. To uzasadnia poszukiwanie prostych metod gwarantujących, że układ Liego jest układem k-symplektycznym czy nie. Następnie opiszę moje Twierdzenie no-go dla k-symplektycznych struktur, które ustala warunki gwarantujące, że układ Liego nie jest układem Liego k-symplektycznym [**LV.H1**, Twierdzenie 4.4]. Główna idea polega na ustaleniu czy minimalna algebra Liego układu Liego podlegająca badaniu pozostawia niezmiennicze (w znaczeniu przedstawionym później) jądra form presymplektycznych każdej struktury k-symplektycznej kompatibilnej z układami Liego. Warunek ten jest łatwiejszy do weryfikacji od bezpośredniego udowodnienia, że nie istnieją k-symplektyczne struktury kompatybilne z minimalną algebrą Liego.

DEFINICJA 4.4. ([**LV.H1**, Definicja 4.1]) Dystrybucja $\mathcal{D}$ na N jest *stabilna* względem działania algebry Liego V pól wektorowych na N kiedy $[X,Y]\in\mathcal{D}$ dla każdego $Y\in\mathcal{D}$ i $X\in V$.

DEFINICJA 4.5. ([**LV.H1**, Definicja 4.2]) Niech V będzie algebrą Liego Vessiota-Guldberga na N. Mówi się, że V jest *s–prymitywna* kiedy nie ma dystrybucji $\mathcal{D}$ rzędu s niezmienniczej względem działania V. Algebra Vessiota-Guldberga V jest *nieparzysto-prymitywna* kiedy V jest s–prymitywna dla każdej nieparzystej wartości $s<\dim N$.

UWAGA 4.6. Warto podkreślić, że poprzednia definicja to uogólnienie pojęcia prymitywnej algebry Liego pól wektorowych na $\mathbb{R}^2$ używanej w [**GKO92**].

TWIERDZENIE 4.7. (Twierdzenie 'no-go' układów Liego k–symplektycznych [**LV.H1**, Twierdzenie 4.4]) *Jeżeli X jest układem Liego na nieparzysto-wymiarowej rozmaitości N i V^X jest nieparzysto-prymitywna, to X nie jest układem k-symplektycznym.*

Poprzednie twierdzenie zostało zastosowane w [**LV.H1**, Przykład 1] aby pokazać, że pewne układy Liego nie są układami Liego k-symplektycznymi. Na przykład, rozpatrzmy układ Liego

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=X^G(t,g):=\sum_{\alpha=1}^{r}b_\alpha^R(t)X_\alpha^R(g)+\sum_{\alpha=1}^{r}b_\alpha^L(t)X_\alpha^L(g),\qquad g\in G,\tag{4.3}$$

gdzie G jest grupą Liego, $X_1^R,\dots,X_r^R$ i $X_1^L,\dots,X_r^L$ tworzą bazę prawo- i lewo-niezmienniczą pól wektorowych na G odpowiednio, i $b_1^L(t),\dots,b_r^L(t),b_1^R(t),\dots,b_r^R(t)$ są dowolnymi funkcjami zależnymi od t. Dodatkowo, załóżmy, że G jest spójna. Układy typu (4.3) pojawiają się kiedy szukamy transformacji odwzorując układ Liego w nowy układ Liego, np. podczas procesu redukcji [**CL.PH14**]. Dodatkowo, każdy układ Liego na dowolnej rozmaitości można rozwiązać za pomocą jednego rozwiązania układu (4.3) dla którego pojawiają się tylko prawo- albo lewo-niezmiennicze pola wektorowe. Ponadto, takie układy pojawiają się w teorii sterowania i w układach całkowalnych Darbouxa [**CCR03, IV**]. Udowodniłem w [**LV.H1**], że układ Liego (4.3) posiada nieparzysto-prymitywną algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych kiedy $\dim G$ jest nieparzysta i algebra Liego G jest prosta. Na mocy Twierdzenia 4.7, taki układ nie jest układem Liego k-symplektycznym.

4.1. Funkcje Ω–Hamiltonowskie. Każde pole wektorowe k–Hamiltonowskie można stowarzyszyć z rodziną $h_1,\dots,h_k$ funkcji Hamiltonowskich (każdą względem innej różnej struktury presymplektycznej struktury k-symplektycznej). Zaiste, warto wprowadzić jakieś uogólnienie funkcji Hamiltonowskich dla form presymplektycznych, aby zbadać jednocześnie wszystkie funkcje $h_1,\dots,h_k$. Podsumujmy najważniejsze właściwości uogólnienia, które zaproponowałem w [**LV.H1**]. Moje odkrycia rozszerzą do struktur k-symplektycznych kilka twierdzeń znalezionych przez Awane w [**Aw92**] dla pewnego konkretnego rodzaju struktur k–symplektycznych.

DEFINICJA 4.8. ([**LV.H1**, Definicja 5.1]) Niech $\Omega := \sum_{i=1}^{k} \omega_i \otimes e^i$ będzie formą polisymplektyczną na N. Mówi się, że $h := \sum_{i=1}^{k} h_i \otimes e^i$ jest funkcją Ω–*Hamiltonowską* jeśli istnieje pole wektorowe X_h na N takie, że $\iota_{X_h}\omega_i = dh_i$ dla $i = 1, \ldots, k$. W takim przypadku mówi się, że h to Ω–*funkcja Hamiltonowska* dla X_h. Oznaczamy przez $C^\infty(\Omega)$ przetrzeń funkcji Ω–Hamiltonowskich.

PRZYKŁAD 4.9. (([**LV.H1**, Sekcja 7])) Na mocy (4.2), pola wektorowe $Y_1 = 4u^2\partial/\partial u + 4uv\partial/\partial v + v^2\partial/\partial w$, $Y_2 = \partial/\partial u$ i $Y_3 = 2u\partial/\partial u + v\partial/\partial v$ w (3.3) mają funkcje Ω–Hamiltonowskie

$$f := \tfrac{2}{v} \otimes e^1 - \tfrac{4x}{v} \otimes e^2$$

$$g := \tfrac{a}{v^2} \otimes e^1 + \left(2 - \tfrac{2ax}{v^2}\right) \otimes e^2, \qquad h := \tfrac{a^2}{2v^3} \otimes e^1 + \left(\tfrac{2a}{v} - \tfrac{a^2x}{v^3}\right) \otimes e^2,$$

względem struktury polisymplektycznej $\Omega := \omega_1 \otimes e^1 + \omega_2 \otimes e^2$ stowarzyszonej z dwu-formą symplektyczną (ω_1, ω_1) zbudowaną za pomocą form presymplektycznych (4.1).

STWIERDZENIE 4.10. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 5.2]*) Jeżeli $\Omega := \sum_{i=1}^{k} \omega_i \otimes e^i$ jest strukturą polisymplektyczną, to każde pole wektorowe Ω–Hamiltonowskie jest stowarzyszone co najmniej z jedną funkcją Ω–Hamiltonowską. Odwrotnie, każda funkcja Ω–Hamiltonowska indukuje tylko jedno pole wektorowe Ω–Hamiltonowskie.*

STWIERDZENIE 4.11. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 5.3]*) Zbiór $C^\infty(\Omega)$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami:*

$$h + g := \sum_{i=1}^{k} (h_i + g_i) \otimes e^i, \qquad \lambda \cdot h := \sum_{i=1}^{k} \lambda h_i \otimes e^i$$

gdzie $h = \sum_{i=1}^{k} h_i \otimes e^i$, $g = \sum_{i=1}^{k} g_i \otimes e^i \in C^\infty(\Omega)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

STWIERDZENIE 4.12. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 5.4]*) Przestrzeń $C^\infty(\Omega)$ jest algebrą Liego względem nawiasu Liego $\{\cdot,\cdot\}_\Omega : C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ postaci*

$$\{h_1 \otimes e^1 + \ldots + h_k \otimes e^k, h'_1 \otimes e^1 + \ldots + h'_k \otimes e^k\}_\Omega := \{h_1, h'_1\}_{\omega_1} \otimes e^1 + \ldots + \{h_k, h'_k\}_{\omega_k} \otimes e^k, \tag{4.4}$$

gdzie $\{\cdot,\cdot\}_{\omega_i}$ jest nawiasem Poissona indukowanym przez formę symplektyczną ω_i, z $i = 1, \ldots, k$.

Zazwyczaj przestrzeń $C^\infty(\Omega)$ z poprzednim nawiasem nie jest algebrą Poissona. Jeżeli $h := \sum_{i=1}^{k} h_i \otimes e^i$ i $g := \sum_{i=1}^{k} g_i \otimes e^i \in C^\infty(\Omega)$, to funkcja

$$h \cdot g := (h_1 g_1) \otimes e^1 + \ldots + (h_k g_k) \otimes e^k \tag{4.5}$$

nie jest $C^\infty(\Omega)$–funkcją [**LV.H1**]. Skoro $(C^\infty(\Omega), \cdot, \{\cdot,\cdot\}_\Omega)$ nie jest ogólnie algebrą Poissona, nie można także zagwarantować, że $\{\cdot, h\}_\Omega : g \in C^\infty(\Omega) \mapsto \{g, h\}_\Omega \in C^\infty(\Omega)$, gdzie $h \in C^\infty(\Omega)$, jest różniczkowaniem względem iloczynu (4.5) funkcji Ω–Hamiltonowskich. To pokazuje, że geometria k-symplektyczna różni się od geometrii Poissona i presymplektyczynej, gdzie poprzednie zbadane właściwości są prawdą. Pomimo tego, możemy zagwarantować, że $\{h, g\}_\Omega = 0$ dla każdej lokalnie stałej funkcji g i, dodatkowo, możemy jeszcze udowodnić inne właściwości tej algebry Liego. Na przykład, można pokazać następujące wyniki.

STWIERDZENIE 4.13. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 5.5]*) Niech (N, Ω) będzie rozmaitością polisymplektyczną. Każde pole wektorowe Ω–Hamiltonowskie X działa jako rożniczkowanie na algebrze Liego $(C^\infty(\Omega), \{\cdot,\cdot\}_\Omega)$ postaci*

$$Xf := \{f, h\}_\Omega, \qquad \forall f \in C^\infty(\Omega),$$

gdzie h jest funkcją Ω–Hamiltonowską X.

TWIERDZENIE 4.14. *(*[**LV.H1**, Twierdzenie 5.6]*) Niech $\Omega := \sum_{i=1}^{k} \omega_i \otimes e^i$ będzie formą polisymplektyczną na N. Możemy zdefiniować dokładny ciąg algebr Liego:*

$$0 \hookrightarrow \overbrace{\mathrm{H}^0_{\mathrm{dH}}(N) \oplus \ldots \oplus \mathrm{H}^0_{\mathrm{dH}}(N)}^{k} \hookrightarrow C^\infty(\Omega) \xrightarrow{B_\Omega} \mathrm{Ham}(\Omega) \to 0, \tag{4.6}$$

gdzie $B_\Omega(f) := -X_f$ jest polem wektorowym Ω–Hamiltonowskim stowarzyszonym z f i $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dH}}(N)$ to pierwsza grupa kohomologii de Rhama na rozmaitości N.

4.2. Indukowane algebry Poissona. Niech $(N, \omega_1, \ldots, \omega_k)$ będzie rozmaitością k-symplektyczną. Za pomocą wymienionej struktury k-symplektycznej skonstruowałem różne algebry Poissona na pewnych podzbiorach $C^\infty(N)$, tzw. *indukowane algebry Poissona.* Ta konstrukcja okazała się bardzo ważna w badaniu geometrycznych właściwości zasad składań rozwiązań dla układów k-symplektycznych i jest kluczowym narzędziem w badaniu równań różniczkowych zwyczajnych, które przed moimi badaniami nie zostały dokładnie zbadane.

