

Autoreferat

1. Imię i Nazwisko.
Adam Szereszewski
2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne - z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.
 - a) **Magister Fizyki** – Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, 1999, tytuł rozprawy: *Redukcja równań Einsteina za pomocą symetrii*, promotor: prof. Jacek Tafel
 - b) **Doktor Nauk Fizycznych** – Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, 2004, tytuł rozprawy: *Rozwiązania równań Einsteina i równań Rarity-Schwingera*, promotor: prof. Jacek Tafel
3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/artystycznych.
 - a) 1999–2004 **studia doktoranckie**, Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
 - b) od 2005 **adiunkt**, Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
 - c) 2005–2006 **staż po doktoracie**, Wydział Matematyki, Uniwersytet New South Wales w Sydney w grupie prof. C. Rogersa i prof. W. Schiefa.
4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):
 - a) tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego

Zupełnie całkowalne równania w teorii sprężystości

- b) Publikacje stanowiące cykl
 - [H1] W. K. Schief, **A. Szereszewski**, C. Rogers, *The Lamé equation in shell membrane theory*, J. Math. Phys. **48**, No. 7, 073510 (2007).
 - [H2] W. K. Schief, **A. Szereszewski**, C. Rogers, *On shell membranes of Enneper type: generalized Dupin cyclides*, J. Phys. A, Math. Theor. **42**, No. 40, 404016 (2009).
 - [H3] C. Rogers, **A. Szereszewski**, *A Bäcklund transformation for L-isothermic surfaces*, J. Phys. A, Math. Theor. **42**, No. 40, 404015 (2009).
 - [H4] **A. Szereszewski**, *L-isothermic and L-minimal surfaces*, J. Phys. A, Math. Theor. **42**, No. 11, 115203 (2009).
 - [H5] C. Rogers, W. K. Schief, **A. Szereszewski**, *Loop soliton interaction in an integrable nonlinear telegraphy model: reciprocal and Bäcklund transformations*, J. Phys. A, Math. Theor. **43**, No. 38, 385210 (2010).
- c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

1 Wstęp

Modele fizyczne opisujące zjawiska w otaczającym nas świecie opierają się często na nieliniowych równaniach różniczkowych. Wśród nich zdecydowanie wyróżnioną rolę pełnią tzw. równania zupełnie całkowalne, zwane także równaniami solitonowymi. Charakteryzują się one bardzo ciekawymi własnościami matematycznymi i choć stanowią bardzo szczególną klasę równań pojawiają się, czasem dość nieoczekiwanie, w bardzo wielu działach fizyki, np. w teorii względności, teorii pola, nieliniowej optyce, teorii sprężystości, hydrodynamice, magneto hydrodynamice czy fizyce plazmy.

Nie istnieje, powszechnie przyjęta przez wszystkich, ścisła definicja zupełnej całkowalności. Przykładowo, N. J. Hitchin w [1] podaje trzy cechy jakie powinny być spełnione przez równania posiadające tę własność; są to: (i) istnienie wielu zasad zachowania, (ii) obecność geometrii algebraicznej, (iii) możliwość konstrukcji ścisłych rozwiązań. Ostatnia cecha oznacza w praktyce istnienie metod generacji wielu (nieskończenie wielu) ścisłych rozwiązań. Taką metodą jest transformacja Bäcklunda, która umożliwia konstrukcję nowych rozwiązań z już znanych. Jednak, co najistotniejsze, poprzez tzw. nieliniową zasadę superpozycji transformacja ta pozwala generować nowe rozwiązania w sposób czysto algebraiczny, bez użycia całkowania. Inną, charakterystyczną cechą równań zupełnie całkowalnych jest istnienie tzw. pary Laxa, czyli układu liniowego, którego warunkami zgodności są rozpatrywane równania nieliniowe. To z kolei jest podstawą do stosowania metody odwrotnego rozpraszania.

Ogromna większość równań solitonowych pojawia się w fizyce; czasem wielokrotnie, w zupełnie różnych działach. Przykładem jest równanie sinusa-Gordona¹

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \sin \omega \quad (\text{sG})$$

analizowane przez matematyków (m.in. przez E. Boura [2], L. Bianchiego [3],[4] i A. V. Bäcklunda [5]) przy badaniu powierzchni pseudosferycznych. W kontekście fizycznym równanie to pojawia się przy rozpatrywaniu dyslokacji w kryształach [6], tunelowaniu w nadprzewodnikach [7], propagacji ultrakrótkich impulsów światła [8] oraz nieliniowej teorii oddziaływań cząstek elementarnych [9]. Niezwykle istotne jest to, że nieliniowa zasada superpozycji, pozwalająca generować nowe rozwiązania, nie jest jedynie matematyczną ciekawostką. Tak otrzymane rozwiązania okazują się mieć fizyczne znaczenie. Doskonałego przykładu dostarcza właśnie równanie sinusa-Gordona. W latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku G. L. Lamb [10] zastosował zasadę nieliniowej superpozycji do analizy rozkładu impulsów $2N\pi$ na N stabilnych impulsów 2π . Doświadczalnie efekt ten został potwierdzony w 1970 roku przez H. M. Gibbsa i R. E. Slushera, którzy zaobserwowali rozpad impulsu 6π na trzy impulsy 2π w parach rubidu [11].

Do niedawna wszystkie równania solitonowe pojawiające się w fizyce były otrzymywane w wyniku przybliżeń równań podstawowych. Przykładem jest równanie Kortewega-de Vriesa [12]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (\text{KdV})$$

którego rozwiązanie $u(x, t) = \frac{v}{2} \cosh^{-2} \left[\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt) \right]$ poprawnie opisuje pojedynczą falę rozchodzącą się z prędkością v w prostokątnym kanale. Równanie (KdV) zostało wyprowadzone z równań hydrodynamiki w przypadku 2-wymiarowego bezwirowego ruchu nieściśliwej, nielepkiej cieczy przy założeniu odpowiednich warunków brzegowych i przede wszystkim dokonując wielu przybliżeń (m.in. przyjmując, iż długość kanału jest znacznie większa niż jego głębokość oraz amplituda fali jest mała w porównaniu do głębokości). Podobnie jest z innymi równaniami solitonowymi modelującymi zjawiska fizyczne. Wyjątkiem, o którym warto wspomnieć, jest równanie Ernsta [13]

$$(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}) \left(\mathcal{E}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_{\rho} + \mathcal{E}_{zz} \right) = 2 (\mathcal{E}_{\rho}^2 + \mathcal{E}_z^2), \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, z) \quad (\text{Er})$$

stanowiące redukcję próżniowych równań Einsteina $R_{\mu\nu} = 0$, w przypadku gdy czasoprzestrzeń dopuszcza istnienie dwóch, komutujących wektorów Killinga oraz dystrybucja prostopadła do tych wektorów

¹Stosujemy notację, w której indeksy $u, v, x, y, t, \alpha, \beta, \dots$ oznaczają pochodne cząstkowe, czyli $\omega_{uv} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}$

jest całkowalna. Pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego stulecia D. Maison udowodnił, że równanie Ernsta jest zupełnie całkowalne [14],[15]. Nie jest to zaskakujące, gdy zauważy się, że równanie to może być interpretowane jako tzw. system Lelievre [16],[17] dla 2-wymiarowej powierzchni zanurzonej w 3-wymiarowej przestrzeni Minkowskiego [18],[19]. Otwartym pytaniem pozostaje jednak zupełna całkowalność pełnych równań Einsteina. Wciąż nie znamy odpowiedzi, pomimo że znany jest układ liniowy, którego warunki całkowalności sprowadzają się do równań Einsteina ze stałą kosmologiczną $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$. Układem tym jest liniowe równanie Rarity-Schwingera $\nabla_{A\dot{B}} \Psi^{AC\dot{D}} = 0$ na pole spinorowe $\Psi^{AB\dot{C}}$ opisujące cząstkę elementarną o spinie $\frac{3}{2}$ [20],[19].

Podobnie jak równanie Ernsta, równania solitonowe rozważane w pracach [H1]-[H5] zostały otrzymane bez użycia metod przybliżonych.

