

# AUTOREFERAT

---

## 1. Imię i nazwisko

---

Marta Waclawczyk

---

## 2. Dyplomy i stopnie naukowe

---

- **Doktor nauk technicznych w zakresie mechaniki,**

Data: 21 czerwca 2007

Tytuł rozprawy: „Modelling of near-wall turbulence by means of Probability and Filtered Density Function methods”

Promotor: prof. dr hab. inż. Jacek Pozorski

Jednostka naukowa: Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku

- **Magister fizyki,**

Data: 29 marca 2001

Tytuł rozprawy: „Statistical analysis of turbulent flow field”

Promotor: prof. dr hab. inż. Jacek Pozorski

Jednostka naukowa: Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej

---

## 3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

---

Stanowisko	Okres	Miejsce zatrudnienia
Adiunkt naukowo-dydaktyczny	od X.2019	Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
Adiunkt naukowy/ starszy specjalista	IV.2016–IX.2019 w tym urlop zdrowotny III.2018 –I.2019	Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
Starszy specjalista	IX.2015 – XII.2015	Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku
Pracownik naukowy „Wissenschaftliche Mitarbeiterin”	I.2012–VII.2012 VII.2012–X.2015	Center of Smart Interfaces, Chair of Fluid Dynamics, Dept. of Mechanical Engineering, Technical University of Darmstadt (TUD) (Niemcy)
Staż podoktorski Stypendium TU Darmstadt	XII.2010–XII.2011	Chair of Fluid Dynamics, Dept. of Mechanical Engineering, TU Darmstadt (Niemcy)
Staż podoktorski Stypendium Alexandra von Humboldta	III.2008 –VII.2009 urlop macierzyński: VIII.2009–XI.2010	Chair of Fluid Dynamics, Dept. of Mechanical Engineering, TU Darmstadt (Niemcy)
Adiunkt naukowy	IV.2007–II.2008	Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku
Asystent, specjalista  Stypendium DAAD	IX.2000–III.2007 urlop macierzyński: VIII.2005–III.2006 VIII.2003–VII.2004	Instytut Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku  Dept. of Civil Engineering TU Darmstadt (Niemcy)

---

#### 4. Omówienie osiągnięcia naukowego

---

Jako osiągnięcia naukowe habilitantka, na podstawie Art. 219 ust. 14 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. o Prawie o szkolnictwie wyższym i nauce<sup>1</sup>, wskazuje cykl publikacji powiązanych tematycznie zatytułowany:

### **Symetrie i skalowanie w turbulencji: od analiz teoretycznych do zastosowań w badaniach przepływów atmosferycznych.**

Na cykl publikacji powiązanych tematycznie składa się 9 prac opublikowanych w latach 2014-2024. Autor korespondencyjny poszczególnych prac oznaczony jest indeksem \*:

Autorzy	Tytuł	Czasopismo
<b>H1. M. Waclawczyk*</b> , N. Staffolani M. Oberlack A. Rosteck M. Wilczek R. Friedrich	Statistical symmetries of the Lundgren-Monin-Novikov Hierarchy	Physical Review E vol. 90, 013022, (2014)  (IF=2.3) MNiSW 140 liczba cytowań: 29
Indywidualny wkład: wyprowadzenie symetrii statystycznych dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa prędkości, wyprowadzenie związku między symetriami statystycznymi a opisem przepływów intermitentnych (laminarno-turbulentnych), redakcja i korekty artykułu (znaczący wkład).		
<b>H2. M. Waclawczyk*</b> , V. N. Grebenev M. Oberlack	Lie symmetry analysis of the Lundgren-Monin-Novikov equations for multi-point probability density functions of turbulent flow	Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical Vol. 50, 175501 (2017) (IF=2.0) MNiSW 100 liczba cytowań: 10
Indywidualny wkład: sformułowanie hipotezy badawczej, rozwój metody i wykonanie obliczeń (równy wkład z dr. hab. V. N. Grebenevem), redakcja i korekty artykułu.		
<b>H3. M. Waclawczyk*</b> , Y.F. Ma J.M. Kopeć S.P. Malinowski	Novel approaches to estimating the turbulent kinetic energy dissipation rate from low- and moderate-resolution velocity fluctuation time series	Atmospheric Measurement Techniques Vol. 10, 4573–4585 (2017) (IF=3.1) MNiSW 140 liczba cytowań: 8
Indywidualny wkład: zapropozowanie nowych metod wyznaczania dyssypacji energii kinetycznej turbulencji na podstawie skalowania statystyk przecięć sygnału z poziomem zero, znaczący wkład w rozwój kodu numerycznego, wykonywanie analiz, redakcja i korekty artykułu		

<sup>1</sup>Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, Art. 219 (2018), Rozdział 3 strony 121-122

<b>H4. E.O. Akinlabi, M. Waławczyk*</b> J.P. Mellado S.P. Malinowski	Estimating Turbulence Kinetic Energy Dissipation Rates in the Numerically Simulated Stratocumulus Cloud-Top Mixing Layer: Evaluation of Different Methods	Journal of the Atmospheric Sciences Vol. 76, 1471–1488 (2019) (IF=3.2) MNiSW 140 liczba cytowań: 17
Indywidualny wkład: koncepcja artykułu, zaproponowanie metody wyznaczania tempa dyssypacji energii kinetycznej turbulencji na podstawie skalowania wariancji pochodnych prędkości oraz metody szacowania współczynnika intermitencji, udział w rozwoju kodu numerycznego (jako promotor pomocniczy pana E. O. Akinlabiego), udział w redakcji artykułu.		
<b>H5. M. Waławczyk*</b> V. N. Grebenev M. Oberlack	Conformal invariance of characteristic lines in a class of hydrodynamic models	Symmetry Basel Vol. 12, 1482 (2020) (IF=2.6) MNiSW 70 liczba cytowań: 10
Indywidualny wkład: udział w sformułowaniu hipotezy badawczej, wykonanie obliczeń, uogólnienie poprzednich wyników do szerszej klasy modeli hydrodynamicznych, z włączeniem modelu quasi-geostroficznego, analiza składnika transportu molekularnego i składnika tarcia dużych skal wirowych, redakcja artykułu.		
<b>H6. M. Waławczyk</b> V. N. Grebenev* M. Oberlack	Conformal invariance of the 1-point statistics of the zero-isolines of 2d scalar fields in inverse turbulent cascades	Physical Review Fluids Vol. 6, 084610 (2021) (IF=2.5) MNiSW 70 liczba cytowań: 5
Indywidualny wkład: sformułowanie hipotezy badawczej, wykonanie obliczeń, wyprowadzenie przykładu możliwego zastosowania transformacji konformnej do wyznaczania statystyk przepływu niehomogenicznego na podstawie rozwiązań dla turbulencji homogenicznej, redakcja artykułu.		
<b>H7. M. Waławczyk*</b> J. Nowak H. Siebert S.P. Malinowski	Detecting Nonequilibrium States in Atmospheric Turbulence	Journal of the Atmospheric Sciences Vol. 79, 2757–2772 (2022) (IF=3.2) MNiSW 140 liczba cytowań: 7
Indywidualny wkład: koncepcja artykułu i opracowanie metodologii, analiza danych, redakcja tekstu.		
<b>H8. J-I Yano* M. Waławczyk</b>	Symmetry Invariant Solutions in Atmospheric Boundary Layers	Journal of the Atmospheric Sciences Vol. 81, 263–277 (2024) (IF=3.2) MNiSW 140 liczba cytowań: 1
Indywidualny wkład: równy udział obojga autorów, MW: opracowanie metodologii, wyprowadzenie rozwiązań, udział w redakcji tekstu.		
<b>H9. M. Waławczyk*</b> J-I Yano G. Florczyk	Local similarity theory as the invariant solution of the governing equations	Boundary Layer Meteorology Vol. 190, 23 (2024) (IF=4.3) MNiSW 100 liczba cytowań: 0
Indywidualny wkład: koncepcja artykułu, wyprowadzenie rozwiązań, analiza danych, redakcja tekstu.		

---

## 4.1 Wstęp

---

*Turbulencja* jest zjawiskiem powszechnie występującym w przyrodzie. W szczególności *przepływy w atmosferze* są w znacznej części przepływami turbulentnymi.

Łacińskie słowo „turbulentum” tłumaczy się jako: burzliwy, niespokojny, gwałtowny i pełen energii. Pokrewne słowo „turbidus” opisuje między innymi coś zagmatwanego, niejasnego i kłopotliwego. Te dwa znaczenia są zapowiedzią trudności napotykanych przy *opisie przepływów* turbulentnych w sensie statystycznym. Celem opisu jest scharakteryzowanie pozornego nieporządku i chaosu za pomocą uniwersalnych praw *skalowania* dla wielkości średnich (statystyk turbulencji). Prawa skalowania mogą przyjmować prostą postać i zazwyczaj mają związek z niezmienniczością statystyk względem pewnych transformacji zmiennych, lub inaczej: *symetrii*.

Zjawisko turbulencji kojarzone jest zazwyczaj ze złamaniem symetrii. Przykładem jest przejście laminarno-turbulentne w przepływie w rurze. Uporządkowany, laminarny przepływ charakteryzuje się symetrią osiową. Po odpowiednim zwiększeniu różnicy ciśnień między końcami rury przepływ turbulizuje się. Prędkość płynu zmienia się w czasie i przestrzeni, symetria osiowa zostaje więc złamana. Turbulencję charakteryzuje jednak tendencja do ponownego przywracania symetrii w sensie statystycznym [1]. Zazwyczaj ma to miejsce w przypadku dużych liczb Reynoldsa i odpowiednio daleko od brzegów obszaru ograniczającego przepływ. W przepływie turbulentnym w rurze osiowosymetryczna będzie na przykład prędkość uśredniona w czasie. W opisie turbulencji istotną rolę pełnią rozwiązania równań, które pozostają niezmiennicze względem symetrii. Konsekwencją niezmienniczości względem symetrii skalowania są m.in. prawa Kolmogorowa, powszechnie używane w analizie danych pomiarowych turbulencji, między innymi w atmosferze.

Zaprezentowane w osiągnięciu naukowym prace opierają się na założeniu, że kluczem do opisu zjawiska turbulencji jest matematyczna analiza struktury równań je opisujących, nawet jeśli równania te nie są rozwiązywane wprost. Z przeprowadzonej analizy wynikają zastosowania teorii do opisu przepływów w atmosferze, z uwzględnieniem przepływów ze stratyfikacją oraz w przybliżeniu quasi-geostroficznym. Celem jest zaproponowanie nowych metod służących do parametryzacji tych zjawisk.

**Prace H1, H2, H5, H6 dotyczyły wyznaczania symetrii równań opisujących przepływy turbulentny w sensie statystycznym.** W pracach H1 i H2 jedna z grup skalowania powiązana została ze zjawiskiem intermitencji zewnętrznej, gdzie przepływ turbulentny może występować naprzemiennie z przepływem laminarnym. **Prace H8 i H9 przedstawiają zastosowanie tej analizy do opisu przepływów w atmosferycznej warstwie granicznej (AWG) ze stabilną stratyfikacją, która powstaje wskutek szybkiego ochładzania się powierzchni Ziemi po zachodzie Słońca [2].** W takim przypadku przepływ turbulentny jest tłumiony i możliwe jest tworzenie się lokalnie obszarów laminarnych. **Prace H5 i H6 dotyczą turbulencji dwuwymiarowej, która jest przybliżeniem przepływów wielkich skal wirowych w atmosferze.** Takie przepływy charakteryzują się szczególnymi własnościami fizycznymi. W przypadku turbulencji trójwymiarowej, klasyczny model kaskady energii Richardsona-Kolmogorowa zakłada, że produkcja energii kinetycznej turbulencji zachodzi na największych skalach wirowych, po czym następuje transfer energii w przestrzeni skali, od wirów dużych do najmniejszych, gdzie energia kinetyczna zamieniana jest w energię wewnętrzną w procesie dyssypacji [3]. W przepływach dwuwymiarowych obserwowany jest natomiast odwrotny transfer energii, od skal małych do dużych, co prowadzi do tworzenia się dużych struktur wirowych.

Tempo dyssypacji energii kinetycznej jest jedną z podstawowych wielkości charakteryzujących turbulencję. Zjawisko dyssypacji zachodzi na najmniejszych skalach wirowych, które w atmosferycznej warstwie granicznej są rzędu milimetrów lub centymetrów, dlatego trudno jest wyznaczyć tempo dyssypacji na podstawie bezpośrednich pomiarów. Zazwyczaj wyznacza się je pośrednio, korzystając z praw skalowania funkcji struktury prędkości. **W pracach H3 i H4 zaproponowane zostały nowe sposoby wyznaczania dyssypacji, na podstawie zmierzonych z niską rozdzielczością serii czasowych fluktuacji prędkości. Metody te opierają się na przybliżeniu telegraficznym sygnału oraz na analizie**

**wariancji pochodnych fluktuacji.**

**Praca H7 dotyczyła z kolei szacowania wartości dyssypacji w przypadku przepływów silnie niestacjonarnych.** W pracy tej, na podstawie analizy teoretycznej pokazano, że tzw. współczynnik dyssypacji może być używany jako wskaźnik do oceny stanów turbulencji w atmosferze. Współczynnik dyssypacji ma pewną ustaloną wartość w turbulencji stacjonarnej, rośnie gdy turbulencja zanika, a maleje gdy energia kinetyczna turbulencji rośnie w czasie. Metoda została zastosowana w analizie danych pomiarowych turbulencji w AWG.

W dalszej części przedstawione zostaną sposoby opisu statystycznego turbulencji (rozdział 4.2) oraz pojęcie niezmienniczości względem symetrii (rozdział 4.3). Rozdział 4.4 dotyczy symetrii równań funkcji gęstości prawdopodobieństwa, a rozdział 4.5 – zastosowania symetrii do wyprowadzenia rozwiązań niezmienniczych w atmosferycznej warstwie granicznej. Skalowaniu dyssypacji energii kinetycznej turbulencji poświęcony jest rozdział 4.6. Opis zakończony zostanie podsumowaniem (rozdział 4.7).

---

## 4.2 Opis statystyczny turbulencji

---

Przepływy turbulentyne opisane są matematycznie za pomocą układu równań Naviera-Stokesa. Są to równania deterministyczne, które teoretycznie można rozwiązać przy użyciu odpowiednich metod numerycznych. Problemem jest jednak ogromny koszt obliczeniowy takich symulacji oraz duża czułość rozwiązań na małe zmiany warunków początkowych i brzegowych. Z jej powodu pole turbulentyne traktować można jako pole losowe [3]. Do jego pełnego opisu w sensie statystycznym potrzeba wiedzy o wzajemnych korelacjach prędkości, temperatury i innych zmiennych opisujących przepływ w różnych jego punktach.