Struktura k-symplektyczna $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$, baza $e^1, \ldots, e^k$ przetrzeni $\mathbb{R}^k$ i inne elementy $\theta \in (\mathbb{R}^k)^*$ pozwalają zdefiniować formę polisymplektyczną $\Omega = \sum_{i=1}^k \omega_i \otimes e^i$. Zwężenie $\Omega_\theta := \langle \Omega, \theta \rangle = \sum_{i=1}^k \theta(e^i)\omega_i$ jest formą presymplektyczną na N. Niech $\mathrm{Adm}(\Omega_\theta)$ będzie zbiorem funkcji dozwolonych względem (N, Ω_θ) i niech X_f będzie polem wektorowym Hamiltonowskim funkcji f względem formy presymplektycznej. Jeżeli f jest funkcją k–Hamiltonowską, to X_f jest polem wektorowym k-Hamiltonowskim stowarzyszonym z funkcją f.

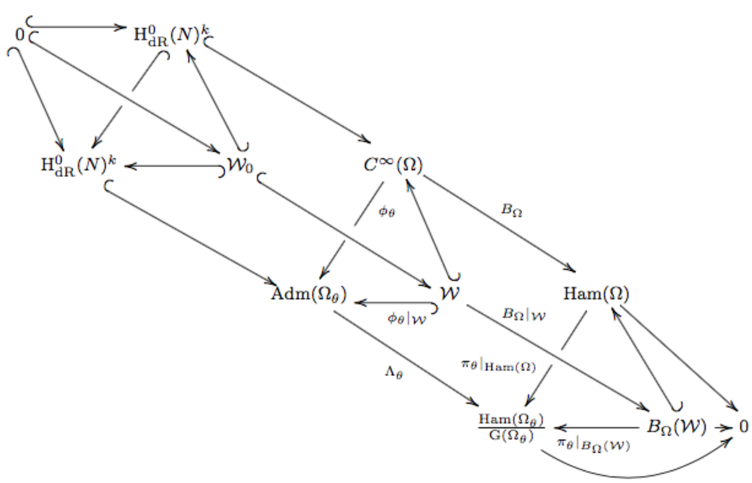
STWIERDZENIE 4.15. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 6.1]*) Niech $\Omega := \sum_{i=1}^k \omega_i \otimes e^i$ będzie strukturą polisymplektyczną i $\theta \in (\mathbb{R}^k)^*$. Każda funkcja Ω–Hamiltonowska h daje początek funkcji dozwolonej $h_\theta := \langle h, \theta \rangle$ względem (N, Ω_θ).*

STWIERDZENIE 4.16. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 6.2]*) Niech $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ będzie strukturą k-symplektyczną i niech $\{e^1, \ldots, e^k\}$ będzie bazą $\mathbb{R}^k$. Ta struktura k-symplektyczna daje początek formie k-polisymplektycznej postaci $\Omega := \sum_{i=1}^k \omega_i \otimes e^i$ i rodzinie algebr Poissona $(\mathrm{Adm}(\Omega_\theta), \cdot, \{\cdot,\cdot\}_\theta)$, gdzie $\{\cdot,\cdot\}_\theta$ jest nawiasem Poissona indukowanym przez formę presymplektyczną Ω_θ, gdzie $\theta \in (\mathbb{R}^k)^*$, na przestrzeni dozwolonych funkcji względem Ω_θ.*

STWIERDZENIE 4.17. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 6.3]*) Niech $\Omega = \sum_{i=1}^k \omega_i \otimes e^i$ będzie formą polisymplektyczną. Każde pole wektorowe Ω–Hamiltonowskie X_h jest różniczkowaniem na każdej algebrze $(\mathrm{Adm}(\Omega_\theta), \{\cdot,\cdot\}_\theta)$, gdzie $\theta \in (\mathbb{R}^k)^*$, postaci $X_h f = \{f, h_\theta\}_\theta$, $\forall f \in \mathrm{Adm}(\Omega_\theta)$. Dodatkowo,*

$$\begin{array}{rccc} \phi_\theta & : (C^\infty(\Omega), \{\cdot,\cdot\}_\Omega) & \to & (\mathrm{Adm}(\Omega_\theta), \{\cdot,\cdot\}_\theta) \\ & h & \mapsto & h_\theta = \langle h, \theta \rangle \end{array}$$

jest izomorfizmem algebr Liego. Wówczas, każda algebra Liego skończonego wymiaru $(\mathcal{W} \subset C^\infty(\Omega), \{\cdot,\cdot\}_\Omega)$ jest rozszerzeniem algebry Liego $(\phi_\theta(\mathcal{W}), \{\cdot,\cdot\}_\theta)$.[1]



W końcu, obok otrzymamy przemienny diagram, gdzie $\mathcal{W}_0 := \mathrm{H}^0(N)^k \cap \mathcal{W}$, zbiór $\mathrm{G}(\Omega_\theta)$ to przestrzeń pól wektorowych cechowania, tj. $\mathrm{G}(\Omega_\theta) = \ker \Omega_\theta$, odwzorowanie $\pi_\theta : X \in \mathrm{Ham}(\Omega_\theta) \mapsto [X] \in \mathrm{Ham}(\Omega_\theta)/G(\Omega_\theta)$ jest odwzorowaniem ilorazowym i $\Lambda_\theta : \mathrm{Adm}(\Omega_\theta) \to \mathrm{Ham}(\Omega_\theta)/G(\Omega_\theta)$ jest morfizmem algebr Liego przekształcającym każdą $f \in \mathrm{Adm}(\Omega_\theta)$ w klasę $[-X_f]$.

[1] Diagram można znaleźć w [**LV.H1**] i podsumowuje różne struktury, które znalazłem podczas badania układów Liego k-symplektycznych. Strzałki postaci $A \hookrightarrow B$ oznaczają włożenie przestrzeni A w B

TABELA 5. Układy Liego posiadające algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem formy k-symplektycznej (patrz [**LV.H1**]). Dla uproszczenia, oznaczamy $\omega_{ij} := dx_i \wedge dx_j$, $\partial_{x_i} = \partial_i$.

Zastosowanie	Baza pól wektorowych X_i	Funkcje Ω-Hamiltonowskie h_i	struktura k-symplektyczna ω_i
Zasada składań rozwiązań	$\sum_{i=1}^4 \partial_i$	$\left(\frac{1}{x_1-x_2}+\frac{1}{x_3-x_4}\right)\otimes e_1+\left(\sum_{i<j=1}^4 \frac{1}{x_i-x_j}\right)\otimes e_2$	$\frac{\omega_{12}}{(x_1-x_2)^2}+\frac{\omega_{34}}{(x_3-x_4)^2}$
dla równań Riccatiego	$\sum_{i=1}^4 x_i\partial_i$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}+\frac{x_3+x_4}{x_3-x_4}\right)\otimes e_1+\frac{1}{2}\left(\sum_{i<j=1}^4 \frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right)\otimes e_2$	$\sum_{i<j=1}^4 \frac{\omega_{ij}}{(x_i-x_j)^2}$
$\sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha(t)X_\alpha$	$\sum_{i=1}^4 x_i^2\partial_i$	$\left(\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}+\frac{x_3x_4}{x_3-x_4}\right)\otimes e_1+\left(\sum_{i<j=1}^4 \frac{x_ix_j}{x_i-x_j}\right)\otimes e_2$	
Układy sterowania	∂_1,	$x_2\otimes e_1+x_3\otimes e_2+x_4\otimes e_3+\frac{1}{3}x_2^3\otimes e_4$	ω_{12}
$\sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(t)X_\alpha$	$\partial_2+x_1(\partial_3+x_1\partial_4+2x_2\partial_5)$	$-x_1\otimes e_1-\frac{1}{2}x_1^2\otimes e_2-\frac{1}{3}x_1^3\otimes e_3+(x_5-x_1x_2^2)\otimes e_4.$	ω_{13}
	$\partial_3+2x_1\partial_4+2x_2\partial_5$	$x_1\otimes e_2-x_1^2\otimes e_3-x_2^2\otimes e_4$	ω_{14}
	∂_4	$-x_1\otimes e_3$	$\omega_{25}+x_2^2\,\omega_{12}$
	∂_5	$-x_2\otimes e_4$	
Układy sterowania	$\partial_1-x_2\partial_3+x_2^2\partial_5$,	$x_2\otimes e_1-\frac{1}{3}x_2^3\otimes e_2+x_4\otimes e_3+(x_1x_2+x_3)\otimes e_4$	ω_{12}
$\sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(t)X_\alpha$	∂_{x_4}	$x_1\otimes e_1+x_5\otimes e_2-\frac{1}{3}x_1^3\otimes e_3-x_1^2\otimes e_4$	ω_{25}
	∂_5	$\frac{1}{2}x_2^2\otimes e_2-\frac{1}{2}x_1^2\otimes e_3-x_1\otimes e_4$	ω_{13}
	$\partial_2+x_1\partial_3+x_1^2\partial_{x_4}$	$-x_1\otimes e_3$	$\omega_{13}+x_1\omega_{12}$
	$\partial_3+x_1\partial_{x_4}-x_2\partial_5$	$-x_2\otimes e_2$	
Równania dyfuzji	$4x_1^2\partial_1+4x_1x_2\partial_2+x_2^2\partial_3$,	$(4x_1x_3-8\frac{x_1^2x_3^2}{x_2^2}-\frac{x_2^2}{2})\otimes e_1+(x_1-4\frac{x_1^2x_3}{x_2^2})\otimes e_2$	$\frac{\omega_{23}}{x_2}+\frac{4x_3^2\omega_{12}}{x_2^3}-\frac{4x_3\omega_{13}}{x_2^2}$
$\sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha(t)X_\alpha$,	$2x_1\partial_1+x_2\partial_2$	$-2\frac{x_3^2}{x_2^2}\otimes e_1-4\frac{x_3}{x_2^2}\otimes e_2$	$-\frac{4\omega_{13}}{x_2^2}+\frac{8x_3\omega_{12}}{x_2^3}.$
	∂_1	$(x_3-4\frac{x_1x_3^2}{x_2^2})\otimes e_1-8\frac{x_1x_3}{x_2^2}\otimes e_2$	
Układy Lotka-Volterra $a(t)X_1+b(t)X_2$,	$\sum_{i=1}^5 x_i\partial_i$	$(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}+\frac{x_3+x_4}{x_3-x_4})\otimes e_1+(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}+\frac{x_3+x_5}{x_3-x_5})\otimes e_2$ $(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}+\frac{x_4+x_5}{x_4-x_5})\otimes e_3+(\frac{x_1+x_3}{x_1-x_3}+\frac{x_4+x_5}{x_4-x_5})\otimes e_4$	$\frac{\omega_{12}}{(x_1-x_2)^2}+\frac{\omega_{34}}{(x_3-x_4)^2}$ $\frac{\omega_{12}}{(x_1-x_2)^2}+\frac{\omega_{35}}{(x_3-x_5)^2}$
	$\sum_{i=1}^5 x_i^2\partial_i$	$\left(\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}+\frac{x_3x_4}{x_3-x_4}\right)\otimes e_1+\left(\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}+\frac{x_3x_5}{x_3-x_5}\right)\otimes e_2$ $\left(\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}+\frac{x_4x_5}{x_4-x_5}\right)\otimes e_3+\left(\frac{x_1x_3}{x_1-x_3}+\frac{x_4x_5}{x_4-x_5}\right)\otimes e_4$	$\frac{\omega_{12}}{(x_1-x_2)^2}+\frac{\omega_{45}}{(x_4-x_5)^2}$ $\frac{\omega_{13}}{(x_1-x_3)^2}+\frac{\omega_{45}}{(x_4-x_5)^2}$

4.3. Struktura k-symplektyczna Liego–Hamiltonowska. Każda struktura k-symplektyczna jest stowarzyszona z wieloma różnymi algebrami Liego funkcji, które grają istotną rolę w badaniu układu. Rozpatrzmy znowu równanie Schwarza pierwszego rzędu (3.2). Pola wektorowe Y_1, Y_2, Y_3 postaci (3.3) są Hamiltonowskie względem struktur presymplektycznych ω_1 and ω_2. Właśnie, na mocy (4.2) wynika, że pola wektorowe Y_1, Y_2, Y_3 mają funkcje Hamiltonowskie

$$h_1^1 = \frac{2}{v}, \qquad h_1^2 = \frac{a}{v^2}, \qquad h_1^3 = \frac{a^2}{2v^3}, \tag{4.7}$$

i

$$h_2^1 = -\frac{4x}{v}, \quad h_2^2 = 2 - \frac{2ax}{v^2}, \quad h_2^3 = \left(\frac{2a}{v} - \frac{a^2x}{v^3}\right), \tag{4.8}$$

względem form presymplektycznych ω_1 i ω_2 postaci (4.1), odpowiednio. Dodatkowo,

$$\left\{h_i^1, h_i^2\right\}_{\omega_i} = -h_i^1, \qquad \left\{h_i^1, h_i^3\right\}_{\omega_i} = -2h_i^2, \qquad \left\{h_i^2, h_i^3\right\}_{\omega_i} = -h_i^3, \qquad i = 1, 2.$$

Zatem, funkcje h_i^α, gdzie $\alpha = 1,2,3$ i dla ustalonego i, generują algebrę Liego skończonego wymiaru funkcji izomorficznej do $\mathfrak{sl}(2)$. To samo robią funkcje $h_1^\alpha + h_2^\alpha$, dla $\alpha = 1,2,3$, i w ogólności każda liniowa kombinacja $\mu_1 h_1^\alpha + \mu_2 h_2^\alpha$, dla ustalonego $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Rozpatrzmy przestrzeń $C^\infty(\Omega)$ funkcji Ω–Hamiltonowskich ze względu na strukturę dwu-symplektyczną (ω_1, ω_2). Na mocy (4.2) funkcje

$$h^\alpha := h_1^\alpha \otimes e^1 + h_2^\alpha \otimes e^2,$$

dla $\alpha = 1,2,3$, generują algebrę Liego skończonego wymiaru względem nawiasu Liego (4.4).