1.1 Geometria 2-wymiarowych powierzchni zanurzonych w przestrzeni \mathbb{E}^3

Z wieloma równaniami zupełnie całkowalnymi wiąże się nierozzerwalnie geometria różniczkowa powierzchni 2-wymiarowych zanurzonych w 3-wymiarowej przestrzeni płaskiej. Równania solitonowe pojawiają się tu najczęściej jako redukcje równań zgodności opisujących zanurzenie (czyli równań Gaussa-Mainardi-Codazzi).

Podane poniżej krótkie omówienie własności równania sinusa-Gordona (sG) jako reprezentanta równań solitonowych pozwoli nam wprowadzić oznaczenia i wielkości geometryczne wykorzystywane w dalszej części pracy.

W matematyce równanie (sG) pojawia się przy analizie 2-wymiarowych powierzchni o stałej ujemnej krzywiznie Gaussa zanurzonych w 3-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej \mathbb{E}^3 . Teoria powierzchni 2-wymiarowych pełni kluczową rolę w omawianych pracach, dlatego poniżej zostanie opisane jej zasadnicze części.

Niech $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ oznacza 2-wymiarową powierzchnię,

$$\Sigma : (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) \in \mathbb{E}^3 \quad (1)$$

sparametryzowaną lokalnymi współrzędnymi $u, v \in \mathbb{R}$. W dowolnym, generycznym punkcie p powierzchni Σ wektory \mathbf{r}_u oraz \mathbf{r}_v są styczne do Σ i wyznaczają płaszczyznę styczną $T_p\Sigma$. Jednostkowy wektor normalny do powierzchni Σ wyraża się wzorem

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}. \quad (2)$$

Zgodnie z twierdzeniem Bonneta Σ jest jednoznacznie wyznaczona z dokładnością do obrotów i przesunięć w \mathbb{E}^3 poprzez pierwszą formę fundamentalną (metrykę)

$$g_I = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = E du^2 + 2F dudv + G dv^2 \quad (3)$$

oraz drugą formę fundamentalną

$$g_{II} = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N} = e du^2 + 2f dudv + g dv^2, \quad (4)$$

gdzie \cdot oznacza standardowy iloczyn skalarny w \mathbb{E}^3 . Można pokazać [17], że zawsze istnieją współrzędne (α, β) , w których obie formy fundamentalne są diagonalne, tzn.

$$g_I = A_1^2 d\alpha^2 + A_2^2 d\beta^2, \quad g_{II} = \kappa_1 A_1^2 d\alpha^2 + \kappa_2 A_2^2 d\beta^2. \quad (5)$$

Takie współrzędne nazywamy krzywiznowymi. Funkcje $A_1, A_2, \kappa_1, \kappa_2$ są związane ze sobą warunkami zgodności (podanymi w (9)). Trzecia forma fundamentalna

$$g_{III} = d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{N} \quad (6)$$

zadaje metrykę na sferze zdefiniowanej przez odwzorowanie Gaussa przypisujące punktowi $p \in \Sigma$ wektor normalny \mathbf{N} zaczepiony w tym punkcie. Forma g_{III} nie jest nową wielkością geometryczną niezbędną

do opisu powierzchni $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$. Łatwo sprawdzić, że zachodzi $g_{III} = 2\mathcal{H}g_{II} - \mathcal{K}g_I$, gdzie $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ jest średnią krzywizną, a $\mathcal{K} = \kappa_1\kappa_2$ krzywizną Gaussa. Jednak pełni ona bardzo ważną rolę w naszych rozważaniach, więc warto ją wprowadzić już teraz.

Równanie sinusa-Gordona (sG) jest równaniem zgodności, które pojawia się przy badaniu pseudosfery, czyli powierzchni o stałej ujemnej krzywiznie Gaussa $\mathcal{K} = -1/\rho^2 = \text{const}$. Wybierając odpowiednio współrzędne (u, v) nietrudno pokazać, że formy fundamentalne $g_I = du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2$, $g_{II} = \frac{2}{\rho}\sin\omega dudv$ definiują pseudosferę, o ile funkcja ω spełnia (sG). Równania Gaussa-Weigartena, opisujące zmiany reperu wektorów stycznych i normalnego do powierzchni, stanowią układ liniowy, którego warunkiem zgodności jest równanie (sG). Transformację Bäcklunda oraz nieliniową zasadę superpozycji dla równania sinusa-Gordona (sG) otrzymuje się metodami geometrycznymi.

2 Zupełnie całkowalne równania w modelach teorii sprężystości

Cykl prac [H1]-[H5] stanowi wkład w projekt *Hidden Geometric Structure in Nonlinear Physical Systems*, którego celem jest poszukiwanie, identyfikacja i opis układów zupełnie całkowalnych wywodzących się z równań fizyki matematycznej. Bardzo istotne jest jednak to, że w ramach tego projektu układy takie nie są otrzymywane w wyniku stosowania do równań pierwotnych metod aproksymacyjnych. Podstawową metodą ich pozyskiwania jest odpowiednia redukcja równań, np. poprzez nałożenie odpowiednich więzów geometrycznych. Dokładnie w taki sposób zostały uzyskane równania opisane w omawianych pracach: w [H1] rozważono układ równań równowagi membrany (reprezentowanej przez powierzchnię 2-wymiarową) przy założeniu, że wewnętrzne napięcia nie są zdeterminowane przez jej kształt. Inaczej mówiąc, opisano sytuację gdy równania nie pozwalają w jednoznaczny sposób wyznaczyć napięć. Szczegółowa analiza tego przypadku doprowadziła do sformułowania analitycznej i geometrycznej charakterystyki takich powierzchni [H1]. Okazało się, że powierzchnie reprezentujące takie membrany należą do tzw. powierzchni L-izotermicznych występujących naturalnie w geometrii Laguerre'a. W rozważanych równaniach powierzchnie L-izotermiczne nie są jednak dowolne, lecz spełniają dodatkowe więzy. Opis wprowadzony w [H1] umożliwił wyróżnienie i przeanalizowanie szczególnych typów badanych powierzchni, które dodatkowo posiadają płaskie obie linie krzywiznowe, czyli stanowiących podklasę powierzchni Ennepera. W skład nich wchodzi m.in. uogólnione cyklidy Dupina [H2]. Okazuje się, że metoda analityczna wprowadzona w [H1] pozwala na opis dowolnych powierzchni L-izotermicznych poprzez badania niejednorodnego równania liniowego. Ten rezultat stał się podstawą do pogłębionej analizy przeprowadzonej w [H3]-[H4]. Wedle wiedzy autora analiza powierzchni L-izotermicznych tą metodą nie jest powszechnie znana. W pracy [H3] przeanalizowano transformację Bäcklunda wykorzystując powyższe podejście. Wykazano, że transformacji tej odpowiada tzw. transformacja Darboux liniowego równania stoważyszonego z powierzchnią L-izotermiczną. Głównym rezultatem pracy [H4] jest wyprowadzenie reprezentacji typu Weierstrassa dla specjalnej podklasy badanych powierzchni zwanych powierzchniami L-minimalnymi. W tym przypadku rozwinięta metoda okazała się bardzo skuteczna i owocna. W pracy [H5] poddano analizie inne równanie, zwane równaniem telegraficznym, mające swe źródło w modelu opisującym propagację naprężeń w niejednorodnym ośrodku sprężystym. Otrzymuje się je poprzez wybór szczególnego równania stanu ośrodka. Konstrukcja transformacji Bäcklunda dla tego równania umożliwiła wykazanie jego własności solitonowych. Ważnym rezultatem było wykrycie i opis prawdopodobnie wcześniej nie obserwowanego zachowania rozwiązań reprezentujących oddziałujące solitony. Przechodzące przez siebie solitony wydają się wymieniać quasi-cząstkę [H5].

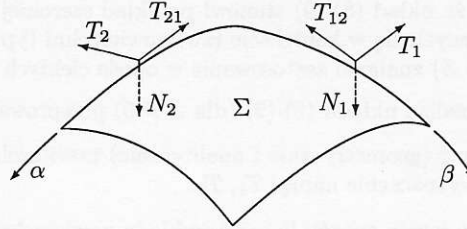
Warto też dodać, że nie istnieją ogólne metody lub algorytmy pozwalające generować równania solitonowe. Każde nowe równanie (czy układ równań) jest więc z zainteresowaniem przyjmowane nie tylko przez matematyków, ale także fizyków.