Po zastosowaniu operacji uśredniania równań Naviera-Stokesa otrzymuje się równania, w których znajdują się korelacje dwóch składowych prędkości. Korelacje te stają się nowymi niewiadomymi. Równania transportu dla nich wyprowadzić można analogicznie, korzystając z równań Naviera-Stokesa i stosując operację uśredniania, jednak zawierać one będą kolejne niewiadome - korelacje trzeciego rzędu oraz korelacje dwupunktowe. Kontynuując taką procedurę otrzymuje się ostatecznie nieskończony układ równań Friedmanna-Kellera [4]. Alternatywnie, na podstawie równań Naviera-Stokesa wyprowadzić można równania transportu dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa prędkości. Analogicznie jak w poprzednim przypadku, zawierać ono będzie niewiadomą dwupunktową funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Wyprowadzając kolejne równania dla dwu-, trój- itd. punktowych funkcji otrzymuje się nieskończony układ równań transportu Lundgren-Monina-Novikova (LMN) [5, 6, 7]. Trzeci sposób pełnego opisu pola turbulencji, autorstwa E. Hopfa [8], polega na wyprowadzeniu równania transportu dla funkcjonalu charakterystycznego prędkości. Wszystkie wielopunktowe statystyki pola turbulentyne wyznaczyć można obliczając pochodne funkcjonalne funkcjonalu Hopfa. Ten zwięzły sposób opisu turbulencji jest jednak trudny w zastosowaniach praktycznych. Mimo że od napisania pracy E. Hopfa minęło ponad siedemdziesiąt lat, metody numeryczne rozwiązujące wyprowadzone równanie funkcjonalne zostały zaproponowane dopiero niedawno [9].

Ze względu na dużą liczbę zmiennych niezależnych, problematyczne jest również rozwiązywanie równań dla wielopunktowych funkcji gęstości prawdopodobieństwa i wielopunktowych statystyk. Dlatego w większości stosowanych modeli turbulencji typu Reynolds-Averaged-Navier-Stokes (RANS) używa się co najwyżej statystyk jednopunktowych, zastępując niewiadome w równaniach odpowiednimi funkcjami wielkości rozwiązywanych [10]. Statystykami jednopunktowymi istotnymi z punktu widzenia modelowania turbulencji są m.in.: wektor prędkości średniej  $\langle \mathbf{u} \rangle$ , gdzie  $\mathbf{u} = [u, v, w]$ , lub  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  w notacji indeksowej, a  $\langle \cdot \rangle$  jest operacją uśredniania po realizacjach, oraz składowe tensora naprężeń Reynoldsa które można zapisać korzystając z notacji indeksowej jako

$$\langle u'_i u'_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

gdzie wielkości oznaczone symbolem ' są fluktuacjami, np.  $u'_i = u_i - \langle u_i \rangle$ . Średnia energia kinetyczna turbulencji zdefiniowana jest jako połowa śladu tensora naprężeń Reynoldsa

$$k = \frac{1}{2} \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle,$$

gdzie stosuje się konwencję sumacyjną Einsteina.

Oprócz powyższych, w popularnych modelach turbulencji rozwiązuje się dodatkowe równanie na tempo dyssypacji energii kinetycznej turbulencji, zdefiniowane jako

$$\epsilon = 2\nu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle, \quad (1)$$

gdzie  $\nu$  jest lepkością kinematyczną płynu, a tensor gradientu fluktuacji prędkości  $s_{ij}$  wyraża się wzorem

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right).$$

Ze względu na obecność pochodnych fluktuacji we wzorze na tempo dyssypacji, do jego określenia potrzeba informacji o drobnoskalowych zmianach prędkości, gdzie zachodzi proces zamiany energii kinetycznej turbulencji w energię wewnętrzną. Rozmiar najmniejszych wirów określa się na podstawie analizy wymiarowej, za pomocą współczynnika lepkości  $\nu$  i tempa dyssypacji  $\epsilon$

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}. \quad (2)$$

Inną użyteczną skalą długości jest mikroskala Taylora zdefiniowana jako

$$\lambda = \sqrt{10 \frac{\nu}{\epsilon} k} = \sqrt{15 \frac{\nu}{\epsilon} \mathcal{U}}, \quad (3)$$

gdzie  $\mathcal{U}^2 = 2/3 k$ .

Za pomocą  $k$  i  $\epsilon$ , lub  $\mathcal{U}$  i  $\epsilon$  określić można charakterystyczny rozmiar dużych wirów  $\mathcal{L}$ . Zależność łącząca te trzy wielkości nazywana jest prawem Taylora [44] i stanowi podstawę wielu modeli turbulencji

$$\epsilon = C_\epsilon \frac{\mathcal{U}^3}{\mathcal{L}}, \quad (4)$$

gdzie stała  $C_\epsilon$  nazywana jest współczynnikiem dyssypacji.

W spektralnych modelach turbulencji rozwiązywane są równania transportu widmowej gęstości energii kinetycznej turbulencji lub funkcji struktury, zdefiniowanej jako

$$\langle \delta u_i^2 \rangle = \langle (u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{x}, t))^2 \rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$

Są to statystyki dwupunktowe, które dostarczają informacji o tym jaki udział w całkowitej energii kinetycznej mają wiry o określonych rozmiarach. Wciąż jednak nie jest to pełen opis turbulentnego pola prędkości w sensie statystycznym. Do pełnego opisu potrzebna byłaby znajomość funkcjonału Hopfa, z którego wyznaczyć można wszystkie statystyki wielopunktowe, m.in. funkcje struktury dowolnego rzędu.

---

### 4.3 Niezmienniczość, symetrie i prawa skalowania

---

Pojęcie niezmienniczości jest stosowane w rozwiązaniach wielu zagadnień z dziedziny fizyki, meteorologii i inżynierii, nawet bez odniesienia do teorii symetrii. Przykładem jest znana praca Monina i Obuchowa [11], w której na podstawie niezmienniczości statystyk względem transformacji zmiennych wyprowadzony został logarytmiczny profil dla prędkości średniej w pobliżu powierzchni Ziemi. Załóżmy, że zmienne niezależne  $z$  i  $t$ , gdzie  $z$  oznacza odległość od powierzchni Ziemi, zostają przekształcone tak, że utworzone zostają nowe zmienne niezależne  $z^*$  i  $t^*$ . Ponadto zmienna zależna, np.  $\theta(z, t)$ , zostaje przekształcona w nową zmienną  $\theta^*(z^*, t^*)$ . Niezmiennikiem nazywamy funkcję  $C(\theta, z, t)$ , która zachowuje swoją postać po zamianie zmiennych

$$C(\theta, z, t) = C(\theta^*, z^*, t^*).$$

Monin i Obuchow [11] argumentowali, że różnice prędkości w atmosferycznej warstwie granicznej przy powierzchni Ziemi są niezmiennicze względem skalowania zmiennych

$$x^* = \lambda x, \quad y^* = \lambda y, \quad z^* = \lambda z, \quad t^* = \lambda t. \quad (5)$$

Różnica prędkości na dwóch różnych wysokościach jest funkcją obu zmiennych  $z_1$  i  $z_2$ , ale ponieważ jest ona niezmiennicza względem transformacji (5), to musi być funkcją stosunku  $z_2/z_1$

$$\frac{\langle u(z_2) \rangle - \langle u(z_1) \rangle}{u_\tau} = f\left(\frac{z_2}{z_1}\right), \quad (6)$$

gdzie  $u_\tau$  jest pewną skalą prędkości. Równość (6) jest spełniona jeśli w profil prędkości średniej w rozpatrywanej warstwie jest logarytmiczny.

W pracy [11] nie dyskutowano związku niemienniczości wybranych statystyk z układem równań opisującym ruch powietrza w atmosferycznej warstwie granicznej. Związek ten można znaleźć analizując symetrie równań, czyli takie przekształcenia zmiennych zależnych i niezależnych, które nie zmieniają postaci badanego równania. Przekształceniom tym można nadać strukturę grup Liego, jeśli tworzą zbiór, w którym określone jest działanie wewnętrzne posiadające własność łączności, a ponadto każdy element zbioru posiada element odwrotny i istnieje w nim element neutralny [12].

Własności te posiada np. grupa skalowań (5). Można ją przedstawić w postaci eksponencjalnej  $z^* = \lambda z = e^\epsilon z$ , gdzie  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Złożenie dwóch transformacji  $z^{**} = e^{\epsilon_1} (e^{\epsilon_2} z)$  tworzy nowe przekształcenie należące do tego samego zbioru  $z^* = e^{\epsilon_1 + \epsilon_2} z$ . Elementem neutralnym jest transformacja z  $\epsilon = 0$ . Elementem odwrotnym do  $\exp(\epsilon)$  jest  $\exp(-\epsilon)$ , tak, że  $z^* = e^\epsilon e^{-\epsilon} z = z$ . Spełniona jest również własność łączności  $z^* = (e^{\epsilon_1} e^{\epsilon_2}) e^{\epsilon_3} z = e^{\epsilon_1} (e^{\epsilon_2} e^{\epsilon_3} z)$ .

Analiza grup Liego jest metodą pozwalającą na wyprowadzenie symetrii rozpatrywanych równań, niezmienników oraz rozwiązań niezmienniczych. Znalazła ona zastosowanie w analizie procesów opisanych równaniami różniczkowymi [12]. Do symetrii równań Naviera-Stokesa należą grupy translacji

$$t^* = t + t_0, \quad (7)$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}, \quad p^* = p - \mathbf{x} \cdot \frac{d^2\mathbf{f}(t)}{dt^2}, \quad (8)$$

gdzie  $\mathbf{f}(t)$  jest dowolnym wektorem, którego składowe są funkcjami czasu, grupa obrotów układu współrzędnych, grupa translacji ciśnienia  $\bar{p}^* = \bar{p} + g(t)$ , gdzie  $g(t)$  jest dowolną funkcją czasu oraz w przypadku pomijalnej lepkości ( $\nu \rightarrow 0$ ) dwie niezależne grupy skalowania czasu i przestrzeni

$$t^* = t, \quad z^* = e^{a_z} z, \quad \mathbf{u}^* = e^{a_z} \mathbf{u}, \quad \bar{p}^* = e^{2a_z} p \quad (9)$$

$$t^* = e^{a_t} t, \quad z^* = z, \quad \mathbf{u}^* = e^{-a_t} \mathbf{u}, \quad \bar{p}^* = e^{-2a_t} p, \quad (10)$$

które są szczególnie istotne przy wyprowadzaniu praw skalowania. Gdy nie można pominąć wpływu lepkości, grupy skalowania (9) i (10) redukują się do jednej grupy symetrii  $a_t = 2a_z$ .

Po zastosowaniu operacji uśredniania wymienione wyżej symetrie stają się transformacjami wielkości średnich. W równaniu transportu dla funkcji struktury w ograniczonym zakresie skal pominąć można wpływ transportu lepkiego. W takim wypadku rozpatrywać można niezmienniczość względem obu grup skalowania. Przykładowo, transformacja zmiennych (5) stosowana w pracy Monina i Obuchowa [11], jest złożeniem transformacji skalowania (9) i (10) przy założeniu  $a_t = a_z$ , które oznacza samopodobieństwo statystyk w przepływach w pobliżu powierzchni Ziemi. Otrzymujemy wówczas  $\lambda = e^{a_z} = e^{a_t}$ .

Autorem najbardziej znanej teorii turbulencji jest A. N. Kołmogorow [13]. Pierwsza hipoteza Kołmogorowa mówi, że jeśli przepływ turbulentny charakteryzuje się lokalną izotropią, to istnieje pewien zakres skal, w którym statystyki turbulencji (w szczególności funkcje struktury) przyjmują uniwersalną postać zależną od wartości dyssypacji energii kinetycznej  $\epsilon$  i lepkości  $\nu$ . Drugie prawo zakłada, że we wspomnianym zakresie skal wyróżnić można podzakres, nazywany zakresem inercyjnym, w którym statystyki turbulencji nie zależą od lepkości  $\nu$ , ale tylko od dyssypacji  $\epsilon$ .

U. Frisch [1], sparafrazował hipotezy Kołmogorowa używając pojęcia symetrii równań Naviera-Stokesa. Pierwsza hipoteza, według U. Frischa zakłada, że w granicy nieskończenie dużych liczb Reynoldsa wszystkie symetrie równań Naviera-Stokesa, zazwyczaj złamane przez mechanizmy produkcji turbulencji, zostają przywrócone w sensie statystycznym i w dostatecznie dużej odległości od brzegów obszaru przepływu. Na przykład homogeniczność przepływu w sensie statystycznym wynika z niezmienniczości statystyk względem

translacji (7), izotropia powiązana jest z niezmienniczością względem obrotów. W przypadku izotropii funkcje struktury i inne statystyki dwupunktowe zależne będą tylko od odległości między punktami  $r$ . Z niezmienniczości względem skalowania (9) i (10) wynika natomiast następująca postać funkcji struktury prędkości rzędu  $p$

$$\langle \delta u_i^p \rangle^* = e^{p(a_z - a_t)} \langle \delta u_i^p \rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

U. Frisch założył, że turbulencja na dostatecznie małych skalach cechuje się samopodobieństwem, co będzie również oznaczało, że istnieje zależność między parametrami  $a_z$  i  $a_t$ . Kolejna hipoteza zakłada, że tempo dyssypacji  $\epsilon$  w przepływie turbulentnym ma skończoną, niezerową wartość nawet przy  $\nu \rightarrow 0$ . Analiza wymiarowa prowadzi wówczas do związku:

$$\langle \delta u_i^p \rangle \propto (\epsilon r)^{p/3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

co w połączeniu ze równaniem (11) określa wartość stosunku  $a_t/a_z = 2/3$ .