Zatem, każdy X_t^{3KS} jest polem wektorowym Ω–Hamiltonowskim dla funkcji Ω–Hamiltonowskiej

$$h_t^{3KS} = (h_1^3 + b_1(t)h_1^1) \otimes e^1 + (h_2^3 + b_1(t)h_2^1) \otimes e^2.$$

Skoro założyliśmy, że $b_1(t)$ nie jest stałą, przestrzeń $\mathrm{Lie}(\{h_t^{3KS}\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\cdot,\cdot\}_\Omega)$ jest algebrą Liego izomorficzną do $\mathfrak{sl}(2)$. Podobnie, każdy układ w Tabeli 5 można stowarzyszyć z funkcją Ω-Hamiltonowską zależną od t postaci $\sum_{\alpha=1}^k a_\alpha(t)h_\alpha$. To uzasadnia zdefiniowanie następujących pojęć i ilustruje istotność Twierdzenia 4.20, które łączy każdy układ Liego k-symplektyczny z funkcją Ω-Hamiltonowską zależną od t.

DEFINICJA 4.18. ([**LV.H1**, Definicja 7.1]) *Struktura k-symplektyczna Liego–Hamiltonowska* to trójka (N, Ω, h), gdzie (N, Ω) jest rozmaitością polisymplektyczną i h to t-parametryczna rodzina funkcji Ω–Hamiltonowskich $h_t: N \to \mathbb{R}^k$ takich, że $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\cdot,\cdot\}_\Omega)$ jest algebrą Liego skończonego wymiaru.

DEFINICJA 4.19. ([**LV.H1**, Definicja 7.2]) Mówi się, że *pole wektorowe X zależne od t posiada strukturę k-symplektyczną Liego-Hamiltonowską* (N, Ω, h) jeśli $B_\Omega(h_t) = -X_t$, dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

TWIERDZENIE 4.20. *(*[**LV.H1**, Twierdzenie 7.3]*) Układ X posiada strukturę k–symplektyczną Liego-Hamiltonowską wtedy i tylko wtedy, gdy X jest układem Liego k-symplektycznym.*

4.4. Ogólne właściwości układów k-symplektycznych. Omówmy teraz niektóre właściwości układów Liego k-symplektycznych, które opisałem w [**LV.H1**]. Dodatkowo, pokażę jak korzystać z indukowanych algebr Poissona, aby obliczyć stałe ruchu zależne od t dla układów Liego k-symplektycznych.

Podobnie jak dla każdego układu Liego, ogólne rozwiązanie $x(t)$ układu Liego k–symplektycznego na N można napisać w postaci $x(t) = \varphi(g(t), x_0)$, gdzie $x_0 \in N$ i $\varphi: G \times N \to N$ jest działaniem grupy Liego. Jeżeli G jest spójna, każda krzywa $\bar{g}(t)$ w G daje początek zamianie zmiennych zależnych od t przekształcającej układ Liego X przyjmujący wartości w algebrze Liego V^X w układ Liego Y, którego ogólne rozwiązanie ma postać $y(t) = \varphi(\bar{g}(t), x(t))$, przyjmujące wartości w tej samej algebrze Liego V^X [**CGL09, CRG**]. Jeżeli X jest układem Liego k–symplektycznym, to V^X składa się z pól wektorowych k–Hamiltonowskich względem struktury k–symplektycznej. Skoro pola wektorowe $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ należą także do V^X, to są one polami wektorowymi k-Hamiltonowskimi i Y jest układem Liego k–symplektycznym.

Każde szczególne rozwiązanie układu Liego X jest zawarte w orbicie S działania φ. Wówczas, można zdefniować obcięcie $X|_S$ układu X do każdej orbity S. Zatem, całkowanie każdego układu Liego X można zredukować do całkowania jego obcięć do każdej orbity φ, które są także układami Liego. Jeżeli X jest układem Liego k-symplektycznym, to interesującym będzie sprawdzenie czy $X|_S$ jest znowu układem Liego k-symplektycznym. To wymaga analizy podrozmaitości *l–symplektycznych* ($l \le k$) rozmaitości k–symplektycznej $(N, \omega_1, \dots, \omega_k)$, które zostały wymyślone przez S. Vilariño i M. de León w [**LV13**].

DEFINICJA 4.21. Niech $(N, \omega_1, \dots, \omega_k)$ będzie rozmaitością k-symplektyczną. Podrozmaitość $S \subset N$ jest *podrozmaitością l–symplektyczną* względem $(N, \omega_1, \dots, \omega_k)$, $(l \le k)$ jeżeli $\dim S = n_l(l+1)$ dla liczby całkowitej n_l i

$$(T_pS)^{\perp,l} \cap T_pS = \{0\}, \qquad \forall p \in S, \tag{4.9}$$

gdzie $(T_pS)^{\perp,l}$ jest l–th ortogonalnym dopełnieniem T_pS ze względu na strukturę k-symplektyczną $(N, \omega_1, \dots, \omega_k)$, tj. $T_pS^{\perp,l} := \{v \in T_pN : \omega_1(v,w) = \dots = \omega_l(v,w) = 0, \forall w \in T_pS\}$.

Warunek (4.9) jest równoważny warunkowi $\bigcap_{i=1}^l (T_pS)^{\perp_i} \cap T_pS = \{0\}, \forall p \in S$,gdzie $(T_pS)^{\perp_i}$ jest presymplektycznym anihilatorem T_pS, tj. $T_pS^{\perp_i} = \{v \in T_pN : \omega_i(v,w) = 0, \forall w \in T_pS\}$. Jeżeli podrozmaitość $S \subset M$ jest wyposażona w strukturę l–symplektyczną $(\iota^*\omega_1, \dots, \iota^*\omega_l)$ dla $l < k$, to dla każdego l' takiej, że $l \le l' \le k$ (powinien istnieć $n_{l'}$ taki, że $\dim S = n_{l'}(l'+1)$), $(\iota^*\omega_1, \dots, \iota^*\omega_{l'})$ jest strukturą l'–symplektyczną na S. W rezultacie otrzymujemy następujący wynik.

STWIERDZENIE 4.22. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 8.4]*) Niech $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ będzie k-symplektyczną strukturą na N i niech X będzie układem Liego k–symplektycznym względem tej struktury. Jeżeli S jest podrozmaitością l–symplektyczną taką, że $\mathcal{D}^X \subset TS$, to obcięcie X do S jest układem Liego l–symplektycznym.*

STWIERDZENIE 4.23. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 8.5]*) Niech X będzie k–symplektycznym układem Liego na N posiadającym strukturę k-symplektyczną Liego–Hamiltonowską (N, Ω, h). Dla każdego $\theta \in (\mathbb{R}^k)^*$, przestrzeń $\mathcal{I}^X_\theta$ stałych ruchu niezależnych od t i dozwolonych względem Ω_θ jest algebrą Poissona ze względu na nawias Poissona $\{\cdot,\cdot\}_\theta$ indukowany przez Ω_θ.*

STWIERDZENIE 4.24. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 8.6]*) Niech X będzie układem Liego k–symplektycznym na N posiadającym strukturę k-symplektyczną Liego–Hamiltonowską (N, Ω, h). Dla każdego $\theta \in (\mathbb{R}^k)^*$, funkcja $f : N \to \mathbb{R}$ jest stałą ruchu X dozwoloną względem Ω_θ wtedy i tylko wtedy, gdy f komutuje (względem nawiasu Poissona) z każdym elementem każdej algebry Liego $\phi_\theta(\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\cdot,\cdot\}_\Omega))$.*

Każdy układ autonomiczny Hamiltonowski jest układem Liego k–symplektycznym względem formy symplektycznej ω. Posiada też strukturę k-symplektyczną Liego–Hamiltonowską (N, Ω, h), gdzie h jest funkcją Hamiltonowską niezależną od t. Zatem, poprzednie stwierdzenie pokazuje, że całki pierwsze niezależne od t dla układu Hamiltonowskiego są tymi funkcjami komutującymi z h, co pozwala nam uzyskać dobrze znany wynik z mechaniki Hamiltonowskiej.

4.5. Diagonalna prolongacja układów Liego k-symplektycznych. Teraz przedstawię swoje wyniki dotyczące zasad składań rozwiązań dla układów Liego k-symplektycznych. Krótko mówiąc, struktura k-symplektyczna stowarzyszona z takimi układami pozwala nam obliczyć zasady składań rozwiązań o wiele łatwiej niż za pomocą struktur symplektycznych czy Diraca. Nasz podstawowy wynik jest następujący:

STWIERDZENIE 4.25. *(*[**LV.H1**, Stwierdzenie 9.1]*) Jeśli X jest układem Liego k–symplektycznym względem $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$, to $\widetilde{X}^{[m]}$ jest układem Liego k–symplektycznym ze względu na $(\omega_1^{[m]}, \ldots, \omega_k^{[m]})$.*

Zobrazujmy teraz poprzednie pojęcie za pomocą godnego uwagi przykładu, który znalazłem i zbadałem wspólnie z moimi współpracownikami w [**LV.H1**]. Rozpatrzmy znowu równanie Schwarza (3.1) jako układ równań różniczkowych pierwszego rzędu. W pracach [**CGL.H6, LS13**] obliczyłem z moimi współpracownikami zasadę składań rozwiązań dla tych równań rozwiązując układ równań cząstkowych chcąc znaleźć trzy całki ruchu niezależne od t i funkcjonalnie niezależne dla diagonalnych prolongacji (3.2) do $\mathcal{O}_2^{[2]}$. Aby pokazać ich zalety, obliczmy teraz te całki za pomocą struktur k-symplektycznych.

Równania Schwarza posiadają algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych k-symplektycznych względem struktury dwu-symplektycznej (ω_1, ω_2) na $\mathcal{O}_2$ przybierając postać (4.1). Stwierdzenie 4.25 zapewnia, że diagonalne przedłużenie do $\mathcal{O}_2^{[2]}$, tj. formy presymplektyczne

$$\omega_1^{[2]} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{d}v_{(i)} \wedge \mathrm{d}a_{(i)}}{v_{(i)}}, \qquad \omega_2^{[2]} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{2}{v_{(i)}^3}\left(x_{(i)}\mathrm{d}v_{(i)} \wedge \mathrm{d}a_{(i)} + v_{(i)}\mathrm{d}a_{(i)} \wedge \mathrm{d}x_{(i)} + a_{(i)}\mathrm{d}x_{(i)} \wedge \mathrm{d}v_{(i)}\right),$$

dają początek dla struktury dwu-symplektycznej na $\mathcal{O}_2^{[2]}$. Jądra mają postać

$$\ker \omega_1^{[2]} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_{(1)}}, \frac{\partial}{\partial x_{(2)}} \right\rangle, \qquad \ker \omega_2^{[2]} = \bigoplus_{i=1}^{2} \left\langle x_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_{(i)}} + v_{(i)} \frac{\partial}{\partial v_{(i)}} + a_{(i)} \frac{\partial}{\partial a_{(i)}} \right\rangle.$$

Oba jądra mają przecięcie równe zero.