Poniżej, w dalszej części niniejszego rozdziału, opisujemy w szczegółach rezultaty zawarte w serii prac [H1]-[H5]. Ostatni rozdział zawiera listę głównych wyników wraz z odnośnikami do konkretnych formuł.

Szczegółowy opis rozpoczynamy od krótkiego wyprowadzenia układu równań na równowagę mechaniczną powłoki i membrany [21] oraz pokazania, że przy odpowiedniej redukcji układ ten staje się zupełnie całkowalny. W teorii sprężystości *powłoką* (*shell*) nazywamy strukturę ograniczoną dwoma powierzchniami Σ_- , Σ_+ , pomiędzy którymi odległość jest stała i mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami. Przyjmuje się ponadto, że wszystkie własności powłoki można opisać przy użyciu dwuwymiarowej powierzchni Σ (*middle surface*) znajdującej się w równej odległości od Σ_- i Σ_+ (rys.1).



Rys.1: Model powłoki.



Rys.2: Siły działające na Σ .

Kolejnym, kluczowym uproszczeniem jest założenie, zgodnie z którym tensor naprężeń σ_{ij} można zastąpić siłami i momentami sił jakie działają na Σ . Na rys. 2 zaznaczono sześć sił (na jednostkę długości)² T_1 , T_{12} , N_1 , T_2 , T_{21} , N_2 działających na powierzchnie Σ . Dodatkowo na Σ działają cztery momenty sił, które wraz z powyższymi siłami wchodzi w skład sześciu równań równowagi powłoki. W dalszych rozważaniach zakładamy, że momenty sił są pomijalne, co sprowadza zagadnienie do tzw. teorii membran (*shell membrane theory*). W efekcie tej redukcji dostajemy: $N_1 = N_2 = 0$, $T_{12} = T_{21} := S$ i równania równowagi przyjmują postać

$$\begin{aligned} (A_2 T_1)_\alpha + (A_1 S)_\beta + A_{1\beta} S - A_{2\alpha} T_2 + A_1 A_2 p_1 &= 0, \\ (A_1 T_2)_\beta + (A_2 S)_\alpha + A_{2\alpha} S - A_{1\beta} T_1 + A_1 A_2 p_2 &= 0, \\ \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + p_3 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie (p_1, p_2, p_3) są składowymi nacisku (*surface loading*), czyli zewnętrznego ciśnienia działającego na membranę. Przy zadanej geometrii powierzchni Σ , tzn. przy zadanych funkcjach A_1 , A_2 , κ_1 i κ_2 oraz zadanym ciśnieniu system (7) jest dobrze określonym układem równań na wielkości T_1 , T_2 i S . Pamiętaj należy jednak, że A_1 , A_2 , κ_1 i κ_2 nie są dowolne i muszą spełniać równania zgodności Gaussa-Mainardi-Codazzi (9) (podane niżej).

W pracach [H1]-[H2] zbadano szczegółowo układ (7) w przypadku, gdy $S = 0$ oraz występuje jedynie stała siła ($p_3 = Z = \text{const.}$) działająca wzdłuż normalnej do powierzchni. Wówczas równania równowagi (7) redukują się do

$$\begin{aligned} T_{1\alpha} + (\log A_2)_\alpha (T_1 - T_2) &= 0, \\ T_{2\beta} + (\log A_1)_\beta (T_2 - T_1) &= 0, \\ \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + Z &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie funkcje A_1 , A_2 , κ_1 i κ_2 spełniają równania Gaussa-Mainardi-Codazzi (GMC)

$$\begin{aligned} \kappa_{2\alpha} + (\log A_2)_\alpha (\kappa_2 - \kappa_1) &= 0, \\ \kappa_{1\beta} + (\log A_1)_\beta (\kappa_1 - \kappa_2) &= 0, \\ \left(\frac{A_{2\alpha}}{A_1}\right)_\alpha + \left(\frac{A_{1\beta}}{A_2}\right)_\beta + \kappa_1 \kappa_2 A_1 A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

System (8) wraz z równaniami (9) stanowi nieliniowy układ równań, z którego m.in. wynika, że kształt powierzchni Σ jest ograniczony równaniami równowagi (8). Inaczej mówiąc, równania (8) nakładają

²Wskaźnik 1 odpowiada współrzędnej α , a wskaźnik 2 współrzędnej β .

więzy na układ (9) i nie każdy kształt membrany jest realizowalny. W najprostszym przypadku $T_1 = T_2 = c = \text{const.}$ i równania równowagi (8) redukują się do znanego równania Younga-Laplace'a:

$$\mathcal{H} = \kappa_1 + \kappa_2 = -c^{-1}Z = \text{const.},$$

z którego wynika, że powierzchnia Σ ma stałą krzywiznę średnią, a w szczególnym przypadku (gdy $Z = 0$) jest powierzchnią minimalną.

Warto dodać, że układ (8)-(9) stanowi przykład szerokiej klasy systemów równań zupełnie całkowalnych pojawiających się w kontekście tzw. powierzchni typu O [22]. Poza tym jego uogólnienie (dla danego niestalego Z) znalazło zastosowanie w opisie ciekłych kryształów [23].

Szczegółowa analiza układu (8)-(9) (dla $Z \neq 0$) przeprowadzona w [H1] pozwoliła

- i) w pełni opisać (geometrycznie i analitycznie) powierzchnie Σ , dla których nie jest możliwe jednoznaczne wyznaczenie napięć T_1, T_2 ,
- ii) wyznaczyć w jawny sposób liczne przykłady powierzchni o własnościach i).

W generycznym przypadku napięcia T_1 i T_2 mogą być wyznaczone w następujący sposób. Różniczkując po α oraz β równanie liniowe $(8)_3$ wyznaczamy dwa nowe równania zawierające $T_{1\beta}$ oraz $T_{2\alpha}$. Te dwa równania wraz z równaniami $(8)_{1,2}$ pozwalają wyliczyć wszystkie pochodne funkcji T_i , a tym samym wyznaczyć warunki całkowalności $T_{i\alpha\beta} = T_{i\beta\alpha}$ sprowadzające się do równania

$$\mu T_1 + \nu T_2 = 0, \quad (10)$$

gdzie μ, ν wyrażają się przez $A_1, A_2, \kappa_1, \kappa_2$ oraz ich pochodne. Dopóki μ i ν nie znikają jednocześnie, napięcia mogą być wyznaczone z układu $(8)_3$ i (10). W przypadku gdy $\mu = \nu = 0$ istnieje jednoparametrowa rodzina rozwiązań T_1 i T_2 , a więc napięcia nie mogą być jednoznacznie obliczone. Ten przypadek jest określony przez warunki

$$\begin{aligned} \left[\log \left(\frac{A_1 \kappa_1}{A_2 \kappa_2} \right) \right]_{\alpha\beta} &= 0, \\ \log(\kappa_1 \kappa_2)_{\alpha\beta} + (\log A_1)_\beta (\log \kappa_1)_\alpha + (\log A_2)_\alpha (\log \kappa_2)_\beta - (\log \kappa_1)_\alpha (\log \kappa_2)_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Szczegółowa analiza pokazuje, że jeśli warunek $(11)_1$ jest spełniony wraz z równaniami $(8)_3$ i (10) to zachodzi $(11)_2$. Ten fakt umożliwi geometryczną charakteryzację rozpatrywanych tutaj powierzchni, gdyż $(11)_1$ oznacza, że w odpowiednio przeskalowanych współrzędnych krzywiznowych (α, β) trzecia forma fundamentalna g_{III} powierzchni Σ jest konforemnie płaska:

$$g_{III} = e^{2\theta} (d\alpha^2 + d\beta^2). \quad (12)$$

Dostajemy więc następujący [H1]

Fakt 1. *Napięcia w membranie są jednoznacznie wyznaczone, o ile trzecia forma fundamentalna powierzchni Σ nie jest konforemnie płaska.*

Możliwa jest także charakterystyka geometryczna przy użyciu transformacji Combescure powierzchni Σ do powierzchni minimalnej.

Rozważane powyżej powierzchnie mogą być także scharakteryzowane w sposób analityczny [H1]; mówi o tym następujący

Fakt 2. *Jednoparametrowa rodzina rozwiązań T_1, T_2 jest wyznaczona przez funkcję θ , spełniającą*

$$\theta_{\alpha\alpha} + \theta_{\beta\beta} = -e^{2\theta}, \quad (e^{-\theta})_{\alpha\beta} = -\frac{f'g'}{4(f+g)^2} e^{-\theta}, \quad (13)$$

gdzie $f = f(\alpha), g = g(\beta)$.