W rzeczywistych przepływach turbulentnych równanie (12) spełnione jest z dobrym przybliżeniem jedynie dla funkcji struktury niskich rzędów. Wraz ze wzrostem  $p$  uwidacznia się, że symetria skalowania jest złamana, co jest związane ze zjawiskiem tzw. intermitencji wewnętrznej. Pole prędkości generowane przez najmniejsze struktury jest bardzo niejednorodne. Obszary o dużej aktywności występują naprzemiennie z obszarami "gładkimi". Przy wyznaczaniu funkcji struktury udział obszarów aktywnych łącznie wraz z rzędem funkcji  $p$ . Ponadto na małych skalach istotną, niepomijaną rolę pełni lepkość, więc założenia przyjęte przy wyznaczaniu funkcji (12) nie są spełnione. Równanie (12) jest jednak spełnione z dobrym przybliżeniem dla funkcji struktury drugiego i trzeciego rzędu, co wykorzystywane jest szeroko, między innymi w analizie atmosferycznych danych pomiarowych.

Teoria grup symetrii Liego, a w szczególności wyznaczone na podstawie symetrii rozwiązania niezmiennicze znalazły wiele zastosowań w badaniach przepływów turbulentnych. Na jej podstawie wyprowadzony został szereg praw skalowania dla statystyk w przepływach w pobliżu ścianki [14]. Podobne podejście stosowano w pracach [15, 16].

W pracy [17] rozpatrywany był układ równań Friedmanna-Kellera dla wielopunktowych statystyk turbulencji. Autorzy pracy pokazali, że z uwagi na liniowość równań są one dodatkowo niezmiennicze względem grup skalowania i translacji. Pozwoliło to na wyprowadzenie nowych rozwiązań, podsumowanych w pracy [18]. Badania rozwiązań niezmienniczych w turbulencji przyściennej kontynuowano m.in. w pracach [19, 20]. Inną metodologię stosowali autorzy prac [21, 22]. Wprowadzili oni pojęcie losowego współczynnika skalowania, dzięki któremu np. pole prędkości średniej mogło skalować się inaczej niż intensywność fluktuacji turbulentnych. Tematowi symetrii w ujęciu statystycznym poświęcone są również prace wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego, opisane w kolejnym podrozdziale.

---

#### 4.4 Symetrie równań transportu funkcji gęstości prawdopodobieństwa

---

**Prace H1 i H2, wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego dotyczą symetrii układu równań dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa prędkości.** W tym podejściu pole prędkości w przepływie turbulentnym traktowane jest jako pole losowe. Jego  $n$  punktową funkcję gęstości prawdopodobieństwa oznaczyć można jako

$$f_n = f_n(\{\mathbf{v}_i, \mathbf{x}_i\}, t) = f_n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, t), \quad (13)$$

gdzie argumenty  $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, n$  wyznaczają przestrzeń próby prędkości w punktach  $\mathbf{x}_i$  i w czasie  $t$ :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t)$ . Na podstawie  $f_n$  obliczyć można  $n$ -punktowe statystyki prędkości, mnożąc  $f_n$  przez odpowiednią funkcję argumentów  $\{\mathbf{v}_i\}$  i całkując po przestrzeni próby.

Równanie transportu dla funkcji  $f_n$ , wyprowadzone z równań Naviera-Stokesa, zapisuje się symbolicznie w następującej postaci [23]

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i f_n = \mathcal{H}_{n+1} f_{n+1}, \quad (14)$$



gdzie  $\nabla_i$  jest operatorem gradientu w punkcie  $\mathbf{x}_i$ , a  $\mathcal{H}_{n+1}$  jest operatorem różniczkowo-całkowym. Co istotne, prawa strona równania (14) zawiera  $n + 1$ -punktową funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Równanie transportu dla funkcji  $n + 1$ -punktowej zawiera z kolei  $n + 2$ -punktową funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Układ równań LMN jest więc nieskończony.

Motywacją do podjęcia tematyki badań były wcześniejsze prace dotyczące symetrii układu Friedmanna-Kellera [17]. Równania te są niezmiennicze względem dodatkowych grup translacji i skalowania, które nie są symetriami Naviera-Stokesa. W dalszej części opisu będą one nazywane transformacjami statystycznymi. Pojawiło się pytanie, czy można znaleźć ich odpowiedniki w układzie równań LMN oraz czy transformacjom tym można nadać interpretację fizyczną.

**W pracy H1 w pierwszej kolejności pokazana została niezmienniczość równań LMN względem symetrii równań Naviera-Stokesa. Następnie habilitantka wyprowadziła przekształcenia odpowiadające dodatkowym, statystycznym transformacjom translacji i skalowania równań Friedmanna-Kellera.** W tym celu funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f_1$  wyrażona została za pomocą funkcji charakterystycznej  $\Phi_1$

$$f_1(\mathbf{v}; \mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Phi_1(\mathbf{s}; \mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{v}\cdot\mathbf{s}} d\mathbf{v}. \quad (15)$$

Statystyki prędkości  $n$ -tego rzędu oblicza się jako pochodne funkcji charakterystycznej  $\Phi_1$  liczone dla  $\mathbf{s} = 0$ . Są one więc współczynnikami rozwinięcia funkcji  $\Phi_1$  w szereg Taylora wokół  $\mathbf{s} = 0$ . Dzięki takiemu przedstawieniu problemu można było wyznaczyć transformowaną funkcję charakterystyczną  $\Phi_1^*$  podstawiając w jej rozwinięciu w szereg Taylora transformowane statystyki prędkości z pracy [17], a następnie korzystając ze wzoru (15) wyznaczyć odpowiadającą transformację funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Przyjmuje ona następującą postać

$$f_n^* = e^{a_s} f_n + (1 - e^{a_s}) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_0) \cdot \dots \cdot \delta(\mathbf{v}_n - \mathbf{u}_0), \quad (16)$$

gdzie  $a_s \leq 0$  jest parametrem transformacji skalowania, która z uwagi na ograniczenie  $a_s$  do liczb mniejszych lub równych zero nie tworzy już grupy, ale półgrupy,  $\delta(\mathbf{v}_n - \mathbf{u}_0)$  jest deltą Diraca, a  $\mathbf{u}_0$  jest pewną stałą prędkością. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa o postaci (16) określa statystyki przepływu intermitentnego, czyli takiego, w którym naprzemiennie występują obszary laminarne i turbulenty (postać taką rozważano np. w pracy [3], równanie (5.301) tamże). W przepływie laminarnym prędkość jest ustalona, dlatego jej funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest deltą Diraca. Parametr  $e^{a_s} = \gamma$  można więc zinterpretować jako współczynnik intermitencji, który wyraża prawdopodobieństwo wystąpienia przepływu turbulenty. W pracy H1 przedstawiony został przykład przepływu turbulenty w kanale płaskim. W pewnym uproszczeniu (pomijając stany pośrednie) można przyjąć, że przepływ w nim może być albo laminarny albo turbulenty z prawdopodobieństwem zależnym od liczby Reynoldsa. Związek (16) wyraża więc fakt, że równania Naviera-Stokesa posiadają dwa odmienne typy rozwiązań: uporządkowane (laminarne) i burzliwe (turbulenty), które występują z prawdopodobieństwami, odpowiednio  $1 - \gamma$  oraz  $\gamma$ . Nadaje to transformacjom statystycznym interpretację fizyczną, mimo, że nie istnieją odpowiadające im symetrie równań Naviera-Stokesa. Zagadnienie przejścia laminarno-turbulenty i zależność współczynnika  $\gamma$  od liczby Reynoldsa badane były eksperymentalnie m.in. w pracy [24].

Związek (15) spełnia warunek normalizacji funkcji gęstości prawdopodobieństwa, nie spełnia natomiast warunku separacji, który mówi, że fluktuacje prędkości w bardzo odległych od siebie punktach są statystycznie niezależne, więc np. dwupunktowa funkcja gęstości jest iloczynem dwóch funkcji jednopunktowych  $f_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = f_1(\mathbf{v}_1; \mathbf{x}_1, t) f_1(\mathbf{v}_2; \mathbf{x}_2, t)$  dla  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \rightarrow \infty$ . W przypadku przepływów intermitentnych, należy jednak posługiwać się średnimi warunkowymi. Warunek separacji będzie spełniony osobno dla funkcji pdf opisującej przepływ turbulenty i delty Diraca opisującej przepływ laminarny, ale nie dla ich ważonej sumy. Habilitantka użyła tego argumentu w odpowiedzi na dyskusję, w pracy [25]. Symetrie statystyczne są konsekwencją liniowości równań opisujących statystyki turbulencji. Należy dodać, że liniowe jest również równanie Hopfa [8], które zawiera kompletne informacje o polu losowym.

Mimo wyprowadzenia w pracy H1 symetrii odpowiadających symetriom równań Friedmanna-Kellera, otwartym pozostało pytanie czy zbiór symetrii jest kompletny, czy może rozpatrywane równania są nie-

zmiennicze względem innych jeszcze transformacji. Symetrie równań wyprowadzić można na podstawie analizy grup Liego. W przypadku równań różniczkowych cząstkowych jest to ściśle określona procedura, której szczegóły podane są w podręcznikach, np. [12]. Mniej standardowa jest analiza Liego równań różniczkowo-całkowych, do których należą równania LMN. Problemem jest również niekompletność każdego z równań, związana z występowaniem funkcji  $n + 1$ -punktowej,  $f_{n+1}$ . **Aby wyznaczyć symetrie układu równań LMN, w pracy H2 przeprowadzona została jego systematyczna analiza.** (W analizie tej równy wkład mieli habilitantka oraz dr. hab. V. N. Grebenev.) W tym celu rozpatrzono pierwsze i drugie równanie z nieskończonego układu i przedstawiono je w formie równań zachowania,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial y_i^{(1)}} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (17)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial y_j^{(2)}} = 0, \quad i = j, \dots, 12, \quad (18)$$

gdzie  $y_i^{(1)}$  oraz  $y_j^{(2)}$  są zmiennymi niezależnymi. Składowe wektorów  $J_i$  oraz  $I_j$  określone są związkami, z których część stanowią związki całkowe. Symetrie równań zachowania typu (17) i (18) są znane [26]. Ich postać była więc punktem wyjściowym do dalszej analizy. Wykorzystano w niej metodologię wprowadzoną w pracy [27], polegającą na zastosowaniu kanonicznych operatorów różniczkowych Lie-Bäcklunda. W trakcie analizy brano pod uwagę kolejne związki całkowe określające składowe wektorów  $J_i$  i  $I_i$ , w wyniku czego otrzymany został zbiór symetrii pierwszego równania LMN. Zawierał on wszystkie symetrie równań Naviera-Stokesa i dodatkowe symetrie statystyczne wynikające z liniowości równań, znane już z pracy H1. Poza wymienionymi, analiza symetrii równań LMN dla prędkości nie wykazała istnienia innych symetrii.

Stosując taką samą metodologię, w pracy współautorstwa habilitantki [28] pokazano z kolei, że pierwsze równanie układu LMN dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa wirowości w turbulencji dwuwymiarowej jest pod pewnymi warunkami niezmiennicze względem przekształcenia konforemnego. Temat ten kontynuowany był w pracach H5 i H6. Turbulencja dwuwymiarowa jest przybliżeniem przepływów turbulentnych w cienkich warstwach, zwykle odnosi się ją również do przepływów wielkoskalowych (rzędu tysięcy kilometrów) w atmosferze ziemskiej. Przy redukcji równania transportu wirowości z trzech do dwóch wymiarów znika jeden ze składników odpowiedzialny za rozciąganie wirów („vortex stretching”). Ten fakt jest zwykle interpretowany jako powód istotnych różnic w dynamice przepływów turbulentnych w dwóch i trzech wymiarach. Mechanizm rozciągania wirów przyczynia się do powstania kaskady energii, od skal dużych do małych. W turbulencji dwuwymiarowej natomiast energia kinetyczna jest transportowana w przestrzeni skal w kierunku od skal małych do dużych. Zjawisko to nazywa się odwrotną kaskadą i prowadzi do zwiększenia energii kinetycznej dużych struktur wirowych lub wzmocnienia przepływu średniego. W turbulencji dwuwymiarowej obserwuje się również kaskadę enstrofii, zdefiniowanej jako średni kwadrat wirowości  $Z = \langle \omega^2 \rangle$  w kierunku skal małych. Istnienie podwójnej kaskady energii i enstrofii przewidział teoretycznie R. Kreichnan [30]. Teoria ta została potwierdzona w późniejszych eksperymentach numerycznych [31]. Z uwagi na brak wpływu lepkości w odwrotnej kaskadzie energii obserwowane jest skalowanie Kolmogorowa typu (12) nawet dla funkcji struktury wyższych rzędów. Istnienie odwrotnej kaskady energii w turbulencji w atmosferze jest przedmiotem dyskusji, np. autorzy pracy [32] potwierdzili jedynie istnienie kaskady enstrofii w kierunku małych skal, z kolei w niedawno opublikowanej pracy [33] zaobserwowano i opisano mechanizm transferu energii w kierunku dużych wirów, już na skalach rzędu 15km.

W pracy [29] zasugerowano, że niektóre statystyki pola turbulentnego w przepływach dwuwymiarowych mogą pozostawać niezmiennicze względem ogólniejszego od grupy skalowania (8) przekształcenia konforemnego, które można rozumieć jako skalowanie zależne od przestrzeni

$$\mathbf{x}^* = \lambda(\mathbf{x}), \quad (19)$$

które zmienia odległości, ale zachowuje kąty. W pracy [29] dokonana została analiza eksperymentu numerycznego. Badano w niej linie zerowej wirowości ograniczające duże struktury wirowe. Okazało się, że linie te są w sensie statystycznym niezmiennicze względem przekształceń konforemnych. Własności tej

nie wykazywały natomiast linie ograniczające drobne struktury pola turbulencji, stąd przypuszczenie, że niezmienniczość względem odwzorowań konforemnych powiązana jest z istnieniem odwrotnej kaskady energii. Otwartym pozostało pytanie czy obserwowane własności turbulencji w 2D można wyjaśnić analizując równania opisujące te przepływy.