Przypominamy, że jeżeli dana jest forma polisymplektyczna $\Omega := \sum_{i=1}^k \omega_i \otimes e^i$ na N, jej diagonalna prolongacja do N^m jest formą polisymplektyczną $\Omega^{[m]} = \sum_{i=1}^k \omega_i^{[m]} \otimes e^i$. Korzystając z (4.2) otrzymamy, że funkcje k–Hamiltonowskie dla diagonalnych prolongacji pól wektorowych (3.3) do $(\mathcal{O}_2)^2$ mają postać

$$h^{1,[2]} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{2}{v_{(i)}} \otimes e^1 - \frac{4x_{(i)}}{v_{(i)}} \otimes e^2 \right), \qquad h^{2,[2]} = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{a_{(i)}}{v_{(i)}^2} \otimes e^1 + \left(2 - \frac{2a_{(i)}x_{(i)}}{v_{(i)}^2} \right) \otimes e^2 \right]$$

i

$$h^{3,[2]} = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{a_{(i)}^2}{2v_{(i)}^3} \otimes e^1 + \left(\frac{2a_{(i)}}{v_{(i)}} - \frac{a_{(i)}^2 x_{(i)}}{v_{(i)}^3} \right) \otimes e^2 \right].$$

Wówczas

$$\left\{h^{1,[2]}, h^{2,[2]}\right\}_{\Omega^{[2]}} = h^{1,[2]}, \qquad \left\{h^{1,[2]}, h^{3,[2]}\right\}_{\Omega^{[2]}} = 2h^{2,[2]}, \qquad \left\{h^{2,[2]}, h^{3,[2]}\right\}_{\Omega^{[2]}} = h^{3,[2]}.$$

Z tego wynika, że te funkcje generują algebrę Liego izomorficzną do $\mathfrak{sl}(2)$. Następnie, korzystamy z indukowanych algebr Liego, aby znaleźć kilka stałych ruchu niezależnych od t tych układów.

Forma polisymplektyczna $\Omega^{[2]}$ pozwala nam zdefiniować kilka struktur presymplektycznych $\Omega_\xi^{[2]} := \langle \Omega^{[2]}, \xi \rangle$, dla dowolnego $\xi \in (\mathbb{R}^2)^*$. Na przykład, niech $\{\theta_1, \theta_2\}$ będzie bazą dualną dla $\{e^1, e^2\}$. Otrzymamy wtedy, że

$$\Omega_{\xi_1} := \langle \Omega^{[2]}, \theta_1 \rangle = \omega_1^{[2]}, \qquad \Omega_{\xi_2} := \langle \Omega^{[2]}, \theta_2 \rangle = \omega_2^{[2]}.$$

Na mocy Stwierdzenia 4.17, Hamiltonowskie funkcje $(h^{1,[2]})_\xi, (h^{2,[2]})_\xi, (h^{3,[2]})_\xi$, dla każdego $\xi \in (\mathbb{R}^2)^*$, rozpinają algebrę Liego $\mathfrak{W}$ taką, że $\mathfrak{sl}(2)$ jest rozszerzeniem tych algebr Liego. Skoro $\mathfrak{sl}(2)$ jest prosta, $\mathfrak{W}$ jest izomorficzna do $\mathfrak{sl}(2)$ lub zero.

Jeżeli $\mathfrak{W}$ jest izomorficzna do $\mathfrak{sl}(2)$, to udowodniłem w [**CGL.H6, BCHL.H7**], że $\{C_\xi, (h_i)_\xi\}_\xi = 0$, gdzie $i = 1, 2, 3$, nawias $\{\cdot,\cdot\}_\xi$ to nawias Poissona dozwolonych funkcji ze względu na $\Omega_\xi^{[2]}$ i

$$C_\xi = (h^{1,[2]})_\xi (h^{3,[2]})_\xi - (h^{2,[2]})_\xi^2.$$

Warto podkreślić, że C_ξ można obliczyć za pomocą elementu Casimira dla algebry Liego izomorficznej do $\mathfrak{sl}(2)$ i indukowanej przez $h^{1,[2]}, h^{2,[2]}, h^{3,[2]}$. Dodatkowo, C_ξ jest stałą ruchu niezależną od t dla diagonalnej prolongacji $\widetilde{X}_{3KS}^{[2]}$. Ogólniej, podobną procedurę można zastosować w innych algebrach Liego funkcji stowarzyszonych z układami Liego k-symplektycznymi. Pisząc $\xi := \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2$, gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, otrzymamy $C_\xi = \lambda_1^2 C_{\xi_1} + \lambda_2^2 C_{\xi_2} + \lambda_1\lambda_2 F_{\xi_1\xi_2}$, gdzie C_{ξ_1}, C_{ξ_2} i $F_{\xi_1\xi_2}$ są całkami ruchu postaci

$$C_{\xi_1} = (h^{1,[2]})_{\xi_1}(h^{3,[2]})_{\xi_1} - (h^{2,[2]})_{\xi_1}^2 = \frac{(a_2v_1 - a_1v_2)^2}{v_1^3 v_2^3},$$

$$C_{\xi_2} = (h^{1,[2]})_{\xi_2}(h^{3,[2]})_{\xi_2} - (h^{2,[2]})_{\xi_2}^2 = -4\left(-x_1x_2 + \frac{2v_1v_2(v_1x_2 - v_2x_1)}{a_1v_2 - v_1a_2}\right)\frac{(a_2v_1 - a_1v_2)^2}{v_1^3v_2^3} - 4^2,$$

$$F_{\xi_1\xi_2} = (h^{1,[2]})_{\xi_1}(h^{3,[2]})_{\xi_2} + (h^{3,[2]})_{\xi_1}(h^{1,[2]})_{\xi_2} - 2(h^{2,[2]})_{\xi_2}(h^{2,[2]})_{\xi_1}$$
$$= -\frac{2(a_2v_1 - v_2a_1)^2}{v_1^3v_2^3}\left(x_1 + x_2 - \frac{2v_1v_2(v_1 - v_2)}{a_1v_2 - v_1a_2}\right).$$

Skoro każda C_ξ jest stałą ruchu niezależną od t, to stałe ruchu $C_{\xi_2}, F_{\xi_1\xi_2}$ pozwalają nam zdefiniować nowe, prostsze stałe ruchu niezależne od t postaci

$$F_1 = x_1x_2 - \frac{2v_1v_2(v_1x_2 - v_2x_1)}{a_1v_2 - v_1a_2}, \qquad F_3 = x_1 + x_2 - \frac{2v_1v_2(v_1 - v_2)}{a_1v_2 - v_1a_2},$$
$$F_4 = \sqrt{F_3^2 - 4F_1 + \frac{16}{C_{\xi_1}}} = x_1 - x_2 - \frac{2v_1v_2(v_1 + v_2)}{a_1v_2 - v_1a_2}.$$

Stałe ruchu niezależne od t postaci C_{ξ_2}, F_3 i F_4 zostały wykorzystane w [**CGL.H6, LS13**], aby obliczyć zasadę składań rozwiązań dla równań Schwarza pierwszego rzędu. W tych pracach, C_{ξ_2}, F_3, F_4 zostały obliczone za pomocą różnych metod geometrycznych. W [**LS13**] te funkcje uzyskano za pomocą metody charakterystyki, co wymagało dużo nietrywialnych obliczeń. W [**CGL.H6**], techniki wymyślone dla układów Liego-Diraca pozwaliły nam uzyskać F_1 i C_{ξ_2}. Natomiast, F_4 została obliczona za pośrednictwem symetrii Liego naszego układu. C_{ξ_2}, F_3, F_4 pojawiają się jednocześnie ze struktury k-symplektycznej dla równań Schwarza. To kluczowy punkt dla przydatności tego podejścia do obliczenia zasad składań rozwiązań. Struktura k-symplektyczna dostarcza nam więcej technik, aby badać właściwości układów Liego k-symplektycznych niż układy Liego-Diraca. Moje techniki zostały wykorzystane w [**LTV.H4**] dla uzyskania zasad składań rozwiązań dla równań dyfuzji za pomocą układów Liego k-symplektycznych.

5. Układy Liego-Jacobiego

Zdefiniujmy teraz układy Liego-Jacobiego jako układy Liego posiadające algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury rozmaitości Jacobiego [**Ki76, IV, Li77**]. *Rozmaitość Jacobiego* to trójka (N, Λ, R), gdzie Λ to pole biwektorowe na N i R to pole wektorowe na N, tzw. *pole wektorowe Reeba*, spełniające $[\Lambda,\Lambda]_{SN} = 2R\wedge\Lambda$ i $[R,\Lambda]_{SN} = 0$. Pole wektorowe X na N jest *Hamiltonowskie* względem rozmaitości Jacobiego (N, Λ, R) jeżeli istnieje funkcja $f \in C^\infty(N)$ taka, że

$$X = [\Lambda, f]_{SN} + fR = \widehat{\Lambda}(df) + fR.$$

Zatem, f jest *funkcją Hamiltonowską* pola wektorowego X i napiszemy $X = X_f$. Mówi się, że f to *dobra funkcja Hamiltonowska* i X_f *to dobre pole wektorowe Hamiltonowskie* jeżeli f jest całką pierwszą pola wektorowego Reeba [**HL.H5**, Definicja 3.5].

Przestrzeń $\mathrm{Ham}(N,\Lambda,R)$ pól wektorowych Hamiltonowskich ze względu na (N,Λ,R) to algebra Liego względem standardowego nawiasu Liego pól wektorowych. Dodatkowo, rozmaitość Jacobiego pozwala nam zdefiniować nawias Liego na $C^\infty(N)$ postaci

$$\{f,g\}_{\Lambda,R} = \Lambda(\mathrm{d}f,\mathrm{d}g) + fRg - gRf.$$

Ten nawias Liego stanowi nawias Poissona jeżeli $R = 0$. Dodatkowo, morfizm $\phi_{\Lambda,R} : f \in C^\infty(N) \mapsto X_f \in \mathrm{Ham}(N,\Lambda,R)$ jest morfizmem algebr Liego. Warto podkreślić, że ten morfizm nie jest koniecznie injektywny.

Podobnie jak w poprzednich sekcjach doszedłem do wniosku, że warto wprowadzić następującą definicję.

DEFINICJA 5.1. ([**HL.H5**, Definicja 4.1]) *Układ Jacobiego–Liego* (N,Λ,R,X) składa się z rozmaitości Jacobiego (N,Λ,R) i układu Liego X spełniającego $V^X \subset \mathrm{Ham}(N,\Lambda,R)$.

PRZYKŁAD 5.2. ([**HL.H5**, Przykład 4.3]) Rozpatrzmy grupę Liego $\mathbb{G} := SL(2)$ macierz 2×2 o współczynnikach rzeczywistych $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ spełniających $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Blisko elementu neutralnego funkcje $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ tworzą lokalny układ współrzędnych $\mathbb{G}$. Pola wektorowe

$$X_1^R = \alpha\partial_\alpha + \beta\partial_\beta - \gamma\partial_\gamma, \qquad X_2^R = \gamma\partial_\alpha + \frac{1+\beta\gamma}{\alpha}\partial_\beta, \qquad X_3^R = \alpha\partial_\gamma$$

tworzą bazę pól wektorowych prawo-niezmienniczych na $\mathbb{G}$. Definiując

$$\Lambda_{\mathbb{G}} := \alpha\beta\partial_\alpha \wedge \partial_\beta - (1+\beta\gamma)\partial_\beta \wedge \partial_\gamma, \qquad R_{\mathbb{G}} := \alpha\partial_\alpha - \beta\partial_\beta + \gamma\partial_\gamma, \tag{5.1}$$

otrzymamy, że $[\Lambda_{\mathbb{G}},\Lambda_{\mathbb{G}}]_{SN} = -2\alpha\partial_\alpha \wedge \partial_\beta \wedge \partial_\gamma = 2R_{\mathbb{G}} \wedge \Lambda_{\mathbb{G}}$ i $[R_{\mathbb{G}},\Lambda_{\mathbb{G}}]_{SN} = 0$. Zatem $(\mathbb{G},\Lambda_{\mathbb{G}},R_{\mathbb{G}})$ jest rozmaitością Jacobiego. Rozpatrzmy teraz układ na $\mathbb{G}$ postaci $\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^3 b_i(t)X_i^R(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$, dla dowolnych funkcji $b_i(t)$ zależnych od t. Ponieważ $X^{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^3 b_i(t)X_i^R$ przyjmuje wartości w algebrze Liego $V^{\mathbb{G}} = \langle X_1^R, X_2^R, X_3^R\rangle$, układ $X^{\mathbb{G}}$ jest układem Liego. Układ $X^{\mathbb{G}}$ pojawia się w analizie równań Briosche–Darbouxa–Halphena, Kummera-Schwarza, Milnego–Pinneya, itp. [**CGL.H6, EHL.PH1, CL.PH12**].