Warto zauważyć, że funkcje f i g nie są dowolne, gdyż kompatybilność obu równań (13) wymaga by

$$(\partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2) \frac{f'g'}{(f+g)^2} = 0, \quad (14)$$

co z kolei oznacza, że obie funkcje (w generycznym przypadku) są funkcjami eliptycznymi. Okazuje się, że możliwe jest przeformułowanie Faktu 2, tak by wprowadzić do opisu równanie liniowe oraz by otrzymać jawny wzór na wektor wodzący \mathbf{r} powierzchni Σ . W tym celu konieczne jest po pierwsze scałkowanie układu Gaussa-Weingartena

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_\beta & -e^\theta \\ \theta_\beta & 0 & 0 \\ e^\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_\alpha & 0 \\ -\theta_\alpha & 0 & -e^\theta \\ 0 & e^\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (15)$$

określającego reper unormowanych wektorów stycznych \mathbf{X} , \mathbf{Y} i wektora normalnego $\mathbf{N} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Równania (15) można rozwiązać, wyrażając wynik w terminach funkcji holomorficznej $\rho(z)$, takiej że θ zadana formułą

$$e^\theta = \frac{2|\rho'|}{1 + \rho\bar{\rho}}, \quad \rho = \rho(z), \quad z = \alpha + i\beta \quad (16)$$

jest rozwiązaniem równania Liouville'a (13)₁. Bezpośrednia droga do znalezienia wektora wodzącego \mathbf{r} polega na scałkowaniu równań

$$\mathbf{r}_\alpha = A_1 \mathbf{X}, \quad \mathbf{r}_\beta = A_2 \mathbf{Y}, \quad (17)$$

co technicznie jest trudne (np. wymaga wcześniejszego wyznaczenia A_1 i A_2). Całkowanie powyższych formuł może być zastąpione przez różniczkowanie. Dokonuje się tego poprzez wprowadzenie funkcji

$$b = \mathbf{r} \cdot \mathbf{N} \quad (18)$$

mierzącej odległość od początku układu w \mathbb{E}^3 do punktu \mathbf{r} na powierzchni Σ . Przepisanie równań (9), (15), (17) w terminach b znacznie upraszcza analizę problemu i pozwala dowieść następujący [H1]

Fakt 3. *Wektor wodzący powierzchni reprezentującej membranę o nieokreślonych napięciach ma postać*

$$\mathbf{r} = e^{-\theta} b_{0\alpha} \mathbf{X} + e^{-\theta} b_{0\beta} \mathbf{Y} + (b_0 + \mathfrak{b}) \mathbf{N}, \quad (19)$$

gdzie $\mathfrak{b} = \text{const.}$, funkcja b_0 jest dana przez

$$b_0 = \frac{2T_0}{|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2} \quad (20)$$

oraz T_0 jest szczególnym, rzeczywistym rozwiązaniem niejednorodnego równania Lamé

$$T_{zz} + \left(\frac{1}{4}\wp(z) + C\right)T = \frac{P}{4}, \quad C = \text{const.} \quad (21)$$

z niejednorodnością $P(\alpha, \beta)$ taką, że $P^2 = f(\alpha) + g(\beta)$. Funkcje $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ spełniają jednorodną wersję równania (21), a reper $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{N})$ jest dany przez

$$\begin{aligned} \mathbf{X} + i\mathbf{Y} &= \frac{1}{|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2} \begin{pmatrix} \Phi_2^2 - \Phi_1^2 \\ i(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \\ 2\Phi_1\Phi_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{N} &= -\frac{1}{|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2} \begin{pmatrix} \Phi_1\bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_1\Phi_2 \\ i(\bar{\Phi}_1\Phi_2 - \Phi_1\bar{\Phi}_2) \\ |\Phi_1|^2 - |\Phi_2|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Powyższy fakt jest jednym z głównych rezultatów pracy [H1].

Funkcja $\wp(z; g_2, g_3)$ pojawiająca się w potencjale $U = \frac{1}{4}\wp + C$ równania (21) oznacza eliptyczną funkcję Weierstrassa. Warto wspomnieć, iż jest to kolejna przesłanka przemawiająca za zupełną całkowalnością rozważanych tu równań. Funkcja Weierstrassa \wp występuje w geometrii algebraicznej przy rozważaniu krzywej algebraicznej trzeciego stopnia $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. Według niektórych matematyków [1] geometria algebraiczna nierozłącznie pojawia się przy badaniu zupełnej całkowalności (np.

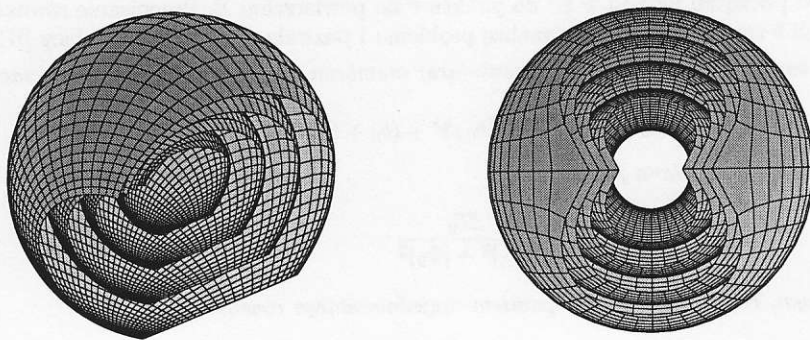
występuje przy badaniu równań Eulera opisujących ruch obrotowy ciała sztywnego). Co więcej, Fakt 3 umożliwia konstrukcję wielu przykładów, w tym tzw. uogólnionych cyklid Dupina szczególnie przeanalizowanych w [H2]. Postać wektora wodzącego (19) w jawny sposób ukazuje bardzo ważną własność rozwiązania. Jeśli \mathbf{r} jest wektorem wodzącym szukanej powierzchni Σ , to także powierzchnia równoległa Σ^{\parallel} , której wektor wodzący ma postać $\mathbf{r}^{\parallel} = \mathbf{r} + \mathbf{b}N$, jest rozwiązaniem zagadnienia. Inaczej mówiąc rozwiązaniem jest zawsze rodzina powierzchni równoległych. Wniosek ten wynika także z symetrii równań nieliniowych i może być pokazany już na wstępnym etapie analizy równań (8) i (9).

Podejście matematyczne użyte do sformułowania Faktu 3 może być także wykorzystane do badania ogólniejszych powierzchni. Zależność potencjału U od funkcji Weierstrassa jest konsekwencją warunku (11)₂. Jeśli rozważymy powierzchnie posiadające konforemnie płaską trzecią formę fundamentalną g_{III} (czyli założymy jedynie (11)₁) to otrzymamy równanie liniowe (typu (21)) z dowolnym potencjałem U . Takie powierzchnie zostały zbadane w [H3]-[H4].

Jawne przykłady powierzchni opisanych w Fakcie 3 zostały skonstruowane m.in. w przypadku, gdy eliptyczna funkcja $\wp(z; g_2, g_3)$ redukuje się do funkcji elementarnych, tzn. gdy wyznacznik $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ i dostajemy

$$\wp = \frac{1}{z^2} \quad \text{albo} \quad \wp = c^2 \left(\frac{1}{\sin^2(cz)} - \frac{1}{3} \right) \quad \text{albo} \quad \wp = c^2 \left(\frac{1}{\sinh^2(cz)} + \frac{1}{3} \right), \quad (23)$$

gdzie $c = \text{const.}$ Dla wszystkich powyższych postaci funkcji \wp , szczególne rozwiązanie T_0 (wraz z Φ_1, Φ_2) równania (21) zostało wyznaczone [H1]. Przykładowe rodziny powierzchni równoległych odpowiadające tym rozwiązaniom pokazano poniżej (rys. 3).



Rys. 3: Powierzchnie równoległe odpowiadające rozwiązaniom (23)₁, (23)₂.