**Do tego pytania odniesiono się w pracach H5 i H6, gdzie zastosowano metody analizy zaproponowane w pracy.** W pracy H5 habilitantka przeprowadziła analizę grup Liego równania transportu dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa wielkości skalarnej  $\Phi$ . Zmienność skalara  $\Phi$  w czasie i przestrzeni opisana jest modelami hydrodynamicznymi postaci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi = \kappa \nabla^2 \Phi - \gamma \Phi, \quad (20)$$

gdzie  $\mathbf{x} = (x, y)$  oraz  $\mathbf{u} = (u, v)$ ,  $\kappa$  oznacza dyfuzyjność molekularną, natomiast składnik  $-\gamma \Phi$ , gdzie  $\gamma > 0$  jest stałą, wprowadzany jest aby modelować usuwanie energii z systemu na dużych skalach w odwrotnej kaskadzie energii. Składowe pola prędkości w równaniu (20) wyrażają się wzorami

$$u = \beta \int d\mathbf{x}' \Phi(\mathbf{x}', t) \frac{(y - y')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^m}, \quad (21)$$

$$v = -\beta \int d\mathbf{x}' \Phi(\mathbf{x}', t) \frac{(x - x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^m}, \quad (22)$$

gdzie  $\beta$  jest pewną stałą, zależną od modelu, a wykładnik  $m > 1$ . Gdy  $m = 2$ , skalar  $\Phi$  jest wirowością w turbulencji dwuwymiarowej, dla  $m = 3$ , równanie (20) opisuje transport składowej pionowej siły wyporu w modelu quasi-geostroficznym, używanym do opisu dynamiki skal synoptycznych w atmosferze, na średnich szerokościach geograficznych [34, 35]. Model ten uwzględnia startyfikację oraz siłę Coriolisa związaną z ruchem obrotowym Ziemi. Interpretację fizyczną mają również skalary dla wartości  $m = 6$ , [36].

**W pracy H5 rozpatrywane było równanie transportu dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f_1(\phi; x, y, t)$ , gdzie  $\phi$  oznacza zmienną z przestrzeni próby skalara  $\Phi(x, y, t)$ .** W przepływie nielepkiem jest to równanie hiperboliczne, którego charakterystyki interpretować można jako lagranżowskie trajektorie cząstek poruszających się w polu prędkości wyznaczonym przez średnie warunkowe. W pracy H5 pokazano, że dla dowolnego wykładnika  $m > 1$  niezmiennicza względem konforemnej transformacji przestrzeni jest miara prawdopodobieństwa  $f_1(0; x, y, t)d\phi$  tego, że skalar  $\Phi(x, y, t)$  przyjmuje wartość z przedziału  $0 < \Phi(x, y, t) < d\phi$ . Istnieje tu związek z analizą przeprowadzoną w pracy [29], gdzie symetria konforemna została wykazana dla izolinii zerowej wirowości. Niezmienniczość względem przekształcenia konforemnego została zachowana przy  $\gamma \neq 0$ , ale złamana przy niezerowej dyfuzyjności  $\kappa \neq 0$ . Może to tłumaczyć obserwowaną niezmienniczość jedynie w zakresie dużych skal wirowych, na które nie ma wpływu dyfuzyjność molekularna.

Wyprowadzona w pracy H5 niezmienniczość względem konforemnej transformacji przestrzeni zachodzi tylko przy określonej postaci transformacji funkcji dwupunktowej  $f_2(\phi_1, \phi_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$ . W pracy H5 pokazano, stosując rozwinięcie w szereg Taylora do wyrazów pierwszego rzędu, że charakterystyki wyznaczone na podstawie transformacji funkcji dwupunktowej mogłyby być przybliżeniami rzeczywistych rozwiązań.

Do oceny dokładności takiego przybliżenia konieczna jest analiza danych numerycznych lub eksperymentalnych. Możliwością jest wykorzystanie w tym celu statystyk opisujących struktury synoptyczne o wielkości powyżej tysiąca kilometrów. Przypuszczenie, że mogą one być niezmiennicze względem przekształceń konforemnych zostało zawarte w pracy [37].

**Inna interpretacja wyprowadzonych przekształceń dyskutowana była w pracy H6.** Habilitantka przedstawiła w niej przykładowe dwupunktowe i jednopunktowe funkcje gęstości prawdopodobieństwa, które spełniały warunki wyprowadzone w pracy H5, zapewniały więc konformną niezmienniczość rozpatrywanego równania. Własność ta zachodziła dla określonej postaci korelacji dwupunktowych zmiennej  $\Phi$ . Niezmienniczość względem transformacji konforemnych oznaczałaby w tym wypadku, że pewne statystyki niehomogenicznego pola wirowości można byłoby otrzymać w wyniku transformacji statystyk wyznaczonych dla pola homogenicznego, bez konieczności ponownego rozwiązywania równań. Pytanie czy wyprowadzona postać korelacji dwupunktowych zmiennej  $\Phi$  jest istotnie obserwowana w rozpatrywanych klasach

przepływów turbulentnych wymaga dalszych badań i szczegółowej analizy danych numerycznych lub eksperymentalnych.

---

#### 4.5 Rozwiązania niezmiennicze dla stabilnej atmosferycznej warstwy granicznej

---

**Prace H8 i H9 dotyczyły zastosowania teorii symetrii Liego w analizie przepływów w atmosferycznej warstwie granicznej (AWG).** Ponieważ turbulencję charakteryzuje tendencja do przywracania symetrii w sensie statystycznym, można się spodziewać, że prędkość średnia i składowe naprężenia Reynoldsa będą przyjmowały w danej klasie przepływów pewną charakterystyczną postać bliską rozwiązaniom niezmienniczym. Przykładem jest znany logarytmiczny profil prędkości średniej w pobliżu ścianki. Jest on na tyle uniwersalny, że występuje w różnych rodzajach przepływów przyściennych, również w turbulencji atmosferycznej przy warunkach neutralnych (kiedy zmiany temperatury są na tyle małe, że nie wpływają na pole prędkości). Profil logarytmiczny wyprowadzić można jako rozwiązanie niezmiennicze uwzględniając symetrię skalowania oraz translację prędkości średniej [17]. Ta ostatnia nie ma odpowiednika w symetriach równań Naviera Stokesa, a jednak układ równań Friedmanna-Kellera jest względem niej niezmienniczy. Translacja prędkości średniej była pośrednio wykorzystana we wspomnianej pracy Monina-Obuchowa [11]. Jej autorzy rozpatrywali różnice prędkości, które były niezmiennicze względem translacji prędkości średniej. W przepływach w AWG istotną rolę pełnią siły wyporu. AWG przybierają dwie charakterystyczne formy: typowy „konwekcyjny” stan dzienny wywołany ogrzewaniem energią słoneczną oraz typowy stan nocny, przy którym gęstość zmniejsza się wraz z wysokością prowadząc do powstania warstwy „stabilnej”. Ta ostatnia dominuje szczególnie nad pokrytymi lodem regionami Oceanu Arktycznego, zwłaszcza podczas długiej nocy polarnej. Budżet cieplny arktycznej AWG jest kluczowym elementem prognoz klimatycznych. Jednocześnie warstwa graniczna jest tak cienka, że typowe modele atmosferyczne nie rozwiązują szczegółów jej struktury. Dlatego też opis fizyczny AWG musi opierać się na podejściach statystycznych. Teoria Monina-Obuchowa opiera się na założeniu, że struktura pionowa AWG może zostać scharakteryzowana za pomocą jednej skali długości, nazywanej skalą Obuchowa. Teoria ta pozostaje do dzisiaj jedną z przewodnich zasad w badaniach atmosferycznych warstw granicznych. W szczególności, w przypadku stabilnej warstwy atmosferycznej w pobliżu powierzchni Ziemi przewiduje ona, że strumienie pędu  $\langle u'w' \rangle$  i temperatury potencjalnej  $\langle w'\theta' \rangle$  są w przybliżeniu stałe, a ubezwymiarowane gradienty prędkości średniej i temperatury średniej wyrażają się wzorami

$$\phi_m = \frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} = 1 + \beta \frac{z}{L}, \quad \phi_h = \frac{\kappa z}{\theta_*} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} = 1 + \beta \frac{z}{L}, \quad (23)$$

gdzie  $u_*^2 = -\langle u'w' \rangle = const$ ,  $\theta_* = -\langle w'\theta' \rangle / u_* = const$ ,  $\beta = 5$  jest stałą, a skala Obuchowa  $L$  zdefiniowana jest jako  $L = u_*^2 \bar{\theta}_0 / (\kappa g \theta_*)$ , gdzie  $\bar{\theta}_0$  jest temperaturą odniesienia (np. temperaturą powierzchni, lub temperaturą uśrednioną po wysokości). Małe wartości  $L$ , czyli duże  $z/L$  oznaczają silną stratyfikację. Duże wartości  $L$  oznaczają z kolei, że temperatura ma mały wpływ na pole prędkości. Równania (23) opisują wówczas w przybliżeniu logarytmiczne profile prędkości i temperatury.

Założenia stojące za teorią Monina-Obuchova sprawdzają się bardzo dobrze w przypadku słabej stratyfikacji. Wraz ze wzrostem stopnia stratyfikacji obserwuje się jednak rosnącą niezgodność przewidywań teoretycznych z danymi pomiarowymi. W szczególności, w stabilnej warstwie w pobliżu powierzchni Ziemi turbulencja może lokalnie zanikać, przepływ staje się więc intermitentny (laminarno-turbulentny). Ze względu na duży stopień skomplikowania, parametryzacja przepływów w stabilnej warstwie granicznej pozostaje aktualnym i otwartym zagadnieniem badawczym.

**W pracy H8 do opisu statystyk w AWG wykorzystano metodologię teorii grup Liego.** Udziałem habilitantki było wyprowadzenie rozwiązań niezmienniczych na podstawie symetrii równań oraz udział w interpretacji wyników. W przypadku przepływów neutralnych, czyli takich, w których temperatura jest skalarem pasywnym i nie wpływa na pole prędkości, równanie transportu temperatury jest niezmiennicze względem niezależnej grupy skalowania temperatury ze współczynnikiem  $a_\theta$ . Gdy wpływ temperatury na pole prędkości jest niepomijalny, do opisu przepływów w AWG stosuje się przybliżenie Boussinesqua. Temperatura pojawia się w równaniu transportu pędu, co prowadzi do złamania niezależnej grupy skalowania,

tak że współczynnik  $a_\theta$  powiązany jest ze współczynnikami skalowania prędkości  $a_z$  i  $a_t$  w równaniach (9) i (10). **W pracy H8 wyprowadzone zostały na tej podstawie rozwiązania niezmiennicze dla prędkości, temperatury oraz strumieni pędu i temperatury.** W wyprowadzonych związkach występują parametry skalowania  $a_z$  i  $a_t$ ,  $a_\theta$  oraz parametr  $a_s$  związany ze skalowaniem statystycznym (16). Założenia dotyczące skalowania strumieni mają wpływ na postać rozwiązań dla średniej prędkości wiatru i średniej temperatury. I tak, w przypadku neutralnym gdy postawiony zostanie warunek, że strumienie blisko powierzchni Ziemi są w przybliżeniu stałe oraz  $a_s = 0$ , otrzymane zostają rozwiązania logarytmiczne, zgodnie z przewidywaniami teorii Monina-Obuchowa [11]

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} = C_u, \quad \frac{\kappa z}{\theta_*} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} = C_\theta, \quad (24)$$

gdzie  $C_u$  i  $C_\theta$  są stałymi. W przypadku gdy temperatura jest skalarem aktywnym, ten sam warunek (stałych strumieni) prowadzi natomiast do liniowej postaci rozwiązań niezmienniczych

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} = C'_u \frac{z}{L}, \quad \frac{\kappa z}{\theta_*} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} = C'_\theta \frac{z}{L}. \quad (25)$$

gdzie  $C'_u$  i  $C'_\theta$  są stałymi. Zależności (23) zaproponowane w pracy Monina i Obuchowa [11] są więc sumą rozwiązań niezmienniczych (24) oraz (25).

Odstępstwa od skalowania liniowego przy silnych stratyfikacjach obserwowane są w licznych analizach danych eksperymentalnych, np. [38]. Ich powodem są lokalnie zaniki turbulencji. W kontekście grup skalowania oznacza to, że współczynnik skalowania statystycznego (związanego z intermitencją) musi być różny od zera. **W kolejnej pracy H9, habilitantka wyprowadziła jako rozwiązanie niezmiennicze tzw. lokalną teorię podobieństwa, która polega na uwzględnieniu zmienności strumieni i zmienności skali Obuchowa z wysokością, [39]. Dodatkowo, w rozwiązaniach uwzględniona została zależność od czasu. Występuje w nich również współczynnik skalowania  $a_s \neq 0$  związany z intermitencją.** W pracy H9 pokazano, że ma on istotne znaczenie w przypadku silnych stratyfikacji. Klasyczna teoria MO zakłada stałość statystyk w czasie, a ze wzoru (23) wynika stałość turbulentnej liczby Prandtla  $Pr_t = \phi_h/\phi_m$ , w stabilnej AWG. W pracy H9 wyprowadzona została, na podstawie rozwiązania niezmienniczego, zależność na turbulentną liczbę Prandtla, jako funkcję stosunku składowych napeżeń Reynoldsa  $\overline{uw}/w^2$ . Analiza danych doświadczalnych pokazała, że istotnie liczba Prandtla zmienia się (maleje) przy rosnącej stratyfikacji, przy czym wartości  $Pr_t$  w warunkach silnej stratyfikacji były dobrze skorelowane z wartościami argumentu  $\overline{uw}/w^2$ .

---

#### 4.6 Skalowanie tempa dyssypacji energii kinetycznej turbulencji

---

**Prace H3, H4 dotyczyły zastosowania praw skalowania Kołmogorowa do wyznaczania tempa dyssypacji energii kinetycznej turbulencji w przepływach atmosferycznych, z kolei w pracy H7 analizowany był problem silnych niestacjonarności pola turbulencji, przy których obserwowane są odstępstwa od prawa skalowania (11).**

Wspomniana w rozdziale 4.1 pierwsza hipoteza Kołmogorowa zakłada istnienie przedziału skal, dla którego statystyki turbulencji mają uniwersalną postać, zależną od szybkości dyssypacji  $\epsilon$  i lepkości  $\nu$ . Za jej pomocą funkcję struktury drugiego rzędu przedstawić można w postaci

$$\langle \delta u_i^2 \rangle = \epsilon^{2/3} r^{2/3} F_i \left( \frac{r}{\eta} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

gdzie  $F_i$  jest pewną funkcją argumentu  $r/\eta$ , a  $\eta$  jest mikroskalą Kołmogorowa, zdefiniowaną w równ. (2). Alternatywnie posłużyć się można widmową gęstością energii  $E(\kappa)$ . Z pierwszej hipotezy Kołmogorowa oraz z analizy wymiarowej wynika, że istnieje pewien przedział skal, gdzie przyjmuje ona uniwersalną postać

$$E(\kappa) = \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} f(\eta\kappa), \quad (27)$$

gdzie  $\kappa$  oznacza liczbę falową, a  $f$  jest pewną funkcją. Według drugiej hipotezy Kołmogorowa w obrębie rozpatrywanego zakresu skal wyróżnić można podzakres inercyjny, w którym statystyki turbulencji zależą tylko od tempa dyssypacji  $\epsilon$ . Wówczas równania (26) i (27) redukują się do postaci

$$\langle \delta u_i^2 \rangle = C_i \epsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad E(\kappa) = C_k \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Tempo dyssypacji energii kinetycznej turbulencji  $\epsilon$  opisane jest wzorem (1). Aby oszacować je bezpośrednio na podstawie pomiarów należałoby użyć czujników o bardzo dużej częstotliwości, mierzących najmniejszą skalę turbulencji. W przypadku lotniczych pomiarów turbulencji w atmosferze jest to praktycznie niemożliwe. Prędkość wiatru mierzona jest z rozdzielczością rzędu metrów lub dziesiątek centymetrów, podczas gdy najmniejsze wiry w atmosferze są rzędu milimetrów. Z tego powodu dyssypację szacuje się w sposób pośredni, zwykle korzystając z praw skalowania dla funkcji struktury drugiego rzędu i widmowej gęstości energii (28), przy założeniu, że współczynniki  $C_i$  oraz  $C_k$  są uniwersalne.