Dodatkowo, $(\mathbb{G},\Lambda_{\mathbb{G}},R_{\mathbb{G}},X^{\mathbb{G}})$ jest układem Liego-Jacobiego. Rzeczywiście, X_1^R, X_2^R, X_3^R są polami wektorowymi Hamiltonowskimi względem $(\mathbb{G},\Lambda_{\mathbb{G}},R_{\mathbb{G}})$ z dobrymi funkcjami Hamiltonowskimi

$$h_1 = 1 + 2\beta\gamma, \qquad h_2 = \frac{\gamma}{\alpha}(1+\beta\gamma), \qquad h_3 = -\beta\alpha. \tag{5.2}$$

Takie funkcje są pierwszymi całkami X_1^R, X_2^R, X_3^R, odpowiednio, i $R_{\mathbb{G}}$. To pozwala nam skorzystać z $X_i^R + \mathrm{d}h_i$ z $i = 1,2,3$, i $R_{\mathbb{G}}$, aby zgenerować podwiązkę $L_{\mathbb{G}}$ w $T\mathbb{G} \oplus_{\mathbb{G}} T^*\mathbb{G}$ stanowiącą strukturę Diraca na $\mathbb{G}$ [**Co90**]. Pola wektorowe X_1^R, X_2^R, X_3^R są Hamiltonowskie względem $L_{\mathbb{G}}$ i dają początek dla układu Liego–Diraca $(\mathbb{G}, L_{\mathbb{G}}, X^{\mathbb{G}})$ [**CGL.H6**].

5.1. Struktury Jacobiego–Liego–Hamiltonowskie. Podobnie jak w przypadku układów Liego posiadających algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem innych struktur geometrycznych, układy Liego-Jacobiego można zbadać za pomocą funkcji Hamiltonowskich zależnych od t ze względu na rozmaitości Jacobiego.

DEFINICJA 5.3. ([**HL.H5**, Definicja 5.1]) *Struktura Jacobiego-Liego-Hamiltonowska* to czwórka (N,Λ,R,h), gdzie (N,Λ,R) to rozmaitość Jacobiego i $h : (t,x) \in \mathbb{R}\times N \mapsto h_t(x) \in N$ to funkcja zależna od t taka, że $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\cdot,\cdot\}_{\Lambda,R})$ jest skończenie wymiarowa. Niech dany będzie układ X na N. Mówimy, że X posiada *strukturę Jacobiego-Liego-Hamiltonowską* (N,Λ,R,h) jeżeli X_t jest polem wektorowym Hamiltonowskim z funkcją Hamiltonowską h_t (względem (N,Λ,R)) dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

PRZYKŁAD 5.4. ([**HL.H5**, Przykład 5.3]) Względem nawiasu Liego indukowanego przez $(G, \Lambda_{\mathbb{G}}, R_{\mathbb{G}})$ podanego w (5.1), funkcje (5.2) spełniają, że

$$\{h_1, h_2\}_{\Lambda_{\mathbb{G}},R_{\mathbb{G}}} = -2h_2, \qquad \{h_1, h_3\}_{\Lambda_{\mathbb{G}},R_{\mathbb{G}}} = 2h_3, \qquad \{h_2, h_3\}_{\Lambda_{\mathbb{G}},R_{\mathbb{G}}} = -h_1.$$

Zatem, $(\mathbb{G}, \Lambda_{\mathbb{G}}, R_{\mathbb{G}}, h := \sum_{i=1}^{3} b_i(t)h_i)$ jest strukturą Liego-Jacobiego-Hamiltonowską dla $X^{\mathbb{G}}$.

Analogicznie Twierdzenia 2.5, 3.3, 4.20 dla układów Jacobiego–Liego zostały opisane w [**HL.H5**] i wyglądają następująco.

TWIERDZENIE 5.5. *(*[**HL.H5**, Twierdzenie 5.4]*) Jeżeli (N, Λ, R, h) jest strukturą Liego-Jacobiego–Hamiltonowską, to układ X postaci $X_t := X_{h_t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, daje początek dla układu Liego-Jacobiego (N, Λ, R, X). Jeżeli X jest układem Liego i $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ są polami wektorowymi Hamiltonowskimi, to X posiada strukturę Liego-Jacobiego–Hamiltonowską.*

Struktury Liego-Jacobiego–Hamiltonowskie można zastosować w analizie układów Jacobiego–Liego.

STWIERDZENIE 5.6. *(*[**HL.H5**, Stwierdzenie 1]*) Niech (N, Λ, R, X) będzie układem Jacobiego–Liego posiadającym strukturę Jacobiego–Liego–Hamiltonowską (N, Λ, R, h) dobrych funkcji Hamiltonowskich $\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Wtedy, $f \in C^\infty(N)$ jest stałą ruchu niezależną od t dla X wtedy i tylko wtedy, gdy f komutuje ze wszystkimi elementami* $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\cdot,\cdot\}_{\Lambda,R})$ *względem $\{\cdot,\cdot\}_{\Lambda,R}$.*

PRZYKŁAD 5.7. ([**HL.H5**, Przykład 5.5]) Rozpatrzmy znowu funkcje h_1, h_2, h_3 opisane w (5.2) i rozmaitość Jacobiego $(\mathbb{G}, \Lambda_{\mathbb{G}}, R_{\mathbb{G}})$, gdzie $\Lambda_{\mathbb{G}}$ i $R_{\mathbb{G}}$ mają postać (5.1). Wtedy, $\{h_1^2 + 4h_2h_3, h_i\}_{\Lambda_{\mathbb{G}},R_{\mathbb{G}}} = 0$ dla $i = 1, 2, 3$. Zatem, $C = h_1^2 + 4h_2h_3$ jest stałą ruchu dla $X^{\mathbb{G}}$.

5.2. Układy Liego-Jacobiego na rozmaitościach nisko-wymiarowych. Ta część pracy stanowi podsumowanie moich wyników w zakresie klasyfikacji skończenie wymiarowych algebr Liego pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktur Jacobiego na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ znalezionej w [**HL.H5**]. Tabela 6 podsumowuje moją klasyfikację.

Udowodniłem w [**HL.H5**], że równania Riccatiego (1.2) prowadzą do układu Liego-Jacobiego $(\mathbb{R}, \Lambda = 0, R = \partial_{x_1})$.

Rzeczywiście, elementy bazy $X_1, X_2, X_3 \in V$ algebry Liego Vessiota-Guldberga dla (1.2) posiadają funkcje Hamiltonowskie $h_1 := 1, h_2 := x_1, h_3 := x_1^2$. Wówczas, $(\mathbb{R}, \Lambda = 0, R = \partial_{x_1}, a_0(t)X_1 + a_1(t)X_2 + a_2(t)X_3)$ to układ Liego-Jacobiego. Skoro każdy układ Liego na $\mathbb{R}$ można sprowadzić do tej postaci za pomocą lokalnego dyfeomorfizmu na $\mathbb{R}$ [**GKO92, Lie1880, LS**], każdy układ Liego na $\mathbb{R}$ można zrozumieć jako układ Liego-Jacobiego.

Sklasyfikujmy układy Liego-Jacobiego postaci $(\mathbb{R}^2, \Lambda, R, X)$, gdzie możemy założyć, że Λ i R są lokalnie równe albo różne od zera. Istnieje tylko jeden układ Liego-Jacobiego z $\Lambda = 0$ i $R = 0$: $(\mathbb{R}^2, \Lambda = 0, R = 0, X = 0)$.

Układy Liego-Jacobiego postaci $(\mathbb{R}^2, \Lambda \neq 0, R = 0)$ są układami Liego-Hamiltona, których algebry Vessiota–Guldberga zostały obliczone w [**BHL.H3**]. W Tabeli 4 oznaczamy takie przypadki literą P (*Poisson*). Układ Liego-Jacobiego $(\mathbb{R}^2, \Lambda = 0, R \neq 0, X)$ jest taki, że jeżeli $Y \in V^X$, to $Y = fR$ dla pewnego $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Przypadki tego typu można wprost obliczyć za pomocą danych podanych w Tabeli 6. Oznaczamy takie przypadki skrótem $(0, R)$ w ostatniej kolumnie.

Stwierdzenia 5.8 i 5.9 poniżej pokazują, że algebry Liego Vessiota-Guldberga w Tabeli 6, które nie podpadają pod wymienione kategorie nie są algebrami Liego Vessiota–Guldbega pól wektorowych Hamiltonowskich ze względu na żadną rozmaitość Jacobiego postaci $(\mathbb{R}^2, \Lambda \neq 0, R \neq 0)$. Wówczas, każdy układ Liego-Jacobiego $(\mathbb{R}^2, \Lambda, R, X)$ posiada algebrę Liego Vessiota-Guldberga należącą do jednej z klas danych w Tabeli 6[2].

[2]Aby wykluczyć P_1 z $\alpha \neq 0$ i I_{17}, trzeba zastosować ideę dowodu Stwierdzenia 5.9

TABELA 6. Algebry Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich na $\mathbb{R}^2$ względem rozmaitości Jacobiego (patrz [**HL.H5**]). P oznacza Poissona. Funkcje $1, \xi_1(x), \dots, \xi_r(x)$ są liniowo niezależne i $\eta_1(x), \dots, \eta_r(x)$ tworzą bazę rozwiązań dla $d^r f/dx^r = \sum_{\alpha=0}^{r-1} c_\alpha d^\alpha f/dx^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R}$.

#	Algebra Liego	Baza pól wektorowych X_i	Układ Liego-Jacobiego
P_1	$A_\alpha \simeq \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$	$\partial_x, \partial_y, \alpha(x\partial_x + y\partial_y) + y\partial_x - x\partial_y, \quad \alpha \geq 0$	$(\alpha = 0)$ P
P_2	$\mathfrak{sl}(2)$	$\partial_x, x\partial_x + y\partial_y, (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$	P
P_3	$\mathfrak{so}(3)$	$y\partial_x - x\partial_y, (1 + x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y,$ $2xy\partial_x + (1 + y^2 - x^2)\partial_y$	P
P_4	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y$	Nie
P_5	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x - y\partial_y, y\partial_x, x\partial_y$	P
P_6	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_x, x\partial_y, y\partial_y$	Nie
P_7	$\mathfrak{so}(3,1)$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y, (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y,$ $2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y$	Nie
P_8	$\mathfrak{sl}(3)$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y, xy\partial_x + y^2\partial_y$	Nie
I_1	$\mathbb{R}$	∂_x	P, $(0, \partial_x)$
I_2	$\mathfrak{h}_2$	$\partial_x, x\partial_x$	P, $(0, \partial_x)$
I_3	$\mathfrak{sl}(2)$ (type I)	$\partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x$	P, $(0, \partial_x)$
I_4	$\mathfrak{sl}(2)$ (type II)	$\partial_x + \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, x^2\partial_x + y^2\partial_y$	P
I_5	$\mathfrak{sl}(2)$ (type III)	$\partial_x, 2x\partial_x + y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y$	P
I_6	$\mathfrak{gl}(2)$ (type I)	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x^2\partial_x$	Nie
I_7	$\mathfrak{gl}(2)$ (type II)	$\partial_x, y\partial_y, x\partial_x, x^2\partial_x + xy\partial_y$	Nie
I_8	$B_\alpha \simeq \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \alpha y\partial_y, \quad 0 < \lvert\alpha\rvert \leq 1$	$(\alpha = -1)$ P
I_9	$\mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{h}_2$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y$	Nie
I_{10}	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{h}_2$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x$	Nie
I_{11}	$\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x, y^2\partial_y$	Nie
I_{12}	$\mathbb{R}^{r+1}$	$\partial_y, \xi_1(x)\partial_y, \dots, \xi_r(x)\partial_y$	P, $(0, \partial_y)$
I_{13}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\partial_y, y\partial_y, \xi_1(x)\partial_y, \dots, \xi_r(x)\partial_y$	P, $(0, \partial_y)$
I_{14}	$\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$	$\partial_x, \eta_1(x)\partial_y, \eta_2(x)\partial_y, \dots, \eta_r(x)\partial_y$	P
I_{15}	$\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^r$	$\partial_x, y\partial_y, \eta_1(x)\partial_y, \dots, \eta_r(x)\partial_y$	Nie
I_{16}	$C_\alpha^r \simeq \mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + \alpha y\partial y, x\partial_y, \dots, x^r\partial_y, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$(\alpha = -1)$ P
I_{17}	$\mathbb{R} \ltimes (\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r)$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + (ry + x^r)\partial_y, x\partial_y, \dots, x^{r-1}\partial_y$	Nie
I_{18}	$(\mathfrak{h}_2 \oplus \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_y, \dots, x^r\partial_y$	Nie
I_{19}	$\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_y, 2x\partial_x + ry\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \dots, x^r\partial_y$	Nie
I_{20}	$\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$	$\partial_x, \partial_y, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \dots, x^r\partial_y$	Nie