Ważna klasa powierzchni, dla których równanie (13)₂ redukuje się do

$$(e^{-\theta})_{\alpha\beta} = 0 \quad (24)$$

została szczegółowo opisana w [H2]. Redukcja ta zachodzi, gdy co najmniej jedna z funkcji f lub g jest stała. Okazuje się, że warunek (24) jest równoważny założeniu, że obie rodziny linii krzywiznowych (zdefiniowanych odpowiednio przez $\alpha = \text{const.}$ i $\beta = \text{const.}$) są płaskie. Powierzchnie posiadające taką własność są szczególnym przypadkiem tzw. powierzchni Ennepera [24], które zawierają co najmniej jedną płaską rodzinę linii krzywiznowych. Z fizycznego punktu widzenia płaskość linii krzywiznowych pociąga za sobą płaskość wewnętrznych napięć membrany reprezentowanej przez powierzchnię. Inaczej mówiąc, napięcia przyłożone do punktów linii $\alpha = \text{const.}$ oraz $\beta = \text{const.}$ leżą w jednej płaszczyźnie. Rachunkowo, warunek (24) oznacza, że potencjał U jest stały w (21) (tzn. nie występuje funkcja \wp , a jedynie stała C) oraz funkcja P zależy od jednej zmiennej. Przypadek ten jest więc opisany następującym niejednorodnym równaniem liniowym

$$T_{zz} + CT = \frac{P(\alpha)}{4}, \quad C = \text{const.} \quad (25)$$

Z geometrycznego punktu widzenia powierzchnie takie stanowią podklase tzw. powierzchni kanałowych, które zdefiniowane są jako obwiednie rodziny sfer o środkach na danej krzywej γ i promieniach zmieniających się według zadanej funkcji r . W naszym przypadku (dla $C > 0$) krzywa jest płaska i dana równaniem

$$\gamma = (-a_0 F_1(\alpha), F_2(\alpha), 0)^\top, \quad (26)$$

gdzie

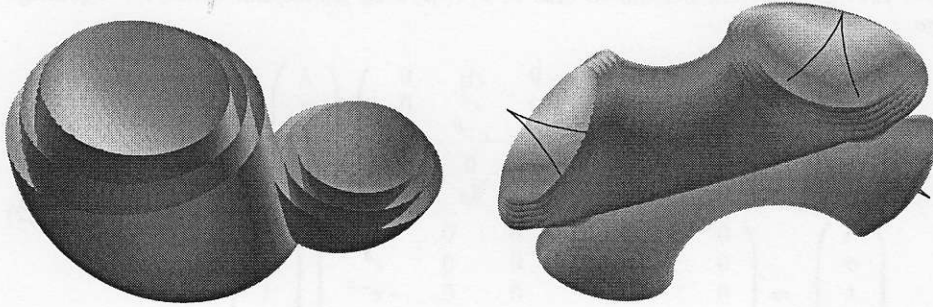
$$F_1(\alpha) = \int P(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha, \quad F_2(\alpha) = \int P(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha, \quad r = |c_0 F_1(\alpha) + \mu|, \quad \mu = \text{const}. \quad (27)$$

Stałe a_0 i c_0 związane są równością $a_0^2 - c_0^2 = 1$. Przy użyciu nowej współrzędnej lokalnej $u = u(\beta)$ możemy wyznaczyć wektor wodzący otrzymanej powierzchni

$$\mathbf{r}(\alpha, u) = -\psi e^\varphi \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0} \\ \sin \alpha \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_0}{c_0} \mu \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

gdzie $\psi(\alpha) = c_0 F_1 + \mu$, $e^{-\varphi} = a_0 - c_0 \cos \alpha \cos u$. Powierzchnie (28) nazywamy uogólnionymi cyklidami Dupina [H1]-[H2]. Cyklidy Dupina są szczególnym przypadkiem (28) dla $P = \text{const}$. i mogą być zdefiniowane jako powierzchnie, na których wszystkie linie krzywiznowe są okręgami. Warto w tym miejscu przypomnieć, że cyklidy Dupina były intensywnie badane przez geometrów już od ich pierwszego pojawienia się w roku 1822 w pracy [25]. W XIX wieku rozpatrywali je m.in. J. C. Maxwell [26] i A. Cayley [27]. Ostatnio pojawiają się przy tzw. projektowaniu wspomaganym komputerowo (*computer-aided design*) oraz przy badaniu całkowalnych układów Hamiltona typu hydrodynamicznego [28]. Jako powierzchnie izotermiczne (co oznacza, że istnieje transformacja $\alpha \mapsto \alpha' = \alpha'(\alpha)$, $\beta \mapsto \beta' = \beta'(\beta)$, w wyniku której metryka g_I staje się konforemnie płaska) pojawiają się w naturalny sposób w kontekście układów całkowalnych [29].

Dowolna krzywa płaska może być zapisana w postaci (26) poprzez odpowiedni dobór funkcji P w (27) (przykładowo $P(\alpha) = -\frac{3}{2} \sin 2\alpha$ generuje (przeskalowaną) krzywą zwaną astroidą: $\gamma = (a_0 \sin^3 \alpha, \cos^3 \alpha)^\top$, $\alpha \in [0, 2\pi)$). Przykłady rodziny równoległych powierzchni generowanych przez elipsę oraz krzywą Talbota zostały przedstawione na rys. 4.



Rys. 4: Powierzchnie równoległe generowane odpowiednio przez elipsę oraz krzywą Talbota.

Warto dodać, że powierzchnie, dla których $C < 0$ w (25) także mają ciekawe własności. W klasie tej znajdują się m.in. szczególne powierzchnie minimalne mające, jak wynika z konstrukcji, płaskie linie krzywiznowe. Nie jest prawdą, że wszystkie takie powierzchnie minimalne są uogólnionymi cyklidami Dupina, mimo to zachodzi następujący [H2]

Fakt 4. *Istnieje transformacja Combescure pomiędzy rozważanymi membranami o nieokreślonych napięciach T_i a powierzchniami minimalnymi posiadającymi płaskie linie krzywiznowe. Wszystkie takie powierzchnie minimalne mogą być uzyskane w ten sposób.*

W szczególności, uogólnione cyklidy Dupina (28) odpowiadają (w kontekście Faktu 4) rodzinie powierzchni minimalnych postaci

$$\mathbf{r}_{\min} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-d_0^2} \cos \alpha \cosh \beta \\ \sin \alpha \cosh \beta - d_0 \alpha \\ d_0 \cos \alpha \sinh \beta - \beta \end{pmatrix}, \quad (29)$$

gdzie $d_0 = c_0/a_0$ oraz $u = \arccos(\operatorname{sech} \beta)$.

Przeprowadzona analiza pozwala także rozwiązać system (8) oraz wyznaczyć jednoparametrową rodzinę napięć

$$T_1 = -\frac{Z}{2\kappa_2} \left(1 - \frac{g(\beta)}{A_2^2}\right) + \frac{\varepsilon}{\kappa_2 A_2^2}, \quad T_2 = -\frac{Z}{2\kappa_1} \left(1 - \frac{f(\alpha)}{A_1^2}\right) - \frac{\varepsilon}{\kappa_1 A_1^2}, \quad (30)$$

gdzie f i g są w ogólności odpowiednimi funkcjami eliptycznymi, a $\varepsilon = \text{const}$. Funkcje opisujące geometrię wewnętrzną i definiujące powyższe wielkości T_1 i T_2 mogą być wyliczone w ścisły sposób.

Kolejnym bezpośrednim „dowodem” świadczącym o zupełnej całkowalności omawianych tu równań jest tzw. para Laxa, czyli układ liniowy, którego warunki zgodności są równoważne równaniom (8)-(9). Ważnym spostrzeżeniem jest fakt, że równania równowagi (8)_{1,2} są identyczne z równaniami zgodności Gaussa-Mainardi-Codazzi (9)_{1,2}, gdy dokona się utożsamienia $(T_1, T_2) \leftrightarrow (\kappa_2, \kappa_1)$. Jest to jedna z głównych przyczyn całkowalności systemu (8)-(9). Podobieństwo tych równań umożliwia także kompaktowy zapis pary Laxa, w której dodatkowo uwzględniona jest transformacja Combescure powierzchni Σ do powierzchni minimalnej [H1].