Pośrednie metody wyznaczania tempa dyssypacji nie są doskonałe. Przede wszystkim stojące za nimi założenia o stacjonarności oraz lokalnej izotropii małych skal nie zawsze są spełnione, a pytanie o uniwersalność stałych  $C_i$  oraz  $C_k$  pozostaje otwarte. Błędy występują również z powodu niskiej rozdzielczości badanego sygnału oraz krótkich przebiegów czasowych. Dlatego szacowane wartości  $\epsilon$  mogą się różnić w zależności od stosowanej metody, choć matematycznie funkcje struktury i widma częstotliwościowe są sobie równoważne. Stosowanie kilku różnych metod pozwala na dokładniejsze wyznaczenie  $\epsilon$ . **Było to motywacją badań opisanych w pracy H3. Habilitantka zaproponowała w niej nowe metody wyznaczania tempa dyssypacji na podstawie tzw. przybliżenia telegraficznego fluktuacji prędkości zmierzonych z niską rozdzielczością.** Przybliżenie telegraficzne określa liczbę przecięć sygnału z poziomem zero. Okazuje się, że taka informacja wystarczy do oszacowania tempa dyssypacji. K. Sreenivasan [40] wyprowadził następujący związek pomiędzy liczbą przecięć a wartością  $\epsilon$ :

$$\epsilon = 15\pi^2 \nu \langle u'^2 \rangle N^2, \quad (29)$$

gdzie  $N$  jest liczbą przecięć wzdłużnej (tj. równoległej do kierunku pomiaru) składowej fluktuacji prędkości z poziomem zero na jednostkę długości. Wartości  $N$  stosowane są również np. do wyznaczania skali długości turbulencji oraz dostarczają informacji o przestrzennym rozkładzie struktur wirowych. Równanie (29) jest spełnione w przypadku sygnałów zmierzonych z bardzo dobrą rozdzielczością. Mimo tego autorzy pracy [41] zauważyli, że statystyki liczby przecięć z poziomem zero szeregów czasowych otrzymanych z pomiarów lotniczych dobrze korelowały się z wartościami dyssypacji wyznaczonymi tradycyjnymi metodami. Sugerowało to, że można odpowiednio zmodyfikować równanie (29) aby wyznaczyć  $\epsilon$  na podstawie sygnału o niskiej rozdzielczości.

Temat ten podjęty został w pracy H3. Pierwsza metoda zaproponowana w pracy H3 polega na kilkukrotnym filtrowaniu szeregu czasowego fluktuacji prędkości filtrem dolnoprzepustowym. Wartość  $\epsilon$  jest szacowana na podstawie prawa skalowania dla liczby przecięć otrzymanych sygnałów z poziomem zero w zakresie inercyjnym. Druga metoda oparta jest na pierwszej hipotezie Kołmogorowa (27). Rekonstruuje się w niej niezmierną część widmowej gęstości energii poprzez założenie postaci funkcji  $f(\kappa\eta)$  w równaniu (27). Funkcja ta opisuje udział najmniejszych wirów, na które wpływ ma lepkość. W zaproponowanej metodzie zakłada się początkową wartość  $\epsilon_0$ , a następnie wyznacza się wartość skali Kołmogorowa  $\eta$  oraz brakującą część spektrum  $f(\kappa\eta)$ . Na tej podstawie obliczyć można współczynnik korygujący  $C_F$  do równania (29)

$$\epsilon = 15C_F \pi^2 \nu \langle u'^2 \rangle N_{cut}^2, \quad (30)$$

gdzie  $N_{cut}$  jest liczbą przecięć sygnału o niskiej rozdzielczości. Wyznaczone na podstawie równania (30) tempo dyssypacji używane jest następnie do poprawienia wartości  $\eta$  w kolejnej iteracji. Ostateczną wartość dyssypacji otrzymuje się po kilku iteracjach, niezależnie od przyjętego warunku początkowego  $\epsilon_0$ .

**Opisane powyżej metody wykorzystane zostały w pracy H4, gdzie analizowano dane eksperymentu numerycznego AWG zwieńczonej stratocumulusem, [42].** Liczba Reynoldsa tych symulacji była 300 krotnie mniejsza od liczb Reynoldsa obserwowanych w rzeczywistych przepływach w atmosferze. Mimo to, na podstawie analizy danych można wyciągnąć wnioski o procesach zachodzących wewnątrz

chmur. Ponieważ w symulacjach rozwiązywane były najmniejsze skale turbulencji, można było na ich podstawie wyznaczyć wartość dyssypacji z jej definicji (1) i porównać z wartościami  $\epsilon$  otrzymanymi metodami pośrednimi. W pracy H4 analizowano dane z "wirtualnego" samolotu lecącego przez chmurę i mierzącego prędkość wzdłuż jego trajektorii. Dyssypacja szacowana została na podstawie widma częstotliwości i funkcji struktury drugiego i trzeciego rzędu oraz metod wyprowadzonych w pracy H3. Dodatkowo habilitantka zaproponowała zmodyfikowaną wersję metody iteracyjnej, w której zamiast liczby przecięć z poziomem zero wykorzystuje średni kwadrat gradientu fluktuacji prędkości. Tempo dyssypacji otrzymuje się wówczas na podstawie wzoru

$$\epsilon = 15\nu \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \mathcal{C}_F, \quad (31)$$

gdzie  $x$  jest kierunkiem wzdłuż kierunku lotu a współczynnik  $\mathcal{C}_F$  wyznacza się tak samo jak w metodzie zaproponowanej w pracy H3. Dane numeryczne umożliwiły ponadto porównanie różnych modeli widma energii w zakresie dużych liczb falowych  $f(\eta\kappa)$ . Model zaproponowany w pracy [3] okazał się najbardziej uniwersalny.

W pracy H4 pokazano, że odstępstwa od skalowania Kołmogorowa (28) występują w górnej warstwie startocumulusa, gdzie przepływ turbulentny był silnie niehomogeniczny. Stosowanie metod pośrednich opartych na założeniu lokalnej izotropii nie jest w takim przypadku uzasadnione i prowadzi do znacznego niedoszacowania tempa dyssypacji. Wartości  $\epsilon$  wyznaczone na podstawie widma częstotliwościowego składowej pionowej fluktuacji prędkości wewnątrz chmury były z kolei przeszacowane, mimo że istniał wyraźny inercyjny zakres skal ze skalowaniem Kolmogorowa. Powodem rozbieżności była anizotropia przepływu, co w konsekwencji zwiększało wartość stałej proporcjonalności  $C_3$  w równaniu (28).

**Temat złamania symetrii skalowania (12) podjęty został w pracy H7 w kontekście turbulencji niestacjonarnej w sensie statystycznym.** Według klasycznego scenariusza kaskady energii tempo transferu energii w przestrzeni skal jest stałe i równe zarówno produkcji energii turbulencji na skalach największych jak i tempu dyssypacji na skalach najmniejszych. Dlatego statystyki największych skal, tzn. ich charakterystyczna skala prędkości  $\mathcal{U}$  i długości  $\mathcal{L}$  są powiązane z szybkością dyssypacji  $\epsilon$  prawem Taylora (4). Z zależności (4) wynika również następujący wzór na stosunek skal długości:  $\mathcal{L}$  i skali Taylora  $\lambda$  (zdefiniowanej w równaniu (3)):

$$\frac{\mathcal{L}}{\lambda} = \frac{C_\epsilon}{15} Re_\lambda, \quad C_\epsilon = 0.5, \quad (32)$$

gdzie liczba Reynoldsa wyraża się wzorem  $Re_\lambda = \mathcal{U}\lambda/\nu$ . Do niedawna zakładano, że wartość współczynnika dyssypacji  $C_\epsilon = 0.5$  jest uniwersalna. Zaprzeczył temu jednak szereg niedawnych prac badawczych (podsumowanych w artykule przeglądowym [45]) W szczególności okazało się, że w przypadku turbulencji zanikającej współczynnik  $C_\epsilon$  rośnie, osiągając w granicy dużych czasów wartość  $C_\epsilon = 1$ . W początkowych chwilach zaniku turbulencji  $C_\epsilon$  zmieniał się odwrotnie proporcjonalnie do lokalnej liczby Reynoldsa  $Re_\lambda$ . Sugerowało to istnienie innego prawa skalowania opisującego takie stany. Autorzy prac [46], [47] powiązali obserwowane zmiany współczynnika dyssypacji z odstępstwami od prawa skalowania Kołmogorowa. Stany, w których obserwowano takie odstępstwa zostały nazwane "nierównowagowymi". Występują one po nagłych zmianach siły wymuszającej, zanim przepływ turbulentny osiągnie nowy stan równowagi.

Autorzy pracy [46] wyprowadzili następującą postać stosunku  $\mathcal{L}/\lambda$  oraz współczynnika  $C_\epsilon$  w stanach nierównowagowych

$$\frac{\mathcal{L}}{\lambda} = \frac{C_{\epsilon 0}}{15} Re_{\lambda 0}^{15/14} \left( \frac{1}{Re_\lambda} \right)^{1/14}, \quad C_\epsilon = C_{\epsilon 0} \left( \frac{Re_{\lambda 0}}{Re_\lambda} \right)^{15/14}, \quad (33)$$

gdzie  $C_{\epsilon 0} = 0.5$  oraz  $Re_{\lambda 0}$  są wielkościami równowagowymi, przed zmianą siły wymuszającej, mogą one być również traktowane jako wartości początkowe. Zależności bliskie wyprowadzonym równaniom (33) zaobserwowano w kontrolowanych warunkach, w eksperymentach laboratoryjnych oraz numerycznych.

Przepływy w atmosferze charakteryzują się dużą dynamiką, jednak czujniki umieszczone na samolocie lub na zawieszanej pod nim platformie mierzą tylko aktualny stan turbulencji. Nie daje to bezpośrednio

informacji o zmianach czasowych.

**Pomysłem habilitantki było wykorzystanie wyników omówionych wyżej prac teoretycznych do oceny stanów turbulencji atmosferycznej.** Wzory (33) znacząco różnią się od odpowiadających im klasycznych równań (32), mogą więc służyć do wykrywania turbulencji nierównowagowej. Analiza danych z pomiarów atmosferycznych jest trudna z uwagi na ich ograniczoną ilość. W pracy H7 habilitantka wykazała, że nawet w przypadku niestacjonarności, rozdzielczość i długość analizowanych serii czasowych była wystarczająca do oszacowania tempa dyssypacji  $\epsilon$ , energii kinetycznej, skali długości  $\mathcal{L}$  oraz skali Taylora  $\lambda$ . Pozwoliło to na wyznaczenie współczynnika  $C_\epsilon$  ze wzoru (4), stosunku  $\mathcal{L}/\lambda$  oraz zbadanie ich zależności od liczby Reynoldsa  $Re_\lambda$ . Było to pierwsze zastosowanie tej nowej metody do badania turbulencji w atmosferze.

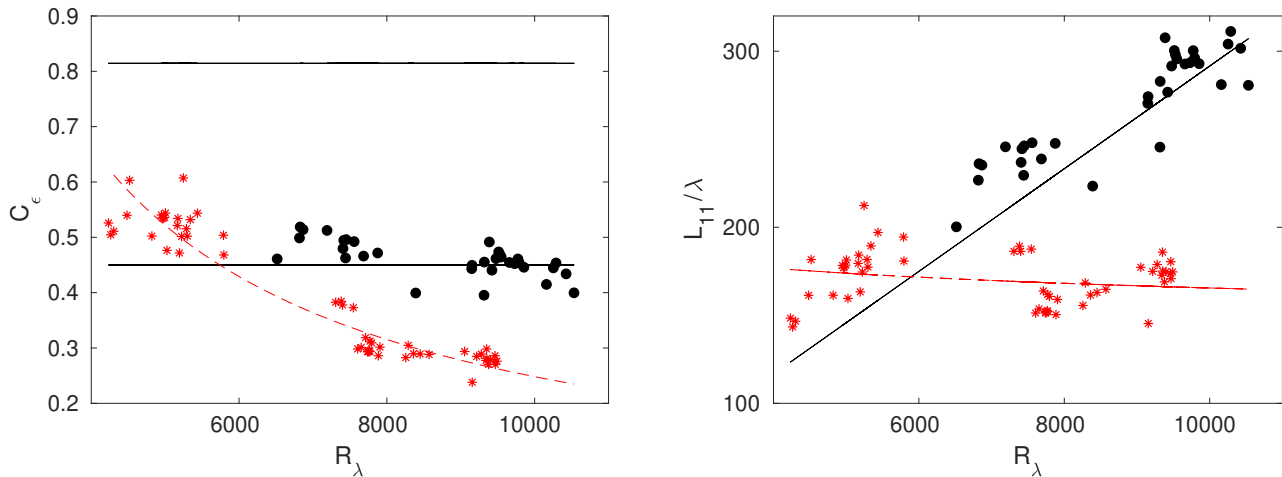
W pracy H7 analizie poddane zostały dane z kampanii pomiarowej ACORES przeprowadzonej nad obszarem północnego Atlantyku, w pobliżu wyspy Graciosa [48]. Celem kampanii było badanie własności atmosferycznej warstwy granicznej zwieńczonej stratocumulusem. Niskie chmury typu stratocumulus pełnią istotną rolę w bilansie radiacyjnym Ziemi, ponieważ pokrywają około 20% powierzchni nieba nad naszą planetą a jednocześnie odbijają znaczną część docierającego do Ziemi promieniowania słonecznego. Mimo jednoczesnego efektu cieplarnianego chmur związanych z pochłanianiem promieniowania podczerwonego Ziemi, ich wypadkowy efekt na bilans energii Ziemi jest chłodzący [49]. Dane z kampanii ACORES analizowane były we wcześniejszej pracy [50]. W szczególności jej autorzy badali zjawisko „oddzielenia” (ang. decoupling) chmury stratocumulus związane z zwiększeniem jej wysokości, ochłodzeniem i zmianą charakteru cyrkulacji w warstwie granicznej. Autorzy pracy [50] przypuszczali, że turbulencja w chmurze „oddzielonej” może zacząć w pewnych obszarach zanikać. Zjawisko „oddzielania” i jednoczesny spadek temperatury wierzchołka chmury zmienia również jej bilans radiacyjny i może prowadzić do zmiany wypadkowego efektu na ogrzewający.