STWIERDZENIE 5.8. *(*[**HL.H5**, Stwierdzenie 2]*) Niech V będzie algebrą Liego Vessiota-Guldberga na $\mathbb{R}^2$ posiadającą $X_1, X_2 \in V\backslash\{0\}$ taką, że $[X_1, X_2] = X_1$ i $X_1 \wedge X_2 = 0$. Zatem V nie składa się z pól wektorowych Hamiltonowskich względem żadnej rozmaitości Jacobiego $(\mathbb{R}^2, \Lambda, R)$ dla $R \neq 0$ i $\Lambda \neq 0$.*

STWIERDZENIE 5.9. *(*[**HL.H5**, Stwierdzenie 3]*) Nie istnieje rozmaitość Jacobiego na $\mathbb{R}^2$ z $\Lambda \neq 0$ i $R \neq 0$ taka, że elementy algebry Liego dyfeomorficznej do $V := \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + \alpha y\partial_y \rangle$ z $\alpha \notin \{0, -1\}$ będą polami wektorowymi Hamiltonowskimi.*

6. Perspektywy dalszych badań

Moja rozprawa habilitacyjna posiada wiele możliwości rozwoju. Obecnie mam w trakcie recenzowania trzy prace rozbudowujące dalsze aspekty mojej rozprawy [**GL17, CCJL17, LHT17**]. Moja poprzednia doktorantka prowadzi dalej badanie zaproponowanych przeze mnie zastosowań układów Liego [**LS16**]. Kontynuując moje poprzednie badania pracuję teraz nad jeszcze ciekawszymi tematami. Dodatkowo moje badania obejmują teraz dużo szersze zainteresowania: bialgebry Liego, grupy kwantowe, dżety nieskończonego wymiaru, równania na superrozmaitości, równania stochastyczne, symetrie BRST i ich zastosowania w matematyce i fizyce.

Napisałem jeden artykuł, obecnie w trakcie recenzji [**CCJL17**], dotyczący zastosowań układów Liego-Hamiltona i Liego-Diraca w badaniu równań nieautonomicznych Schrödingera. Z tej pracy wynika, że układy kwantowe posiadają nieliniowe zasady składań rozwiązań zależnych mniej od rozwiązań szczególnych niż standardowych. Ta praca też dotyczy badania układów Liego posiadających algebry Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Kählera.

W drugiej pracy, również w trakcie recenzji [**GL17**] udowodniłem, że wszystkie równania hierachii Riccatiego, które bardzo często pojawiają się w układach całkowalnych, są układami Liego posiadającymi algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych konforemnych względem metryki Riemannowskiej. Oznacza to, że można skorzystać z metod Winternitza, aby znaleźć ich zasady składań rozwiązań.

Ostatnia praca, będąca obecnie recenzowana [**LHT17**], pokazuje jak obliczyć zasady składań rozwiązań dla układów Liego-Hamiltona posiadających algebry Vessiota-Guldberga pól wektorowych Killinga względem różnych metryk.

Obecnie rozwijam analog redukcji Marsdena–Weinsteina dla pewnych układów Liego posiadających algebrę Liego Vessiota-Guldberga pól wektorowych Hamiltonowskich względem struktury wielosymplektycznej. Dodatkowo, korzystam z bialgebr Liego i grup kwantowych, aby zbudować układy całkowalne, które można zinterpretować jako deformację kwantową układu Liego-Hamiltona. W szczególności, pracuję z moimi kolegami nad deformacją kwantową równań Milnego–Pinneya.

ROZDZIAŁ 2

Inne aktywności i osiągnięcia naukowe

1. Badania stanowiące kontynuację rozprawy doktorskiej

Na etapie podoktorskim również badałem podstawowe właściwości i zastosowania układów Liego bez kompatybilnych geometrycznych struktur. Dodatkowo, szukałem uogólnień układów Liego, które prowadziłyby do analizy nie tylko układów Liego. Następnie, przedstawiam listę artykułów opublikowanych po doktoracie dotyczących omówionych powyższej tematów.

GHL.PH1. P. Garcia-Estevez, F.J. Herranz, J. de Lucas i C. Sardón, Lie symmetries for Lie systems: Applications to systems of ODEs and PDEs, *Appl. Math. Comp.* **273**, 435–452 (2016). IF = 1.014 (2015), (Q1 - 56/312 w Mathematics), Cytowania = 1(0). Swój wkład oceniam na 15%.

LT.PH2. J. de Lucas, M. Tobolski i S. Vilariño, Geometry of Riccati equations over normed division algebras, *J. Math. Anal. Appl.* **440**, 394–414 (2016). IF = 1.014 (2015), (Q1 - 56/312 w Mathematics), Cytowania = 1(1). Swój wkład oceniam na 40%.

CL.PH3. J.F. Cariñena i J. de Lucas, Quasi–Lie families, schemes, invariants and their applications to Abel equations, *J. Math. Anal. Appl.* **430**, 648–671 (2015). IF = 1.014 (2015), (Q1 - 25/53 w Physics, Mathematical), Cytowania = 0. Swój wkład oceniam na 80%.

CL.PH4. J.F. Cariñena, J. de Lucas i P. Guha, A quasi-Lie schemes approach to the Gambier equation, *SIGMA* **9**, 026 (2013). IF = 1.299 (2013), (Q2 - 25/55 w Physics, Mathematical), Cytowania = 5(4). Swój wkład oceniam na 75%.

GL.PH5. J. Grabowski i J. de Lucas, Mixed superposition rules and the Riccati hierarchy, *J. Differential Equations* **254**, 179–198 (2013). IF =1.570 (2013), (Q1 - 13/302 w Mathematics), Cytowania = 6(2). Swój wkład oceniam na 70%.

CL.PH6. J.F. Cariñena, J. de Lucas i J. Grabowski, Superposition rules for higher-order systems and their applications, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 185202 (2012).IF = 1.766 (2012), (Q2 - 13/55 w Physics, Mathematical), Cytowania = 14(4). Swój wkład oceniam na 60%.

CL.PH7. J.F. Cariñena i J. de Lucas, Superposition rules and second-order Riccati equations, *J. Geom. Mech.* **3**, 1–22 (2011). IF = 0.812, (Q2 - 101/245 w Physics, Mathematical), Cytowania = 24(13). Swój wkład oceniam na 75%.

CL.PH8. J.F. Cariñena i J. de Lucas, Integrability of Lie systems through Riccati equations, J. Nonl. Math. Phys. **18**, 29–54 (2011). IF = 0.543 (2011), (Q4 - 47/55 w Physics, Mathematical), Cytowania = 5(3). Swój wkład oceniam na 70%.

CL.PH9. J.F. Cariñena, J. de Lucas i M.F. Rañada, A geometric approach to integrability of Abel differential equations, *Int. J. Theor. Phys.* **50**, 2114–2124 (2011). IF = 0.845 (2011), (Q3 - 48/84 w Physics, Multidisciplinary), Cytowania = 8(3). Swój wkład oceniam na 30%.

CGL.PH10. J.F. Cariñena, J. Grabowski i J. de Lucas, Lie families: theory and applications, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 305201 (2010). IF =1.641 (2010), (Q2 - 17/54 w Physics, Mathematical), Cytowania = 6(0). Swój wkład oceniam na 60%.

FL.PH11. R. Flores, J. de Lucas i Y. Vorobiev, Phase splitting for periodic Lie systems, J. Phys A. **43**, 205208 (2010). IF = 1.641 (2010), (Q2 - 17/54 w Physics, Mathematical), Cytowania = 7(1). Swój wkład oceniam na 20%.

CL.PH12. J.F. Cariñena i J. de Lucas, Lie systems: theory, generalizations, and applications, Diss Math. **479**, 1–169 (2011). IF = 0.214, (Q4 - 279/289 w Mathematics), Cytowania = 28(13). Swój wkład oceniam na 90%.

AC.PH13. F. Avram, J.F. Cariñena i J. de Lucas, A Lie systems approach for the first passage-time of piecewise deterministic processes, w: *Modern Trends of Controlled Stochastic Processes: Theory and Applications*, Luniver Press, 2010, pp. 144–160. Swój układ oceniam na 50%.

CL.PH14. J.F. Cariñena, J. de Lucas i M.F. Rañada, *Lie systems and integrability conditions for t-dependent frequency harmonics oscillators,* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **7**, 289–310 (2010). IF = 1.612, (Q2 - 18/47 w PHYSICS, Mathematical), Cytowania = 5(2) . Swój wkład oceniam na 60%.

2. Inne badania po uzyskaniu tytułu doktora

Badałem ogólne właściwości równań różniczkowych, np. nieskończenie wymiarowy formalizm dżetów, mnożniki Jacobiego, symetrie nie-lokalne, itp. Zastosowałem swoje wyniki w istotnych układach fizycznych, np. w oscylatorach nieharmonicznych [**CL.PH14**].

E1. J.F. Cariñena, J. de Lucas and M.F. Rañada, Jacobi multipliers, non-local symmetries, and nonlinear oscillators, *J. Math. Phys.* **56**, 063505 (2015). IF = 1.234 (2015), (Q2 - 25/53 w Physics, Mathematical), Cytowania = 1(1). Swój wkład oceniam na 80%.

E2. P.G. Estevez, M.L. Gandarias and J. de Lucas, Classical Lie symmetries and reductions of a nonisospectral Lax pair, J. Nonlinear Math. Phys. **18**, 51–60 (2011). Swój wkład oceniam na 30%.

3. Edytor ksiażek

Byłem edytorem książki:

Geometry of Jets and Fields - in honour of Professor Janusz Grabowski (eds. K. Grabowska, M. Jóźwikowski, J. De Lucas i M. Rotkiewicz), Banach Center Publications **18**, Vol. 110, Warszawa, 2016.

4. Nagrody i stypendia naukowe

- 2016 - Wyróżnienie w uznaniu osiągnięć wpływających na rozwój oraz prestiż Uniwersytetu Warszawskiego, Uniwersytet Warszawski.
- 2015 - Nagroda indywidualna trzeciego stopnia, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski.
- 2014 - Zwycięzca nagrody 'Nauczyciel Roku' na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (Samorząd Spraw Studenckich UW).
- 2013 - Nagroda dydaktyczna, Semestr Letni, Uniwersytet Warszawski.
- 2011 - Stanowiska badawcze dla młodych matematyków, IMPAN.
- 2011 - Nagroda 'Premio Especial de Doctorado de la Universidad de Zaragoza 2009/2010' za wyróżniającą rozprawę doktorską przyznana przez Uniwersytet w Saragossie, rok akademicki 2009/2010.
- 2010 - Stanowiska badawcze dla młodych matematyków, IMPAN.
- 2009 - Stanowiska badawcze dla młodych matematyków, IMPAN.