Wszystkie rozważane dotychczas powierzchnie są L-izotermiczne, tzn. posiadają konforemnie płaską trzecią formę fundamentalną g_{III} zapisaną we współrzędnych krzywiznowych. Dla takich powierzchni znana jest transformacja Bäcklunda, co jest kolejnym przejawem zupełnej całkowalności badanych równań. W naszym przypadku mamy następujące

Stwierdzenie (Transformacja Bäcklunda powierzchni L-izotermicznych) Niech \mathbf{r} oznacza wektor wodzący powierzchni L-izotermicznej Σ . Wówczas, nowa powierzchnia L-izotermiczna $\tilde{\Sigma}$ jest zadana przez wektor wodzący

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \frac{\lambda}{m\sigma t} (\mu \mathbf{X} + \nu \mathbf{Y} + \sigma \mathbf{N}), \quad (31)$$

gdzie stała m jest tzw. parametrem Bäcklunda oraz $\lambda, \sigma, t, \mu, \nu$ są „funkcjami własnymi” zgodnego układu liniowego

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \sigma \\ t \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\theta} & 0 \\ 0 & me^{-\theta} - e^{\theta} & me^{\theta} & 0 & -\theta_{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \sigma \\ t \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \sigma \\ t \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{\alpha} \\ 0 & -me^{-\theta} - e^{\theta} & me^{\theta} & -\theta_{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \sigma \\ t \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Funkcje te spełniają następującą formułę $\mu^2 + \nu^2 + \sigma^2 = 2m\sigma t$.

Transformacja powyższa była badana m.in. przez L. Bianchiego [30] oraz L. P. Eisenharta [31]. Fakt 3 dostarcza metody, zgodnie z którą powierzchnie L-izotermiczne mogą być konstruowane poprzez rozwiązanie równania liniowego

$$T_{zz} + UT = \frac{1}{4}P, \quad z = \alpha + i\beta, \quad (33)$$

gdzie $U(z)$ jest zespolonym potencjałem, a funkcja rzeczywista $P(\alpha, \beta)$ spełnia równanie Moutarda³ $P_{\alpha\beta} = 2(\text{Im}U)P$. Nasuwa się w tym miejscu następujące pytanie:

Jeśli U odpowiada zadanej powierzchni L-izotermicznej Σ , jaki potencjał \tilde{U} jest związany z powierzchnią $\tilde{\Sigma}$ otrzymaną z Σ przy użyciu transformacji Bäcklunda (31)-(32)?

Okazuje się [H3], że transformacji Bäcklunda odpowiada transformacja Darboux [32] potencjału, czyli

$$\tilde{U} = U + 2(\log \hat{\sigma})_{zz}, \quad (34)$$

gdzie funkcja rzeczywista $\hat{\sigma} = 2e^{-\theta}\sigma$ spełnia liniowe równanie z przesuniętym potencjałem

$$\hat{\sigma}_{zz} + U\hat{\sigma} = \frac{m}{2}\hat{\sigma}. \quad (35)$$

Pojawienie się transformacji Darboux, często występującej w kontekście równań zupełnie całkowalnych, jest naturalne. Pozwala ona zapisać funkcje σ , t , μ , ν spełniające układ (32) przy użyciu rozwiązań jednorodnych równań liniowych z potencjałem U oraz z potencjałem \tilde{U} . Transformacja Bäcklunda zawarta w Stwierdzeniu prowadzi do nieliniowej superpozycji rozwiązań opisujących powierzchnie L-izotermiczne. W tym miejscu uwidacznia się siła metod dostępnych dla równań zupełnie całkowalnych i dla geometrii z nimi związanej. Mając dwie powierzchnie L-izotermiczne r_1 oraz r_2 wraz z parametrami Bäcklunda odpowiednio m_1 i $m_2 \neq m_1$, skonstruowane zgodnie z opisem w powyższym Stwierdzeniu, możemy skonstruować trzecią powierzchnie L-minimalną Σ_{12} w sposób algebraiczny, bez użycia całkowania. Jej wektor wodzący \mathbf{R} zadany jest następującym wzorem [H3]

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{r} & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mathbf{r}_1 & j_1 & j_3 \\ \mathbf{r}_2 & j_4 & j_2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} j_1 & j_3 \\ j_4 & j_2 \end{vmatrix}, \quad (36)$$

gdzie funkcje j_i ($i = 1, \dots, 4$) wyrażają się algebraicznie poprzez rozwiązania układu (32) ze stałymi m_1 oraz m_2 . W pracy [H3] przeanalizowano szczegółowo transformację Bäcklunda działającą na uogólnione cyklidy Dupina, podając jawne rozwiązania systemu (32) w tym przypadku. Zgodnie z opisaną wyżej metodą, powierzchnie Σ_{12} odpowiada równanie liniowe z potencjałem $U_{12} = U + 2\partial_{zz}(S_1S_{2z} - S_{1z}S_2)$, gdzie S_1 i S_2 spełniają równanie (35) ze stałymi m_1 i m_2 .

Sposób opisu powierzchni L-izotermicznych zawarty w Fakcie 3 rodzi kolejne, ciekawe matematyczne pytania. Rozwiązanie T_0 równania niejednorodnego (33), wraz z rozwiązaniami Φ_1 , Φ_2 jednorodnej wersji tego równania, odpowiada pewnej powierzchni L-izotermicznej Σ .

Jakim geometrycznym transformacjom odpowiada użycie w rozwiązaniu liniowej kombinacji funkcji Φ_1 , Φ_2 oraz dodanie rozwiązania jednorodnego do niejednorodnego?

Transformacje, o których mowa:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (37)$$

$$T_0 \mapsto T'_0 = T_0 + a_1|\Phi_1|^2 + a_2\Phi_1\bar{\Phi}_2 + \bar{a}_2\bar{\Phi}_1\Phi_2 + a_3|\Phi_2|^2, \quad a_1, a_3 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \in \mathbb{C}$$

zadane są przez 10 parametrów rzeczywistych.

Nie jest trudno odpowiedzieć na powyższe pytanie pamiętając, że powierzchnie L-izotermiczne pojawiają się w naturalny sposób w geometrii Laguerre'a [33], czyli w geometrii, której podstawowymi obiektami są sfery i płaszczyzny w przestrzeni Euklidesowej \mathbb{E}^3 . Grupa zachowująca kontakt między tymi obiektami zwie się grupą Laguerre'a i jest izomorficzna grupie Poincarégo $\mathbb{R}^4 \rtimes SO(1, 3)$. Najbardziej odpowiednim podejściem do opisu przekształceń Laguerre'a jest wykorzystanie zerowej kwadryki \mathcal{L} w przestrzeni \mathbb{R}^6 z iloczynem skalarnym o sygnaturze $(- + + + -)$. Dwuwymiarową powierzchnie Σ w \mathbb{E}^3 można zdefiniować jako obwiednię 2-parametrowej rodziny sfer [33],[34],[35],[H4]. W ten

³Poprzednio (w Fakcie 3) równanie Moutarda było spełnione na mocy warunku $P^2 = f + g$.

sposób powierzchni są definiowane w geometrii Laguerre'a: powierzchni $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ odpowiada para podzmaitości w \mathcal{L} , każda odpowiadająca rodzinie sfer w \mathbb{E}^3 . Szczegółowa analiza grupy Laguerre'a dowodzi, że transformacji (37)₂ odpowiada translacja Σ w \mathbb{E}^3 oraz (dla $a_2 = 0$ i $a_1 = a_3$) "przejście" do powierzchni równoległej Σ^{\parallel} , zdefiniowanej przez $r^{\parallel} = r + 2a_1 N$. Transformacje (37)₁, w których macierze $S \in SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ generują obroty Σ . Prawdziwie nietrywialne przekształcenia powierzchni są wynikiem działania transformacji (37)₁, gdzie macierze S nie należą do grupy $SU(2)$. Używając terminologii pochodzącej z teorii względności transformacje te odpowiadają pchnięciom (boostom) lorentzowskim, czyli przejściom do poruszającego się układu inercyjnego. Nowa powierzchnia otrzymana w ten sposób ma postać [H4]

$$r \mapsto r' = r - \frac{\sinh(n)N + (\cosh(n) - 1)\mathbf{n}}{\cosh(n) + \sinh(n)N \cdot \mathbf{n}} r \cdot \mathbf{n}, \quad (38)$$

gdzie $n \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ jest stałym jednostkowym wektorem.