**Zadaniem postawionym w pracy H7 była analiza pomiarów z AWG zwieńczonych dwoma rodzajami chmur typu stratocumulus - „połączonej” (coupled) z silną wymianą ciepła i pary wodnej z powierzchnią oceanu poprzez system konwekcji i „oddzielonej” i zbadanie ewentualnych różnic między stanami turbulencji w obu przypadkach.**

We wzorów (33) wynika, że gdy turbulencja słabnie i liczba Reynoldsa zmniejsza się,  $C_\epsilon/C_{\epsilon 0} > 0$ , z kolei  $C_\epsilon/C_{\epsilon 0} < 1$  wskazują na wzrost energii kinetycznej turbulencji w czasie. Analizując zależność  $C_\epsilon$  oraz  $\mathcal{L}/\lambda$  od liczby Reynoldsa  $Re_\lambda$  można z kolei ocenić, czy turbulencja znajduje się w stanie równowagowym, zgodnie z równaniami (32) czy nierównowagowym zgodnie z zależnościami (33). Przykładowe wyniki z AWG zwieńczonej „oddzieloną” chmurą typu stratocumulus przedstawione są na rysunku 1. Ten drugi przypadek wskazywałby na występujące w przepływie gwałtowne zmiany warunków (np. zmiany tempa produkcji energii kinetycznej turbulencji). Okazało się, że najmniejsze wartości  $C_\epsilon/C_{\epsilon 0}$  w obu rodzajach AWG występowały na odcinkach lotów wykonanych najbliżej powierzchni Ziemi. W obszarze tym produkcja energii kinetycznej turbulencji przez wypór oraz produkcja mechaniczna w wyniku obecnych gradientów prędkości średniej są największe. Większe wartości  $C_\epsilon/C_{\epsilon 0}$  występowały na wysokościach 500-600m odpowiadających połowie AWG, gdzie wznoszące się termale lub opadające prądy chłodnego powietrza tracą energię kinetyczną. Przy analizie danych z lotów przez chmury okazało się natomiast, że obszary o silnej produkcji występują naprzemiennie z obszarami zaniku turbulencji wskazując na silną intermitencję przepływu w tym obszarze.

W pracy H7 przy porównaniu danych z dwóch rodzajów AWG stwierdzono, że na wszystkich odcinkach lotów  $C_\epsilon/C_{\epsilon 0}$  w AWG zwieńczonej stratocumulusem „oddzielonym” było wyższe od wartości w chmurze „połączonej” na odpowiadających wysokościach. W przypadku chmury „oddzielonej” większość danych wskazywała na nierównowagę turbulencji. Zjawisko to mogło być związane z zmianą organizacji konwekcji przy procesie „oddzielenia” chmury. Wykonane przez autorkę badania dostarczyły dodatkowych informacji na temat procesów zachodzących w badanej AWG. Było to możliwe dzięki zaproponowanemu zastosowaniu wyprowadzonych na drodze teoretycznej praw skalowania do analizy danych pomiarowych turbulencji atmosferycznej.





Rysunek 1: (Lewy rysunek):  $C_\epsilon$  jako funkcja  $Re_\lambda$  w AWG zwieńczonej „oddzieloną” chmurą typu stratocumulus. (Prawy rysunek): Stosunek skali całkowitej  $L_{11} = \mathcal{L}$  i mikroskali Taylora. Dane pomiarowe oznaczone są jako czarne i czerwone symbole, zależności równowagowe według wzorów (32) oznaczone są czarnymi, ciągłymi liniami, zależności nierównowagowe według wzorów (33) oznaczone są czerwonymi, przerywanymi liniami.

---

#### 4.7 Podsumowanie

---

Zaprezentowany zbiór prac opiera się na analizie matematycznej równań opisujących przepływ turbulentny w sensie statystycznym. Problemem tego opisu jest brak domknięcia, związany z występowaniem w badanych równaniach niewiadomych statystyk wyższych rzędów. Pomimo tego sama struktura równań i wynikające z niej własności niezmienniczości względem transformacji zmiennych, dostarczają istotnych informacji o badanym zjawisku i pozwalają na wyprowadzenie pewnych charakterystycznych dla niego zależności (praw skalowania). Najbardziej znanym przykładem jest prawo Kolmogorowa o skalowaniu funkcji struktury w zakresie inercyjnym, gdzie przepływ turbulentny cechuje się samopodobieństwem - niezależnie od obserwowanych skal ma (w sensie statystycznym) podobne własności. Z teorii Kolmogorowa wynika na przykład, że transfer energii kinetycznej w przestrzeni skal, od skal dużych do małych, powinien być stały. Analiza symetrii równań transportu dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa prędkości wykonana w pracach H1 i H2 pokazała, że są one niezmiennicze względem symetrii równań Naviera Stokesa oraz ze względu na swoją liniowość, względem dodatkowych symetrii skalowania i translacji. Zaproponowana interpretacja łączy tę niezmienniczość ze zjawiskiem intermitencji rozumianej jako możliwe naprzemienne występowanie przepływu turbulentnego i laminarnego. Intermitencja występuje np. w stabilnej atmosferycznej warstwie granicznej, która tworzy się po zachodzie Słońca. Powietrze w pobliżu ochładzającej się powierzchni Ziemi staje się gęstsze, przez co zaburzenia przepływu są tłumione. Symetrie równań wykorzystane zostały w pracy H8 do wyprowadzenia pionowych profili średniej prędkości wiatru i temperatury oraz strumieni pędu i temperatury jako rozwiązań niezmienniczych. W pracy H9 z kolei wyprowadzona została lokalna teoria podobieństwa dla stabilnej warstwy atmosferycznej, gdzie szczególną rolę pełni dodatkowe skalowanie związane z intermitencją przepływu. Wprowadza ono zależność statystyk od wysokości warstwy granicznej. W artykule H9 uwzględniona została również niestacjonarność przepływu. Prace te są obecnie kontynuowane w ramach projektu Narodowego Centrum Nauki. Ciekawą dalszą perspektywą jest uwzględnienie roli transportu w kierunkach horyzontalnych oraz uwzględnienie w analizie efektów siły Coriolisa. Z badań eksperymentalnych wiadomo, że wpływają one na statystyki przepływu, zależności wyprowadzono jednak na drodze analizy wymiarowej. Analiza symetrii pozwala na bardziej metodyczne wyprowadzenie związków między zmiennymi opisującymi przepływ i wyprowadzenie nowych zależności.

Analizie symetrii poświęcone są również prace H5 i H6, które dotyczą klasy modeli hydrodynamicznych w dwóch wymiarach. Przepływy dużych skal synoptycznych w atmosferze ziemskiej mają cechy turbulencji dwuwymiarowej. W pracach H5 i H6 udowodniono, że równania transportu dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa wybranych wielkości skalarnych są pod pewnymi warunkami niezmiennicze względem konforemnej transformacji przestrzeni. Jeśli warunki te są spełnione, to dzięki przekształceniu konforemnemu możliwe byłoby np wyznaczenie pewnych statystyk turbulencji niehomogenicznej na podstawie rozwiązania dla przepływu homogenicznego. Interpretacja wyprowadzonych własności oraz ich praktyczne wykorzystanie wymagają dalszych badań, m.in. analizy danych obserwacyjnych lub numerycznych.

Prawo skalowania Kołmogorowa jest szeroko stosowane w analizie wyników pomiarów atmosferycznych. Można dzięki niemu oszacować tempo dyssypacji energii kinetycznej turbulencji nawet jeśli dostępne przyrządy są w stanie zarejestrować tylko duże ruchy wirowe, o rozmiarach rzędu metrów lub dziesiątek metrów. Zazwyczaj wykorzystuje się w tym celu funkcje struktury drugiego rzędu lub spektrum częstotliwości mierzonych szeregów czasowych. Alternatywne metody zaproponowane zostały w pracach H3 i H4. Opierają się na prawie skalowania dla liczby przecięć szeregu czasowego z poziomem zero, lub na wyznaczeniu wariancji pochodnych zmierzonej prędkości wiatru. Choć stosowane metody w idealnych warunkach powinny dawać takie same wyniki, to w praktyce mogą one mieć różne błędy związane np. z niedostateczną rozdzielczością sygnału lub zbyt krótkim czasem uśredniania. Stosowanie kilku różnych metod jednocześnie pozwala zwiększyć dokładność wyników.

Inne źródło problemów wyznaczania tempa dyssypacji związane jest z niespełnieniem założeń o stacjonarności i lokalnej izotropii. Pokazano to w pracy H4 na podstawie analizy danych numerycznych chmury typu startocumulus. W górnych jej warstwach, gdzie występuje obszar stabilnej stratyfikacji, przepływ był silnie niehomogeniczny i wartości  $\epsilon$  wyznaczone metodami pośrednimi były niedoszacowane. W obszarze silnej konwekcji z kolei tempo dyssypacji było przeszacowane. Ten sam problem dotyczy pomiarów w atmosferze. Wartości tempa dyssypacji wyznaczone w różnych częściach atmosferycznej warstwy granicznej mogą być przeszacowane lub niedoszacowane w zależności od stopnia stratyfikacji. Ciekawym zagadnieniem badawczym jest uwzględnienie efektów sił wyporu na funkcje struktury prędkości. Prace na ten temat są obecnie w toku, w ramach współpracy naukowej z prof. J. C. Vassilicossem z Uniwersytetu w Lille (Francja).

Postać widmowej gęstości energii w zakresie inercyjnym ulega również modyfikacji na skutek niestacjonarności przepływu. Zagadnieniu temu poświęcona jest praca H7. Niestacjonarność można zostać scharakteryzowana za pomocą parametru dyssypacji  $C_\epsilon$ . Wartości  $C_\epsilon$  mniejsze od jego wartości równowagowej  $C_{\epsilon 0}$  oznaczają silną produkcję energii kinetycznej turbulencji. Może ona rosnać w czasie lub być transportowana w przestrzeni fizycznej do innych obszarów przepływu. Duże wartości  $C_\epsilon$  oznaczają z kolei, że turbulencja w danym obszarze ulega osłabieniu. Taka analiza dostarcza istotnych informacji o procesach zachodzących w AWG na podstawie bardzo skąpych danych pomiarowych turbulencji w atmosferze. Dalsze zastosowania tej metody dotyczą analizy turbulencji krótko przed zachodem Słońca. Występujący wówczas szybki zanik konwekcji prowadzi do gwałtownych zmian energii kinetycznej i tempa dyssypacji, które można opisać za pomocą nowych praw skalowania turbulencji nierównowagowej. Uwzględnienie efektów nierównowagi turbulencji pozwoli na lepszą parametryzację procesów zachodzących krótko przed i po zachodzie Słońca.

---

#### 4.8 Opis wybranych prac dodatkowych, niewchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego

---

Oprócz prac opisanych w podrozdziałach 4.1-4.7, po uzyskaniu stopnia doktora byłam współautorem kilkunastu innych artykułów. Wybrane prace dodatkowe są wymienione na końcu rozdziału Literatura (poniżej) jako prace [D1]–[D12]. W niniejszym rozdziale zawarty jest krótki opis tych prac wraz z określeniem mojego wkładu w ich powstanie.

Jednym z tematów, którymi się zajmowałam było modelowanie dynamiki dużych struktur wirowych, tzw. struktur koherentnych, za pomocą metody POD (Proper Orthogonal Decomposition). W metodzie tej wyznacza się optymalną bazę funkcyjną na podstawie wyników eksperymentów laboratoryjnych lub numerycznych. Pole fluktuacji prędkości rozwijane jest następnie w szereg przy użyciu wyznaczonej bazy. Dynamikę struktur koherentnych modeluje się rozwiązując numerycznie układ równań dla zmiennych w

czasie współczynników rozwinięcia. W pracy [D1] pole prędkości turbulencji przyściennej rozwiązywane było metodą POD, a pole temperatury metodą cząstek Lagranżowskich. Za pomocą tej metody rozwiązane zostało zagadnienie sprzężonej wymiany ciepła między płynem a ścianką. Moim udziałem w tej pracy było napisanie kodu numerycznego, wykonanie obliczeń i analiz oraz udział w redakcji artykułu. W pracy [D2] metoda POD wykorzystana została do symulacji przepływów przyściennych zawierających małe cząstki. Wspólnie z dr Cyrille Allery brałam udział w rozwijaniu kodu numerycznego dla pola prędkości.

Kolejnym tematem badawczym była parametryzacja turbulencji w przepływach dwufazowych z powierzchnią rozdziału (przepływy woda-powietrze). W obecności wirów turbulentnych położenie powierzchni ulega zaburzeniu, z drugiej strony grawitacja i siły napięcia powierzchniowego zmniejszają te fluktuacje. Współdziałanie obu mechanizmów prowadzi do powstania strefy intermitentnej, gdzie prawdopodobieństwa wystąpienia wody lub powietrza jest różne od zera. W ramach pracy [D3] zaproponowałam model, w którym szerokość obszaru intermitentnego wyznaczana jest w wyniku oddziaływania dwóch składników w równaniu na współczynnik intermitencji. Jeden z nich jest członem dyfuzyjnym, powodującym wzrost grubości warstwy intermitentnej i ma związek z obecnością wirów turbulentnych zaburzających powierzchnię. Drugi człon równania jest odpowiedzialny za kontrakcję, tj. spadek grubości warstwy na skutek działania sił grawitacji i napięcia powierzchniowego. Współczynniki modelu związane zostały z wynikami obserwacji eksperymentalnych, dzielących przepływy z powierzchnią rozdziału na kilka charakterystycznych typów, (m.in. przypadek płaskiej, nieodkształconej powierzchni, powierzchnia z drobnymi falami kapilarnymi, powierzchnia z falami grawitacyjnymi). Moim udziałem w pracy [D3] było również wykonanie obliczeń numerycznych i redakcja tekstu. W kolejnym artykule [D4], we współpracy z dr. hab. Tomaszem Waclawczykiem zaproponowaliśmy wspólnie inny, zachowawczy model oddziaływania turbulencji z powierzchnią rozdziału. Wykonałam poza tym analizę danych numerycznych i porównałam wyniki z przewidywaniami modelu, miałam udział w redakcji tekstu.