5. Inne aktywności naukowe

5.1. Długie pobyty naukowe.

- 6 sierpnia–6 września 2016 r.: Centre Recherches Mathématiques, CRM, Uniwersytet Montrealski, Kanada.
- 9 sierpnia–6 września 2015 r.: Centre Recherches Mathématiques, CRM, Uniwersytet Montrealski, Kanada.

- 28 sierpnia–29 września 2012 r.: Uniwersytet w Burgos, Burgos, Hiszpania.
- 1 października–31 grudnia 2011 r.: Uniwersytet w Saragossie, Saragossa, Hiszpania.

5.2. Krótkie pobyte naukowe (do 3 tygodni).

- École Normale Supérieure, Paris, Francja, luty 2017 r.
- Uniwersytet w Burgos, Burgos, Hiszpania, grudzień 2016 r.
- Uniwersytet w Saragossie, Saragossa, Hiszpania, czerwiec 2015 r.
- Politechnika Katalońska w Barcelonie, Barcelona, Hiszpania, grudzień 2015 r.
- Uniwersytet w Salamance, Salamanka, Hiszpania, maj 2012 r.
- Uniwersytet w Salamance, Salamanka, Hiszpania, wrzesień 2010 r.

5.3. Konferencje i seminaria.

(1) Wykład: *Control Lie systems and applications*, **Geometry of constraints and control**, IMPAN, Warszawa, Polska, 25–31 października 2009 r.
(2) Wykład: *Lie families: theory and applications*, **IV International Summer School on Control, Geometry and Mechanics**, Uniwersytet w Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Hiszpania, 5–9 lipca 2010 r.
(3) Plakat: *Lie systems: theory, generalizations, and applications.*, **IV International Summer School on Control, Geometry and Mechanics**, Uniwersytet w Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Hiszpania, 5–9 lipca 2010 r.
(4) Plakat: *Superposition rules and second-order Riccati equations*, **XIX International Fall Workshop on Geometry and Physics**, Uniwersytet w Porto, Porto, Portugalia, 6–9 września 2010 r.
(5) Wykład na zaproszenie: *Teoria y aplicaciones de los sistemas de Lie y los esquemas de quasi-Lie*, Faculty of Mathematics, Uniwersytet w Salamance, Salamanka, Hiszpania, 22 września, 2010 r.
(6) Wykład: *Geometric structures and superposition rules*, **Centennial congress of the Spanish Royal Mathematical Society R.S.M.E. 2011**, Ávila, Hiszpania, 1–5 lutego 2011 r.
(7) Wykład: *Lie–Hamilton systems: theory and applications*, **5th International Summer School on Geometry, Mechanics and Control**, La Cristalera, Miraflores de la Sierra, Hiszpania, 4–8 lipca 2011 r.
(8) Wykład na zaproszenie: *Lie–Hamilton systems*, **Congreso de la Sociedad Matematica Mexicana**, Uniwersytet w San Luís de Potosí, San Luís de Potosí, Meksyk, 9–14 października 2011 r.
(9) Wykład na zaproszenie: *Superposition rules and Lie systems*, Uniwersytet w Sonorze, Hermosillo, Meksyk, 16 października 2011 r.
(10) Wykład na zaproszenie: *Superposition rules and Lie systems*, Uniwersytet w Salamance, Salamanka, Hiszpania, 15 maja 2012 r.
(11) Wykład: *Mixed superposition rules: theory and some applications*, **XXI International Fall Workshop on Geometry and Physics**, Uniwersytet w Burgos, Burgos, Hiszpania, 30 sierpnia–1 września 2012 r.
(12) Wykład na zaproszenie: *Lie-Hamilton systems: theory and applications*, Wydział Fizyki, Uniwersytet w Burgos, Burgos, Hiszpania, 2 września 2012 r.
(13) Wykład na zaproszenie: *Mixed superposition rules: theory and applications*, Uniwersytet w Burgos, Burgos, Hiszpania, 16 października 2012 r.
(14) Wykład: *Dirac–Lie systems: theory and applications*, **Thematic day on Dirac Structures and Applications**, Uniwersytet w Saragossie, Saragossa, Hiszpania, 1 lutego 2013 r.

(15) Wykład: *Dirac–Lie systems: theory and applications*, **I Meeting on Lie systems: theory, generalisations, and applications**, IMPAN, Warszawa, 20–24 maja 2013 r.
(16) Wykład na zaproszenie: *Dirac–Lie systems: theory and applications*, **XXIII Meeting on Differential Equations and Applications**, Uniwersytet Jaume I, Castellon, Hiszpania, 9–13 września 2013 r.
(17) Wykład na zaproszenie: *Geometric structures and Lie systems: Theory and applications*, Uniwersytet w Burgos, Burgos, Hiszpania, 20 grudnia 2013 r.
(18) Wykład: *New trends on Lie systems*, **II Meeting on Lie systems: theory, generalisations, and applications**, IMPAN, Polska, 22–27 września 2014 r.
(19) Wykład na zaproszenie: *Układy Liego-Hamiltona: teoria i zastosowania*, Uniwersytet Łódzki, Łód ź, Polska, 24 maja 2015 r.
(20) Wykład: *Geometry and applications of Lie–Hamilton systems on the plane*, **III Meeting on Lie systems: theory, generalisations, and applications**, IMPAN, Warszawa, 21–26 września 2015 r.
(21) Wykład na zaproszenie: *k-symplectic Lie systems: theory and applications*, **III Young researchers conference of the RSME**, Uniwersytet w Murcji, Murcja, Hiszpania, 7–11 września 2015 r.
(22) Wykład: *A Lie systems approach to the Riccati hierarchy and PDEs*, **50th Sophus Lie Seminar**, Ośrodek badawczo-konferencyjny w Będlewie, Będlewo, Polska, 26 września–1 października 2016 r.
(23) Wykład na zaproszenie: *Applications of Lie systems to Bernoulli-type equations*, Uniwersytet w Burgos, Burgos, Hiszpania, 16 grudnia 2016 r.

6. Uczestnictwo w konferencjach, kursach, kongresach

(1) **School on Combinatorics and Control**, Benasque, Hiszpania, 11–17 kwietnia 2010 r.
(2) **XIII Winter Meeting on Geometry, Mechanics and Control Theory**, Saragossa, Hiszpania, 26–27 stycznia 2011 r.
(3) **XIII Thematic day on: Classic Field Theory**, Saragossa, Hiszpania, 28 stycznia 2011 r.
(4) **Geometry of Manifolds and Mathematical Physics**, Kraków, Polska, 27 czerwca–1 lipca 2011 r.
(5) **III Iberoamerican Meeting on Geometry, Mechanics and Control**, Salamanka, Hiszpania, 3–7 września 2012 r.
(6) **XV Winter meeting on Mechanics, Geometry and Control**, Saragossa, Hiszpania, 30–31 stycznia 2013 r.
(7) **8th Symposium on Integrable Systems**, Wydział Fizyki i Matematyki Zastosowaniej, Uniwersytet Łódzki, Łódź, Polska, 3–4 lipca 2015 r.
(8) **Quantum Spacetime '16**, Zakopane, Polska, 6–12 lutego 2016 r.
(9) **Geometry of Jets and Fields**, Ośrodek badawczo-konferencyjny w Będlewie, Będlewo, Polska, 10–16 maja 2016 r.

7. Organizacja konferencji

- **I Meeting on Lie systems: theory, generalisations, and applications**, IMPAN, Warszawa, Polska, 20–24 maja 2013 r.
- **II Meeting on Lie systems: theory, generalisations, and applications**, IMPAN, Warszawa, Polska, 22–27 września 2014 r.
- **III Meeting on Lie systems: theory, generalisations, and applications**, IMPAN, Warszawa, Polska, 21–26 września 2015 r.
- **Geometry of Fields and Jets**, Ośrodek badawczo-konferencyjny w Będlewie, Będlewo, Polska, 10–16 maja 2016 r.

- **50th Sophus Lie Seminar**, Ośrodek badawczo-konferencyjny w Będlewie, Będlewo, Polska, 26 września–1 października 2016 r.

8. Aktywność jako recenzent, członkowstwa, itp.

- Recenzent projektów dla Portuguese Foundation for Science and Technology.
- Recenzent dla J. Phys. A, Adv. Math. Phys., Rep. Math. Phys., J. Dyn. Contr. Systems, Annals of Physics, Proc. Royal Soc. A, Int. J. Geom. Methods Mod. Physics, Advances in Mathematical Physics, Symmetry, EPJP i inne.

9. Współpraca międzynarodowa

Współpracuję z naukowcami z Uniwersytetu w Saragossie i Burgos (Hiszpania), Centre de Recherches Mathématiques Uniwersytetu Montrealskiego (Kanada), Politechniki Katalońskiej (Hiszpania), IMPAN (Polska), ICMAT (Hiszpania), Universidad Complutense w Madrycie (Hiszpania), itd. Dodatkowo poprzednio współpracowałem z innymi naukowcami z S.N. Bose National Centre for Basic Sciences (India), Uniwersytetu w Hermosillo (Meksyk) i Uniwerstyt w Pau (Francja).

Brałem udział jako wykonawca w projekcie HARMONIA współpracy międzynarodowej pod tytułem: "*Lie systems: theory, generalizations and applications*'. W ramach tego projektu zorganizowałem razem z Prof. Januszem Grabowskim trzy konferencie w Warszawie w ramach współpracy między Polską i Hiszpanią.

10. Języki

- hiszpański: język ojczysty.
- angielski: poziom zaawansowany.
- polski: poziom zaawansowany.
- francuszki: poziom podstawowy.
- niemiecki: poziom podstawowy.
- rosyjski: poziom podstawowy.

Bibliografia

[FM] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.

[AHW81] R.L. Anderson, J. Harnad, and P. Winternitz. Group theoretical approach to superposition rules for systems of riccati equations. *Lett. Math. Phys.*, 5(2):143–148, 1981.

[AW] R.L. Anderson and P. Winternitz, A nonlinear superposition principle for Riccati equations of the conformal type. *Lect. Notes in Phys.*, 135:165–169, 1980.

[ADR12] R.M. Angelo, E.I. Duzzioni, and A.D. Ribeiro. Integrability in time-dependent systems with one degree of freedom. *J. Phys. A*, 45(5):055101, 16, 2012.

[CL.PH8] J.F. Cariñena and J. de Lucas, Integrability of Lie systems through Riccati equations. *J. Nonl. Math. Phys.*, 18: 29–54, 2011.

[AC.PH13] F. Avram, J.F. Cari nena, and J. de Lucas. A Lie systems approach for the first passage-time of piecewise deterministic processes. In *Modern Trends of Controlled Stochastic Processes: Theory and Applications*, pages 144–160. Luniver Press, 2010.

[Aw92] A. Awane. k-symplectic structures. *J. Math. Phys.*, 33(12):4046–4052, 1992.

[BBHL.H2] A. Ballesteros, A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas, and C. Sardón. Lie-Hamilton systems on the plane: properties, classification and applications. *J. Differential Equations*, 258(8):2873–2907, 2015.

[BCHL.H7] A. Ballesteros, J.F. Cariñena, F.J. Herranz, J. de Lucas, and C. Sardón. From constants of motion to superposition rules for Lie-Hamilton systems. *J. Phys. A*, 46(28):285203, 25, 2013.

[BR] A. Ballesteros and O. Ragnisco. A systematic construction of completely integrable Hamiltonians from coalgebras. *J. Phys. A*, 31(16):3791–3813, 1998.

[Be07] L.M. Berkovich. Method of factorization of ordinary differential operators and some of its applications. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 1(1):122–149, 2007.

[OT09] L.M. Berkovich. Schwarzian derivative. *Notices Amer. Math. Soc.*, 56:34–36, 2009.

[BHL.H3] A. Blasco, F.J. Herranz, J. de Lucas, and C. Sardón. Lie-Hamilton systems on the plane: applications and superposition rules. *J. Phys. A*, 48(34):345202, 35, 2015.

[CS16] R. Campoamor-Stursberg. Low dimensional Vessiot-Guldberg-Lie algebras of second-order ordinary differential equations. *Symmetry*, 8(3), 2016.