Omawiany tutaj opis matematyczny powierzchni L-izotermicznych okazał się wyjątkowo atrakcyjny i efektywny w przypadku tzw. powierzchni L-minimalnych, czyli powierzchni będących analogiem powierzchni minimalnych w \mathbb{E}^3 . Powierzchnie L-minimalne mogą być zdefiniowane jako punkty krytyczne funkcjonału $\mathcal{W} = \int (\mathcal{H}^2/\mathcal{K} - 1)dA$, gdzie \mathcal{H} i \mathcal{K} są krzywiznami: średnią i Gaussa odpowiednio. Lokalnie powierzchnie te spełniają równanie różniczkowe 4-go rzędu (we współczynnikach metryki)

$$\Delta_{III} \left(\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{K}} \right) = 0, \quad (39)$$

gdzie Δ_{III} jest operatorem Laplace'a względem trzeciej formy fundamentalnej (12). Równanie (39) (w przypadku gdy powierzchnia jest L-izotermiczna) redukuje się do równania $P_{zz} + UP = 0$, a więc nakłada dodatkowe więzy na niejednorodność P w równaniu (33). Stąd wynika, że P daje się przedstawić w postaci $P = n_1 |\Phi_1|^2 + n_2 \Phi_1 \bar{\Phi}_2 + \bar{n}_2 \bar{\Phi}_1 \Phi_2 + n_3 |\Phi_2|^2$, gdzie $n_1, n_3 \in \mathbb{R}$ i $n_2 \in \mathbb{C}$. Przy użyciu transformacji Laguerre'a funkcja P może być zredukowana do następującej formy kwadratowej $P = |\Phi_1|^2 + \varepsilon |\Phi_2|^2$, gdzie $\varepsilon = -1, 0, 1$. W rezultacie możliwa staje się konstrukcja reprezentacji Weierstrassa dowolnej powierzchni L-minimalnej będącej jednocześnie powierzchnią L-izotermiczną [H4]:

$$r = \text{Re} \left(\begin{array}{c} -\int (1 - \varepsilon \rho^2) F(\rho) d\rho \\ i \int (1 + \varepsilon \rho^2) F(\rho) d\rho \\ (1 + \varepsilon) \int \rho F(\rho) d\rho \end{array} \right) + \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{K}} \frac{1}{1 + \rho \bar{\rho}} \left(\begin{array}{c} \rho + \bar{\rho} \\ i(\rho - \bar{\rho}) \\ 1 - \rho \bar{\rho} \end{array} \right), \quad (40)$$

gdzie

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{K}} = (1 - \varepsilon) \text{Re} \int \rho F(\rho) d\rho - \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \text{const}. \quad (41)$$

Powierzchnia L-minimalna (40)-(41) jest zdefiniowana przez funkcję holomorficzną $F(\rho)$, gdzie ρ jest lokalną współrzędną zespoloną na powierzchni. Dla $\varepsilon = 1$, $\mathbf{b} = 0$ otrzymujemy dobrze znaną reprezentację Weierstrassa dla powierzchni minimalnych. Różne wartości parametru ε odpowiadają powierzchniom o szczególnej charakterystyce geometrycznej:

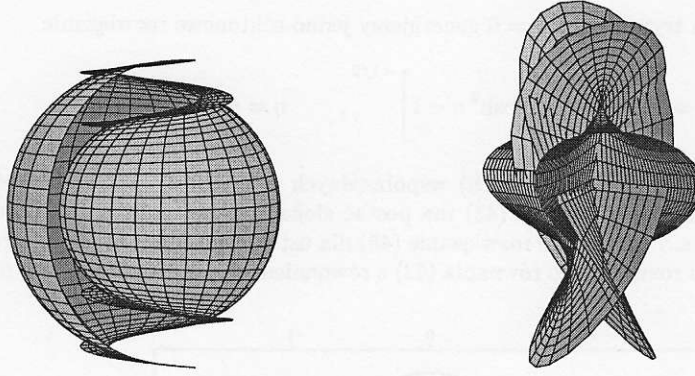
$\varepsilon = -1$: powierzchnie, dla których środki centralnej kongruencji sfer leżą na płaszczyźnie $z = 0$ w \mathbb{E}^3 ,

$\varepsilon = 0$: powierzchnie, dla których centralna kongruencja sfer jest styczna do płaszczyzny $z = \mathbf{b}$ w \mathbb{E}^3 ,

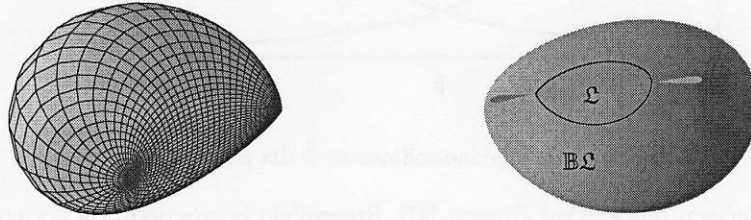
$\varepsilon = 1$: powierzchnie równoległe do powierzchni minimalnej.

Klasyfikacja powyższa była znana przez W. Blaschke [33].

Wybierając różne funkcje $F(\rho)$ możemy konstruować dowolne powierzchnie L-minimalne, w szczególności powierzchnie analogiczne do minimalnych. Na rys. 5 zamieszczono powierzchnie L-minimalne dla $F(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$ i $F(\rho) = 1 - \frac{1}{\rho^2}$, czyli odpowiedniki powierzchni minimalnych: helikoidy i powierzchni Henneberga [H4]. Rys. 6 przedstawia zamkniętą powierzchnię L-minimalną będącą jednocześnie uogólnioną cyklidą Dupina (z lewej) [H2] oraz przykład L-minimalnej powierzchni \mathcal{L} wraz z jej transformacją Bäcklunda $\mathbb{B}\mathcal{L}$ (z prawej) [H3].



Rys. 5: L-minimalne powierzchnie odpowiadające helikoidzie i powierzchni Henneberga.



Rys. 6: L-minimalna uogólniona cyklida Dupina oraz L-minimalna powierzchnia \mathcal{L} wraz z jej transformacją Bäcklunda $\mathbb{B}\mathcal{L}$.

W dalszej części niniejszego opracowania skupimy się na innym równaniu, mającym bezpośredni związek z modelami w teorii sprężystości. Równaniem tym jest nieliniowe równanie telegraficzne [H5]

$$\Phi_{\rho\rho} - \left(\frac{\Phi_t}{(1 + \Phi^2)^2} \right)_t + \Phi = 0, \quad \Phi = \Phi(\rho, t). \quad (42)$$

Transformacja $T = \sqrt{1 + X^2} \Phi$, $X = \tan \rho$ sprowadza (42) do nieliniowego równania

$$T_{XX} = \left[\frac{T_t}{(1 + X^2 + T^2)^2} \right]_t \quad (43)$$

opisującego propagację naprężeń T w idealnie twardym, niejednorodnym ośrodku sprężystym o zadanym równaniu stanu $T = T(\epsilon, X)$ postaci

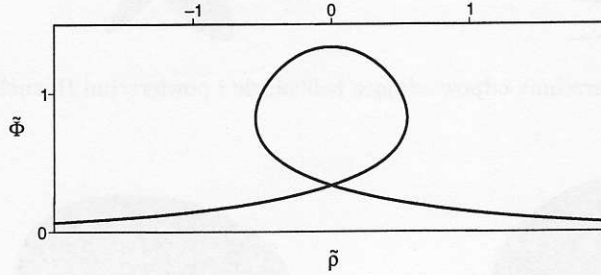
$$T = \sqrt{1 + X^2} \tan \theta, \quad \epsilon = \frac{1}{2(1 + X^2)^{3/2}} (\theta + \sin \theta \cos \theta). \quad (44)$$

Zmienne t i X w (43) są zmiennymi: czasową i przestrzenną, a ϵ opisuje deformację. Okazuje się, że równanie (42) jest zupełnie całkowalne, a jego rozwiązania otrzymane metodami solitonowymi posiadają ciekawe własności, być może nie obserwowane wcześniej. Wiadomo [36], że z każdą pseudosferyczną powierzchnią w \mathbb{E}^3 można związać rozwiązanie równania (43). Stąd możemy wysnuć wniosek o powiązaniu (43) z równaniem sinusa-Gordona (sG). Istotnie, oba równania odpowiadają dwóm różnym parametryzacji 2-wymiarowej rozmaitości całkowitej odpowiedniego ideału różniczkowego o stałych współczynnikach (*cc ideal*) [H5]. Wprowadzenie nowych współrzędnych (tzw. *reciprocal*) umożliwiło wyznaczenie układu liniowego, który jest zgodny na mocy równania (sG). Ten rezultat z kolei pozwolił znaleźć transformację Bäcklunda umożliwiającą konstrukcję ścisłych rozwiązań równania (42), o których opowiadamy więcej poniżej.