Po uzyskaniu stopnia doktora zajmowałam się również tematem opisu statystycznego turbulencji. Praca [D5], którą wykonywałam wspólnie z prof. Martinem Oberlackiem, poświęcona była analizie równania Hopfa dla funkcjonału charakterystycznego prędkości. Zawiera on informacje o wszystkich wielopunktowych statystykach prędkości. Moim udziałem było wykonanie obliczeń i redakcja tekstu.

Oprócz artykułów uwzględnionych w osiągnięciu habilitacyjnym byłam współautorem prac [D6]–[D9] poświęconych zagadnieniu teorii symetrii. Miałam udział w redakcji przeglądowego artykułu [D6] oraz wykonałam znaczącą część obliczeń w pracach [D7]–[D9].

Nowy kierunek badań, który podjęłam na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego dotyczył wyznaczania tempa dyssypacji energii kinetycznej turbulencji. Trzy z opublikowanych prac dotyczących tego tematu wchodzi w skład osiągnięcia habilitacyjnego. Dodatkowo w pracy [D10] przeprowadzona została analiza błędów i porównanie różnych metod wyznaczania dyssypacji. Byłam pomysłodawczynią tych badań i nadzorowałam pracę studentów.

Jako promotor pomocniczy pana Emmanuela O. Akinlabiego współpracowałam z nim oraz z prof. Szymonem Malinowskim nad modelowaniem skal podsiatkowych (nierozwiązywanych) w metodzie dużych wirów (LES - Large Eddy Simulation). Metody LES używa się w np. w symulacjach turbulencji w chmurach. Ponieważ dostępne moce obliczeniowe nie są wystarczające do śledzenia dynamiki wszystkich wirów turbulentnych, w metodzie LES stosuje się operację filtrowania (uśredniania przestrzennego) równań Naviera-Stokesa. Równania te rozwiązywane są na siatce obliczeniowej o charakterystycznym rozmiarze od 2 do 4 rzędów wielkości większym od skali Kolmogorowa. Wpływ skal nierozwiązywanych na dynamikę dużych wirów uwzględniany jest za pomocą odpowiedniego modelu. Praca [D11] dotyczyła rekonstrukcji skal podsiatkowych za pomocą metody fraktalnej. Moim udziałem było zaproponowanie kierunku badań, udział w rozwijaniu metod oraz w redakcji tekstu.

Podjęty przez mnie ostatnio kierunek badań łączy metody analizy teoretycznej z opisem turbulencji w stabilnej atmosferycznej warstwie granicznej. Oprócz artykułów H8 i H9 wchodzących w skład osiągnięcia

habilitacyjnego, wspólnie z dr. Jun-Ichi Yano pracowaliśmy nad metodą ubezwymiarowania równań i wyznaczania na jej podstawie charakterystycznych skal, m.in. skali Obukhowa, [D12]. Moim udziałem w tej pracy była dyskusja i interpretacja wyników oraz udział w redakcji artykułu.

---

## 5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej, w szczególności zagranicznej

---

Po uzyskaniu stopnia doktora w Instytucie Maszyn Przepływowych w Gdańsku kontynuowałam współpracę z promotorem pracy, prof. Jackiem Pozorskim. Współpracowałam również z dr. Cyrilem Allery i dr. Claudine Béghein z Uniwersytetu w La Rochelle (Francja). Zajmowałam się modelowaniem turbulencji przy użyciu metody funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz modelowaniem dużych struktur wirowych w przepływie turbulentnym bazującym na metodzie POD (Proper Orthogonal Decomposition). Wyniki prac opublikowane zostały w czasopismach naukowych [D1, D2].

W roku 2008 otrzymałam stypendium naukowe Alexandra von Humboldta, które odbyłam na Uniwersytecie Technicznym w Darmstadt (Niemcy) w grupie prof. Martina Oberlacka. W czasie pobytu w Darmstadt (do roku 2015) zajmowałam się pracą nad kilkoma zagadnieniami. Pierwszym było modelowanie turbulencji w przepływach dwufazowych z powierzchnią rozdziału (prace [D3] oraz [D4]). Temat ten kontynuowałam prowadząc prace w ramach stypendium uniwersyteckiego, a następnie jako kierownik projektu:

„*Modelling of turbulence-interface interaction in two fluid systems*”, finansowanego przez DFG (Deutscher Forschungsgemeinschaft), projekt numer 220504256.

Od stycznia 2015 do września 2015 byłam kierownikiem grupy badawczej „Turbulence and symmetries” w katedrze Mechaniki Płynów, na Wydziale Budowy Maszyn na Uniwersytecie Technicznym w Darmstadt. Współpracowałam również z dr. hab. Vladimirem N. Grebenevem (Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Rosyjska Akademia Nauk, Nowosybirsk, Rosja). Prace kontynuowałam po powrocie do Polski jako kierownik projektu

„*Opis turbulencji jako pola stochastycznego i modelowanie oparte na grupach symetrii*” finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki (projekt numer 2014/15/B/ST8/00180)

realizowanego najpierw w Instytucie Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku, a od kwietnia 2016 na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. W wyniku tej współpracy powstał szereg prac, z których część wchodzi w skład osiągnięcia habilitacyjnego, a część została opisana w rozdziale 4.8, jako prace dodatkowe [D5]–[D9].

W latach 2017–2020 byłam promotorem pomocniczym pracy doktorskiej pana Emmanuela Akinlabi, zatrudnionego na Uniwersytecie Warszawskim w ramach projektu COMPLETE - Cloud MicroPhysics Turbulence Telemetry (program Horizon 2020). Jego praca doktorska „Analysis and Modelling of Small-Scale Turbulence” dotyczyła wyznaczania tempa dyssypacji energii kinetycznej turbulencji oraz modelowania skal podsiatkowych w metodzie dużych wirów (LES - Large Eddy Simulation). Po ukończeniu doktoratu w roku 2020 dr. Emmanuel O. Akinlabi odbył staż podoktorski na Uniwersytecie w Bostonie (USA), gdzie obecnie kontynuuje badania jako pracownik naukowy.

W roku 2020 nawiązałam współpracę naukową z dr. Jun-Ichi Yano z Météo-France, (Tuluza, Francja) kontynuowaną w ramach projektu NCN, którego jestem kierownikiem:

„*Stabilna atmosferyczna warstwa graniczna: poza teorią Monina i Obukhova*” projekt Narodowego Centrum Nauki, numer 2020/37/B/ST10/03695.

Prowadzone prace dotyczą parametryzacji turbulencji w stabilnej warstwie atmosferycznej. Stypendystami lub współpracownikami w ramach projektu byli (lub są) pan Jackson Nzotungishaka, pan mgr. Paweł Jędrejko, który w październiku roku 2023 podjął studia doktoranckie na Wydziale Fizyki, pan mgr Grzegorz Florczyk oraz pan dr Jakub Nowak.

Po publikacji H7 razem prof. Szymonem Malinowskim, dr Jakubem Nowakiem i mgr Stanisławem Królem zostałam zaproszona do udziału w Lille Turbulence Program 2023 na Uniwersytecie w Lille (Francja).

Od tego czasu kontynuujemy współpracę z prof. Johnem Christosem Vassilicosem, dotyczącą skalowania funkcji struktury prędkości i temperatury wyznaczonych na podstawie danych pomiarowych turbulencji w atmosferze.

Oprócz opisanych powyżej prac, na Uniwersytecie Warszawskim byłam wykonawcą w projektach „Turbulencyjna dynamika i mikrofizyka w Stochastycznym Lagranżowskim Modelu Chmurowym” (projekt NCN), oraz „Next Generation Earth Modelling Systems (NextGEMS)” (European Commission, HORIZON 2020) których kierownikiem jest prof. Hanna Pawłowska oraz projektu „Teledetekcja strumieni cząstek w środowisku miejskim (PURER-SENS)” którego kierownikiem był dr Pablo Ortiz Amezcua. W ramach tego ostatniego projektu współpracowałam z grupą prof. Iwony Stachlewskiej nad analizą danych pomiarowych zanikającej turbulencji w AWG przed zachodem słońca.

## Literatura

- [1] Frisch U. *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 2006
- [2] Łobocki L. *Podstawy dynamiki atmosfery*, Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2018
- [3] Pope S. B. *Turbulent flows*, Cambridge University Press, 2000
- [4] Keller L. and Friedmann A., Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit, Proc. First. Int. Congr. Appl. Mech. str. 395–405, 1924.
- [5] Lundgren T. S. Distribution functions in the statistical theory of turbulence, Phys. Fluids, **10**, str. 969–975, 1967
- [6] Monin A. S., Equations of turbulent motion, Prikl. Mat. Mekh, **31**, str. 1057–1967, 1967.
- [7] Novikov E. A., Kinetic equations for a vortex field, Soviet Physics-Doklady, **12**, str. 1006–1008, 1968
- [8] Hopf E. Statistical hydromechanics and functional calculus, J. Rational Mech. Anal., **1**, str. 87–122, 1952
- [9] Venturi D., The numerical approximation of nonlinear functionals and functional differential equations, Physics Reports, **732**, str. 1–102, 2018
- [10] Pozorski J., Zagadnienia turbulencji w mechanice płynów, Zeszyty Naukowe Instytutu Maszyn Przepływowych Polskiej Akademii Nauk w Gdańsku, **515**, str. 1–43, 2000.
- [11] Monin, A. S., and Obukhov, A. M., Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere (in Russian). Tr. Geofiz. Inst., Akad. Nauk SSSR, **24**, 163–187, 1954
- [12] Bluman, G. W., Kumei S., *Symmetries and Differential Equations*. Elsevier, 1989
- [13] Kolmogorov, A. N., Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. London, **A434**, 15–17, 1941
- [14] Oberlack M., A unified approach for symmetries in plane parallel turbulent shear flows, J. Fluid Mech., **427**, str. 299–328, 2001.
- [15] Lindgren, B., Osterlund, J.M. Johansson A.V., Evaluation of scaling laws derived from Lie group symmetry methods in zero-pressure-gradient turbulent boundary layers. J. Fluid Mech. **502**, 127–152, 2004
- [16] Marati, N., Davoudi, J., Casciola, C. M. Eckhardt, B. Mean profiles for a passive scalar in wall-bounded flows from symmetry analysis. Journal of Turbulence **7**, N61, 2006

- [17] Oberlack M., Rosteck A., New statistical symmetries of the multi-point equations and its importance for turbulent scaling laws, *Discrete Contin. Dyn. Sys., Ser. S*, **3**, str. 451–471, 2010.
- [18] Oberlack, M., Waclawczyk M., Rosteck A., Avsarkisov V., Symmetries and their importance for statistical turbulence theory. *Mech. Eng. Rev.*, **2**, 15–00157, 2015
- [19] Oberlack M., Hoyas S., Kraheberger S.V., Alcántara-Ávila F., and Laux J. Turbulence Statistics of Arbitrary Moments of Wall-Bounded Shear Flows: A Symmetry Approach, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 024502, 2022
- [20] Alcántara-Ávila F., García-Raffi L.M., Hoyas S., Oberlack M., Validation of symmetry-induced high moment velocity and temperature scaling laws in a turbulent channel flow, *Phys. Rev. E* **109**, 025104, 2024
- [21] She Z.-S., Chen X., Hussain F., Quantifying wall turbulence via a symmetry approach: a Lie group theory. *Journal of Fluid Mechanics* **827**, 322–356, 2017
- [22] She Z.-S., Zou H.-Y., Xiao M.-J., Chen X., Hussain F. Prediction of compressible turbulent boundary layer via a symmetry-based length model. *Journal of Fluid Mechanics.* **857**, 449–468, 2018
- [23] Friedrich R., Daitche A., Kamps O., Lüff J., Voßkuhle M., Wilczek M., The Lundgren-Monin-Novikov hierarchy: Kinetic equations for turbulence, *Com. Ren. Phy.* **13**, str. 929–953, 2012.
- [24] Klotz Ł., Lemoult G., Avila K., Hof B. Phase Transition to Turbulence in Spatially Extended Shear Flows *Phys. Rev. Lett.* **128**, 014502, 2022
- [25] Waclawczyk, M., Oberlack M., Reply to “Comment on ‘Statistical symmetries of the Ludgren-Monin-Novikov hierarchy.’” *Phys. Rev. E*, **92**, 067002, 2015
- [26] Boyko V. On Galilei invariance of continuity equation. *Proc. Inst. Math. NAS Ukraine* **30** 99–102, 2000
- [27] Grigoriev Y. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F. and Meleshko S. V. *Symmetries of Integro-Differential Equations: With Applications in Mechanics and Plasma Physics.* Dordrecht:Springer, 2010
- [28] Grebenev V.N., Waclawczyk M., Oberlack M. Conformal invariance of the Lungren–Monin–Novikov equations for vorticity fields in 2D turbulence. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **52**, 335501, 2017
- [29] Bernard D., Boffetta G., Celani A., Falkovich G. Conformal invariance in two-dimensional turbulence *Nat. Phys.* **2** 124–8, 2006
- [30] Kreichnan K. H. Inertial Ranges in Two Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids* **10**, 1417, 1967
- [31] Tabeling P., Two-dimensional turbulence: a physicist approach, *Physics Reports*, **362**, 1–62, 2002
- [32] Cho J. Y. N., Lindborg E., Horizontal velocity structure functions in the upper troposphere and lower stratosphere: 1. Observations, *J. Geophys. Res.*, **106**(D10), 10223–10232, 2001
- [33] Alexakis A., Marino R., Mininni P.D., van Kan A., Foldes R., Feraco F. Large-scale self-organization in dry turbulent atmospheres. *Science* **383**, 1005–1009, 2024
- [34] Bouchet F., Venaille A., Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows. *Phys. Rep.* **515**, 227–295, 2009
- [35] Held I. M., Pierrehumbert R. T., Garner S. T., Swanson K. L. Surface quasi-geostrophic model, *J. Fluid Mech.* **282**, 1–20, 1995