[CS16II] R. Campoamor-Stursberg. A functional realization of $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ providing minimal Vessiot–Guldberg–Lie algebras of nonlinear second-order ordinary differential equations as proper subalgebras. *J. Math. Phys.*, 57(6):063508, 2016.

[Ca97] J. Campos. Möbius transformations and periodic solutions of complex Riccati equations. *Bull. London Math. Soc.*, 29(2):205–215, 1997.

[CCJL17] J.F. Cariñena, J. Clemente-Gallardo, J.A. Jover-Galtier, and J. de Lucas. Lie systems and Schrödinger equations. arXiv:1612.00256.

[CCR03] J.F. Cariñena, J. Clemente-Gallardo, and A. Ramos. Motion on Lie groups and its applications in control theory. In *Proceedings of the XXXIV Symposium on Mathematical Physics (Toruń, 2002)*, volume 51, pages 159–170, 2003.

[CL.PH7] J.F. Cariñena and J. de Lucas. Superposition rules and second-order Riccati equations. *J. Geom. Mech.*, 3(1):1–22, 2011.

[CL.PH12] J.F. Cariñena. and J. de Lucas. Lie systems: theory, generalisations, and applications. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 479:162, 2011.

[CL.PH14] J.F. Cariñena, J. de Lucas i M.F. Rañada, Lie systems and integrability conditions for t-dependent frequency harmonics oscillators, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 7:289–310, 2010.

[E1] J.F. Cariñena, J. de Lucas, and M.F. Rañada. Jacobi multipliers, non-local symmetries, and nonlinear oscillators. *J. Math. Phys.*, 56(6):063505, 18, 2015.

[CGL.H8] J.F. Cariñena, J. de Lucas, and C. Sardón. Lie-Hamilton systems: theory and applications. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 10(9):1350047, 25, 2013.

[CLS.H9] J.F. Cariñena, J. de Lucas, and C. Sardón. A new Lie-systems approach to second-order Riccati equations. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 9(2):1260007, 8, 2012.

[CGL.PH3] J.F. Cariñena, J. Grabowski, and J. de Lucas. Quasi-Lie families, schemes, invariants and their applications to Abel equations *J. Math. Anal, Appl.*, 430:648–671, 2015.

[CGL09] J.F. Cariñena, J. Grabowski, and J. de Lucas. Quasi-Lie schemes: theory and applications. *J. Phys. A*, 42(33):335206, 20, 2009.

[CL.PH4] J.F. Carinẽna, J. de Lucas i P. Guha, A quasi-Lie schemes approach to the Gambier equation, SIGMA 9: 026, 2013.

[CGL.PH6] J.F. Cariñena, J. Grabowski, and J. de Lucas. Superposition rules for higher-order systems and their applications. *J. Phys. A*, 45(18):185202, 26, 2012.

[CGL.H6] J.F. Cariñena, J. Grabowski, J. de Lucas, and C. Sardón. Dirac-Lie systems and Schwarzian equations. *J. Differential Equations*, 257(7):2303–2340, 2014.

[CGM00] J.F. Cariñena, J. Grabowski, and G. Marmo. *Lie-Scheffers systems: a geometric approach*. Napoli Series on Physics and Astrophysics. Bibliopolis, Naples, 2000.

[CGM07] J.F. Cariñena, J. Grabowski, and G. Marmo. Superposition rules, Lie theorem, and partial differential equations. *Rep. Math. Phys.*, 60(2):237–258, 2007.

[CRG] J.F. Cariñena, J. Grabowski, and A. Ramos. Reduction of time-dependent systems admitting a superposition principle. *Acta Appl. Math.*, 66(1):67–87, 2001.

[CL99] J.F. Cariñena and C. López. Group theoretical perturbative treatment of nonlinear Hamiltonians on the dual of a Lie algebra. *Rep. Math. Phys.*, 43(1-2):43–51, 1999.

[CR03] J.F. Cariñena and A. Ramos. Applications of Lie systems in quantum mechanics and control theory. In *Classical and quantum integrability (Warsaw, 2001)*, volume 59 of *Banach Center Publ.*, pages 143–162. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003.

[CR05] J.F. Cariñena and A. Ramos. Lie systems and connections in fibre bundles: applications in quantum mechanics. In *Differential geometry and its applications*, pages 437–452. Matfyzpress, Prague, 2005.

[CP95] V. Chari and A. Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[CK13] S. Charzyński and M. Kuś. Wei-Norman equations for a unitary evolution. *J. Phys. A*, 46(26):265208, 14, 2013.

[Co90] T.J. Courant. Dirac manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 319(2):631–661, 1990.

[LMS88] M. de León, I. Méndez, and M. Salgado. Regular p-almost cotangent structures. *J. Korean Math. Soc.*, 25(2):273–287, 1988.

[LMS93] M. de León, I. Méndez, and M. Salgado. p-almost cotangent structures. *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, 7(1):97–107, 1993.

[LSV16] M. de León, M. Salgado, and S. Vilariño. *Methods of differential geometry in classical field theories*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

[LS16] M. de León and C. Sardón. A geometric Hamilton–Jacobi theory for a Nambu–Poisson structure. *arXiv:1604.08904*, 2016.

[LV13] M. de León and S. Vilariño. Lagrangian submanifolds in k-symplectic settings. *Monatsh. Math.*, 170(3-4):381–404, 2013.

[GL17] J. de Lucas and A.M. Grundland. A Lie systems approach to the Riccati hierarchy and partial differential equations. arXiv:1612.00256.

[LHT17] J. de Lucas, F.J. Herranz, and M. Tobolski, Lie Hamilton systems on curved spaces: A geometrical approach. arXiv:1612.08901.

[LS13] J. de Lucas and C. Sardón. On Lie systems and Kummer-Schwarz equations. *J. Math. Phys.*, 54(8):033505, 2013.

[LTV.H4] J. de Lucas, M. Tobolski, and S. Vilariño. A new application of k-symplectic Lie systems. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 12(7):1550071, 6, 2015.

[LT.PH2] J. de Lucas, M. Tobolski, and S. Vilariño. Geometry of Riccati equations over normed division algebras. *J. Math. Anal. Appl.*, 440(1):394–414, 2016.

[LV.H1] J. de Lucas and S. Vilariño. k-symplectic Lie systems: theory and applications. *J. Differential Equations*, 258(6):2221–2255, 2015.

[Eg07] M.A. Egorov. Some properties of the matrix Riccati equation. *Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint*, 147:20, 1990.

[E2] P.G. Estévez, M.L. Gandarias, and J. Lucas. Classical Lie symmetries and reductions of a nonisospectral Lax pair. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 18(suppl. 1):51–60, 2011.

[EHL.PH1] P.G. Estévez, F.J. Herranz, J. de Lucas, and C. Sardón. Lie symmetries for Lie systems: Applications to systems of ODEs and PDEs. *Appl. Math. Comput.*, 273:435–452, 2016.

[FMR10] M.U. Farooq, F.M. Mahomed, and M.A. Rashid. Integration of systems of ODEs via nonlocal symmetry-like operators. *Math. Comput. Appl.*, 15(4):585–600, 2010.

[GKO92] A. González-López, N. Kamran, and P.J. Olver. Lie algebras of vector fields in the real plane. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 64(2):339–368, 1992.

[GL.PH5] J. Grabowski and J. de Lucas. Mixed superposition rules and the Riccati hierarchy. *J. Differential Equations*, 254(1):179–198, 2013.

[GPS06] C. Grosche, G.S. Pogosyan, and A.N. Sissakian. Path integral discussion for Smorodinsky-Winternitz potentials. I. Two- and three-dimensional Euclidean space. *Fortschr. Phys.*, 43(6):453–521, 1995.

[GL16] A.M. Grundland and J. de Lucas. A Lie systems approach to the Riccati hierarchy and partial differential equations. *arXiv:1612.00256*, 2016.

[Gu87] C. Günther. The polysymplectic Hamiltonian formalism in field theory and calculus of variations. I. The local case. *J. Differential Geom.*, 25(1):23–53, 1987.

[HWA83] J. Harnad, R.L. Anderson, and P. Winternitz. Superposition principles for matrix Riccati equations. *J. Math. Phys.*, 24(2):1062–1072, 1983.

[HBS05] F.J. Herranz, A. Ballesteros, M. Santander, and T. Sanz-Gil. Maximally superintegrable Smorodinsky-Winternitz systems on the N-dimensional sphere and hyperbolic spaces. In *Superintegrability in classical and quantum systems*, volume 37 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 75–89. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[HL.H5] F.J. Herranz, J. de Lucas, and C. Sardón. Jacobi-Lie systems: fundamentals and low-dimensional classification. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, (Dynamical systems, differential equations and applications. 10th AIMS Conference. Suppl.):605–614, 2015.

[Ince] E.L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1944.

[Ki76] A.A. Kirillov. Local Lie algebras. *Uspehi Mat. Nauk*, 31(4(190)):57–76, 1976.

[LW96] S. Lafortune and P. Winternitz. Superposition formulas for pseudounitary matrix riccati equations. *J. Math. Phys.*, 37(2):1539–1550, 1996.

[LCO09] J.A. Lázaro-Camí and J.P. Ortega. Superposition rules and stochastic Lie-Scheffers systems. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(4):910–931, 2009.

[LA08] P.G.L. Leach and K. Andriopoulos. Superposition formulas for pseudounitary matrix riccati equations. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2:146–157, 2008.

[LM87] P. Libermann and C.M. Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics*, volume 35 of *Mathematics and its Applications*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[Li77] A. Lichnerowicz. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J. Differential Geometry*, 12(2):253–300, 1977.

[LS] S. Lie. *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit Geometrischen und anderen Anwendungen*. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.

[Lie1880] S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen I. *Math. Ann.*, 16(4):441–528, 1880.

[Lie1880III] S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen III. *Math. Ann.*, 16(4):441–528, 1893.

[Ma95] M. Maamache. Ermakov systems, exact solution, and geometrical angles and phases. *Phys. Rev. A*, 95:936, 1995.

[Ma08] C.M. Marle. Calculus on Lie algebroids, Lie groupoids and Poisson manifolds. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 457:57, 2008.

[NM13] J.C. Ndogmo and F.M. Mahomed. On certain properties of linear iterative equations. *Center European J. Math.*, 56:34–36, 2013.

[NR02] M. Nowakowski and H.C. Rosu. Newton's laws of motion in the form of a Riccati equation. *Phys. Rev. E (3)*, 65(4):047602, 4, 2002.

[Or12] R. Ortega. The complex periodic problem for a Riccati equation. *Ann. Univ. Buchar. Math. Ser.*, 3(LXI)(2):219–226, 2012.

[JP] J.P. Ortega and S.T. Ratiu. *Momentum maps and Hamiltonian reduction*, volume 222 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[Ra71] M. Rahman. On the integrability and application of the generalized Riccati equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 21:88–94, 1971.

[CS15] C. Sardón. Lie systems, Lie symmetries and reciprocal transformations. *Arxiv:1508.00726*, 2016.

[SW84] S. Shnider and P. Winternitz. Classification of systems of nonlinear ordinary differential equations with superposition principles. *J. Math. Phys.*, 25(11):3155–3165, 1984.

[SW84II] S. Shnider and P. Winternitz. Nonlinear equations with superposition principles and the theory of transitive primitive Lie algebras. *Lett. Math. Phys.*, 8(1):69–78, 1984.

[Sc12] D. Schuch. Complex Riccati equations as a link between different approaches for the description of dissipative and irreversible systems. *J. of Phys: Conf. Series*, 380:012009, 2012.

[IV] I. Vaisman. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, volume 118 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[Va84] V.S. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Graduate texts in Mathematics vol. 108. Springer, New York, 1984.

[PW] P. Winternitz. Lie groups and solutions of nonlinear differential equations. In *Nonlinear phenomena (Oaxtepec, 1982)*, volume 189 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 263–331. Springer, Berlin, 1983.

[WSUF67] P. Winternitz, Y.A. Smorodinski, M. Uhlíř, and I. Friš. Symmetry groups in classical and quantum mechanics. *Soviet J. Nuclear Phys.*, 4:444–450, 1967.