- [36] Horton W., Hasegawa A., Quasi-two-dimensional dynamics of plasmas and fluids. *Chaos: Interdiscip. J. Nonlinear Sci.*, **4**, 227, 1994
- [37] Fallah B., Saberi A. A., Sodoudi S., Emergence of global scaling behaviour in the coupled Earth-atmosphere interaction, *Sci Rep.* **6** 34005, 2016
- [38] Grachev A.A., Andreas E.L., Fairall C.W. et al. SHEBA flux-profile relationships in the stable atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol* **124**, 315–333, 2007.
- [39] Nieuwstadt F.T.M., The turbulent structure of the stable, nocturnal boundary layer. *J. Atmos. Sci.* **41**, 2202–2216, 1984
- [40] Sreenivasan, K., Prabhu, A., and Narasimha, R.: Zero-crossings in turbulent signals, *J. Fluid Mech.*, **137**, 251–272, 1983.
- [41] Kopeć, J. M., Kwiatkowski, K., de Haan, S., and Malinowski, S. P., Retrieving atmospheric turbulence information from regular commercial aircraft using Mode-S and ADS-B, *Atmos. Meas. Tech.*, **9**, 2253–2265, 2016
- [42] Schulz, B., Mellado J. P., Wind shear effects on radiatively and evaporatively driven stratocumulus tops. *J. Atmos. Sci.*, **75**, 3245–3263, 2018
- [43] Waclawczyk M., Gozigan A. S., Nzotungishaka J., Mohammadi M., Malinowski S. P., Comparison of Different Techniques to Calculate Properties of Atmospheric Turbulence from Low-Resolution Data, *Atmosphere*, **11** str. 2073–4433, 202
- [44] Taylor, G. I., Statistical theory of turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, **A151**, 421–444, 1935
- [45] Vassilicos, J. C., Dissipation in turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **47**, 95–114, 2015
- [46] Bos, W. J. T., Rubinstein R., Dissipation in unsteady turbulence. *Phys. Rev. Fluids*, **2**, 022601, 2017
- [47] Obligado M., Vassilicos J. C., The non-equilibrium part of the inertial range in decaying homogeneous turbulence, *European Physical Letters* **127**, 64004, 2019
- [48] Siebert H., and Coauthors, Observations of aerosol, cloud, turbulence, and radiation properties at the top of the marine boundary layer over the eastern North Atlantic Ocean: The ACORES campaign. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **102**, E123–E147, 2021
- [49] Wood R. Stratocumulus clouds. *Mon. Weather Rev.* **140**, 2373–2423, 2012
- [50] Nowak J. L., Siebert H., Szodry K.-E., Malinowski S. P., Coupled and decoupled stratocumulus-topped boundary layers: Turbulence properties. *Atmos. Chem. Phys.*, **21**, 10965–10991, 2021
- [D1] Waclawczyk M., Pozorski J., Minier J.-P.: Filtered density function modelling of near-wall scalar transport with pod velocity modes, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 30, pp. 7687 (2009)
- [D2] Béheïn C., Allery C., Waclawczyk M., Pozorski J.: Application of POD-based dynamical systems to dispersion and deposition of particles in turbulent channel flow, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 58, pp. 97-113 (2014)
- [D3] Waclawczyk M., Oberlack M.: Closure proposals for the tracking of turbulence-agitated gas-liquid interface in stratified flows *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 37(8), pp. 967-976, (2011)
- [D4] Waclawczyk M., Waclawczyk T.: A priori study for the modelling of ensemble-averaged velocity-interface correlations in the stratified air-water flows, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 52, pp. 40–49 (2015)

- [D5] Waławczyk M., Oberlack, M.: Application of the extended Lie group analysis to the Hopf functional formulation of the Burgers equation, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 54, pp. 072901, (2013)
- [D6] Oberlack, M., Waławczyk M., Rosteck, A., Avsarkisov, V.: Symmetries and their importance for statistical turbulence theory, *Bulletin of the JSME: Mechanical Engineering Reviews*, vol. 2(2), pp. 1-72, (2015); (invited review article)
- [D7] Janocha, D.D., Waławczyk M., Oberlack, M.: Lie symmetry analysis of the Hopf functional-differential equation for turbulence, *Symmetry*, vol. 7, pp. 1536-1566, (2015)
- [D8] Grebenev, V., Waławczyk M., Oberlack, M.: Conformal invariance of the LungrenMonin- Novikov equations for vorticity fields in 2D turbulence, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 50, 435502 (2017)
- [D9] Grebenev V. N., Waławczyk M., Oberlack, Conformal invariance of the zero-vorticity Lagrangian path in 2D turbulence, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 52, 225501, (2019)
- [D10] Waławczyk M., A. S. Gozigan; J. Nzotungishaka, M. Mohammadi; S P. Malinowski: Comparison of Different Techniques to Calculate Properties of Atmospheric Turbulence from Low-Resolution Data, *Atmosphere*, vol. 11, 199, (2020)
- [D11] Akinlabi E. O., Waławczyk M., Mellado J. P., Malinowski S. P.: Fractal reconstruction of sub-grid scales for large eddy simulation, *Flow, Turbulence and Combustion* Vol. 103, pp. 293–322, (2019)
- [D12] Yano, J., Waławczyk, M. Nondimensionalization of the Atmospheric Boundary-Layer System: Obukhov Length and Monin–Obukhov Similarity Theory. *Boundary-Layer Meteorol* 182, 417–439 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10546-021-00657-7>.

---

## 6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

---

### 6.1 Działalność dydaktyczna

---

Po uzyskaniu stopnia doktora prowadziłam następujące zajęcia dydaktyczne:

Dept. Mechanical Engineering, Technical University of Darmstadt, Niemcy:

- **Semestr letni 2014/15**
  - Fundamentals of Turbulence – *Ćwiczenia*
- **Semestr letni 2012/13 – Semestr letni 2014/15**
  - Student seminar – *Indywidualne projekty studenckie*

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski:

- **Semestr zimowy 2017/18**
  - Turbulence and atmospheric boundary layer – *Wykład*
- **Semestr zimowy 2019/20**
  - Turbulence and atmospheric boundary layer – *Wykład: 30h*
  - Matematyka I – *Ćwiczenia: 90h*
  - Statistical Physics A – *Ćwiczenia: 45h*
- **Semestr zimowy, 2020/21**
  - Fizyka na start – *Ćwiczenia: 30h*
  - Matematyka I – *Ćwiczenia: 90h*
  - Statistical Physics A – *Ćwiczenia: 45h*



- **Semestr letni 2020/21**
  - Turbulence and atmospheric boundary layer – *Wykład: 30h*
- **Semestr zimowy 2021/22**
  - Statistical Physics A – *Ćwiczenia: 45h*
  - Matematyka III dla optyków okularowych – *Ćwiczenia: 30h*
- **Semestr letni 2021/22**
  - Turbulence and atmospheric boundary layer – *Wykład: 30h*
  - Termodynamika z elementami fizyki statystycznej – *Ćwiczenia: 45h*
- **Semestr zimowy, 2022/23**
  - Statistical Physics A – *Ćwiczenia: 45h*
  - Matematyka III dla optyków okularowych – *Ćwiczenia: 30h*
- **Semestr letni 2022/23**
  - Turbulence and atmospheric boundary layer – *Wykład: 30h*
  - Termodynamika z elementami fizyki statystycznej – *Ćwiczenia: 45h*
  - Geophysical Laboratory – *Laboratorium*
- **Semestr zimowy 2023/24**
  - Statistical Physics A – *Ćwiczenia: 45h*
  - Matematyka III dla optyków okularowych – *Ćwiczenia: 30h*
  - Geophysical Laboratory – *Laboratorium*
- **Semestr letni, 2022/23**
  - Turbulence and atmospheric boundary layer – *Wykład: 30h*
  - Termodynamika z elementami fizyki statystycznej – *Ćwiczenia: 45h*
  - Geophysical Laboratory – *Laboratorium*
  - Selected topics in fluid mechanics – *Ćwiczenia: 30h*

Byłam promotorem lub współpromotorem następujących prac magisterskich:

1. **D. Ciesielski:** „*LES simulations of turbulent jets*”, Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej, 2007
2. **S.V. Kraheberger:** „*Numerical Study of the Intermittency Region in Two-Fluid Turbulent Flow*”, Dept. Mechanical Engineering, Technical University of Darmstadt, Niemcy (2014)
3. **D. Janocha:** „*Lie symmetry analysis of the Hopf functional-differential equation for turbulence*”, Dept. Mechanical Engineering, Technical University of Darmstadt, Niemcy, 2015
4. **P. Jędrejko:** „*Formation of thermal vortex rings*”, Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Matematycznego i Komputerowego, Uniwersytet Warszawski, 2023

oraz promotorem pomocniczym pracy doktorskiej

1. **E. O. Akinlabi** „*Analysis and Modelling of Small-Scale Turbulence*”, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski, 2020

---

## 6.2 Działalność organizacyjna

---

- Członek “Local Organising Committee” konferencji Interdisciplinary Turbulence Conference (iT<sub>i</sub>), Bertinoro/Italy, 2014
- Członek stowarzyszony Sekcji Mechaniki Płynów, Komitetu Mechaniki PAN od listopada 2018
- Członek lokalnego komitetu organizacyjnego 3rd Workshop of COMPLETE (Cloud-MicroPhysics-Turbulence-Telemetry) ITN - ETN Network 04-08.02.2019
- Członek Rady Wydziału Fizyki kadencji 2020–2024
- Członek komisji kwalifikacyjnej do Szkoły Doktorskiej Nauk Ścisłych i Przyrodniczych w roku 2022

---

### 6.3 Popularyzacja nauki

---

W latach 2017, 2019–2022 w ramach Festiwalu Nauki na Uniwersytecie Warszawskim przygotowywałam:

- Warsztaty dla dzieci pt. „Jaka to chmura?”
- Lekcje festiwalowe dla uczniów pt. „Czy turbulencje są niebezpieczne?”, „Dlaczego tak trudno przewidzieć pogodę?”
- Prezentacje festiwalowe (online na platformie youtube) „Van Gogh i inni czyli fizyka spotyka sztukę”, „Jaka to chmura?”, „Krótki film o żeglowniu”

Po Festiwalu Nauki w roku 2020 zostałam zaproszona do radia Kampus, gdzie udzieliłam wywiadu o związkach fizyki ze sztuką. Napisałam również artykuły popularnonaukowe do czasopisma Fizyka w Szkole:

- Waclawczyk M., Waclawczyk Z., Van Gogh i inni, czyli fizyka spotyka sztukę. Fizyka w Szkole z Astronomią: czasopismo dla nauczycieli. nr 1, str. 26–27, 2021.
- Waclawczyk M., Czy turbulencje są niebezpieczne? Fizyka w Szkole z Astronomią: czasopismo dla nauczycieli. nr 3, str. 15–17, 2021.
- Waclawczyk M., O fizyce żeglownia. Fizyka w Szkole z Astronomią: czasopismo dla nauczycieli. nr 6, str. 28–30, 2021.

We współpracy z portalem Żapytaj fizyka"udzieliłam odpowiedzi do kilku pytań z "fizyki dnia codziennego".

W roku 2023 wystąpiłam, razem z dr Jakubem Nowakiem, w filmie promocyjnym dotyczącym artykułu naukowego H7 wchodzącego w skład osiągnięcia habilitacyjnego, opublikowanego w ramach projektu NextGems:

- Waclawczyk M., Nowak J. L., *How Can We Detect Non-Stationarities of Turbulence in the Atmosphere?*, Latest Thinking, 2023 <https://doi.org/10.21036/LTPUB101137>

---

### 7 Inne informacje, ważne punktu widzenia, dotyczące jego/jej kariery zawodowej

---

Pozyskane finansowanie (jako kierownik projektu):

- Projekt „Modelling of turbulence-interface interaction in two fluid systems”, finansowany przez DFG (Deutscher Forschungsgemeinschaft) w latach 2012–2014, projekt numer 220504256
- „Opis turbulencji jako pola stochastycznego i modelowanie oparte na grupach symetrii” finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki w latach 2015–2019 (projekt numer 2014/15/B/ST8/00180)
- „Stabilna atmosferyczna warstwa graniczna: poza teorią Monina i Obukhova” finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki w latach 2021–2024 (projekt numer 2020/37/B/ST10/03695)

Wykłady zaproszone na konferencjach/sympozyjach naukowych:

- Interdisciplinary Turbulence Conference 2014, Bertinoro/Włochy organizatorzy: prof. M. Oberlack, prof. J. Peinke, prof. A. Talamelli
- Summer School of Multiphase Flows 2015, Jantar/Polska organizator: prof. J. Pozorski
- Symposium „Perspectives on turbulence and wind energy research”, 2017, Oldenburg/Niemcy, organizatorzy: Prof. M. Kühn, prof. J. Peinke,
- Warsztaty „Opening Workshop on turbulent flows” w ramach Lille Turbulence Program 2023, Lille/Francja, organizator: prof. J. C. Vassilicos

Członkostwo komitetu doradczego (Advisory Committee) konferencji:

- „Eleventh International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena” (TSFP11), 2019
- „Twelfth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP12), 2022

W roku 2024 zostałam zaproszona do udziału w Radzie Programowej

- Konferencji Sympozjum Młodych Naukowców Wydziału Fizyki, Warszawa 2024

oraz do współorganizowania sesji S10-Turbulence and Reactive Flows na konferencji

- 95th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), która ma się odbyć w Poznaniu, w kwietniu 2025 roku.

Recenzje prac doktorskich:

- Mina Golshan Kovi „Cloud Turbulence Microphysics At Interfaces: A DNS model with phase change and droplet” Politecnico di Milano, Italy, 2023.

Stypendia, nagrody, i wyróżnienia

- Nagroda indywidualna III stopnia Rektora Uniwersytetu Warszawskiego, 2023
- Status IOP Trusted Reviewer, przyznany przez Institute of Physics, 2019
- Nagroda Prezesa Rady Ministrów za wyróżniającą się pracę doktorską, 2009
- Stypendium TU Darmstadt „Wiedereinstiegsstipendium” 2010-2011
- Stypendium Alexandra von Humboldta 2008-2009
- Stypendium krajowe Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej dla młodych naukowców w roku 2005
- Stypendium Deutcher Akademischer Austauschdienst (DAAD) 2003-2004

.....  
(podpis)