Startując z rozwiązania trywialnego $\Phi = 0$ generujemy jedno-solitonowe rozwiązanie

$$\tilde{\Phi} = \left[\left(\frac{1 + \mu^2}{2\mu} \right)^2 \cosh^2 \eta - 1 \right]^{-1/2}, \quad \eta = \mu\alpha - \frac{\beta}{\mu}, \quad (45)$$

gdzie α, β są nieliniowymi funkcjami (nowych) współrzędnych $\tilde{\rho}$ i \tilde{t} . Stały parametr μ decyduje o kształcie i prędkości solitonu. Rozwiązanie (45) ma postać zlokalizowanej pętli, która poruszając się zachowuje swój kształt. Rys. 7 prezentuje rozwiązanie (45) dla ustalonego czasu \tilde{t} i parametru $\mu = 1/2$. Z punktu widzenia związku rozważanego równania (42) z równaniem sinusa-Gordona (sG), rozwiązanie



Rys. 7: Rozwiązanie jedno-solitonowe $\tilde{\Phi}$ dla $\mu = 1/2$.

to odpowiada 2-wymiarowej powierzchni Diniego [37]. Szczególnie interesujące jest dwu-solitonowe rozwiązanie $\hat{\Phi}$ równania (42), które otrzymujemy działając dwukrotnie transformacją Bäcklunda ze stałymi parametrami μ i ν . Rozwiązanie jest skomplikowane, ale dane jawnym wzorem

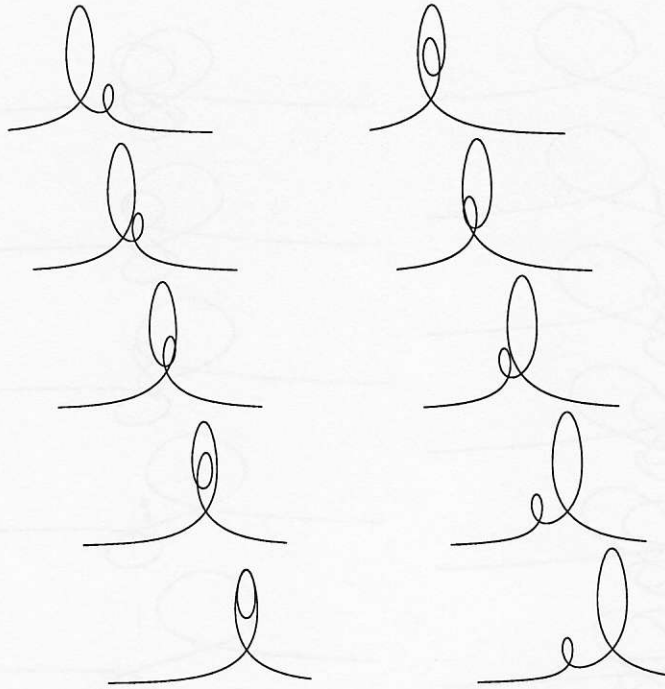
$$\hat{\Phi} = \tan \left(\arcsin \frac{2(\mu^2 - \nu^2)}{(1 + \mu^2)(1 + \nu^2)} \frac{\nu(1 + \mu^2) \cosh \eta_1 - \mu(1 + \nu^2) \cosh \eta_2}{(\mu^2 + \nu^2) \cosh \eta_1 \cosh \eta_2 - 2\mu\nu \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 - 2\mu\nu} \right), \quad (46)$$

gdzie $\eta_1 = \mu\alpha - \beta/\mu$, $\eta_2 = \nu\alpha - \beta/\nu$ oraz, podobnie jak poprzednio, α i β są funkcjami $\hat{\rho}$ i czasu \hat{t} . Analiza (46) pozwala nie tylko potwierdzić powszechnie znane własności tego typu rozwiązań, ale przede wszystkim ujawnić nowe ciekawe zachowania. Rozwiązanie powyższe opisuje dwa poruszające się solitony (rys. 8). Z początku zbliżają się do siebie, przy czym „większy” z nich porusza się szybciej. W czasie spotkania solitony wydają się mijać, tak że po oddaleniu zachowują swój kształt.

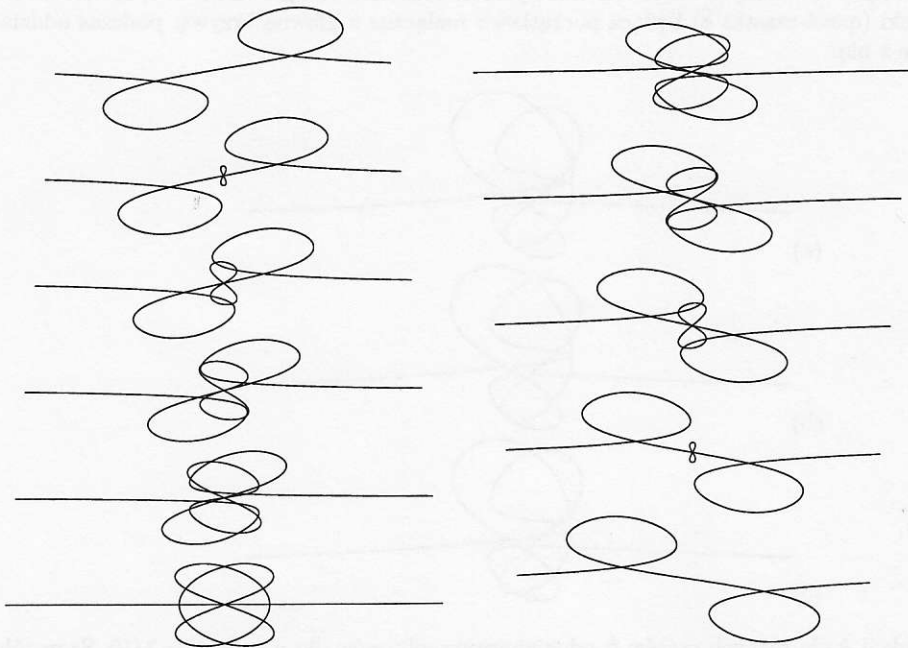
Opisane dotychczas zachowanie solitonów jest dość standardowe. W przypadku, gdy $\mu = 2$ i $\nu = 1/2$ oddziaływanie spotykających się solitonów dostarcza nowych, prawdopodobnie nieznanych wcześniej zachowań. Początkowo znajdujące się daleko od siebie (takiej samej wielkości⁴) solitony zbliżają się ze stałą prędkością. Gdy znajdują się stosunkowo blisko powstaje dodatkowa struktura w kształcie ósemki δ (rys. 9). Struktura powiększa się w miarę, gdy solitony mijają się, po czym znika, gdy się oddalają. W pewnej chwili wykres reprezentujący oba solitony wraz z nowo powstałą strukturą staje się całkowicie symetryczny. Takie oddziaływanie można interpretować jako wymiana „tożsamości” solitonów między sobą przy użyciu dodatkowo powstałej struktury w kształcie δ .

By w pełni zrozumieć zachowanie spotykających się solitonów warto przeprowadzić podobną analizę w przypadku, gdy $\mu\nu \neq 1$, tzn. gdy solitony różnią się wielkością. Takie oddziaływanie, dla $\mu = 2$ i $\nu = 3/10$ zostało zilustrowane na rys. 10. Widać, że początkowo struktura δ jest rozłączna z krzywą reprezentującą solitony. Po pewnym czasie łączy się z nią tworząc ponownie jedną krzywą. Szczegóły połączenia zostały zilustrowane na rys. 11. Struktura δ zachowuje się jak quasi-cząstka wymiany, która istnieje tylko przez skończony czas i wymieniana jest przez oddziałujące ze sobą solitony.

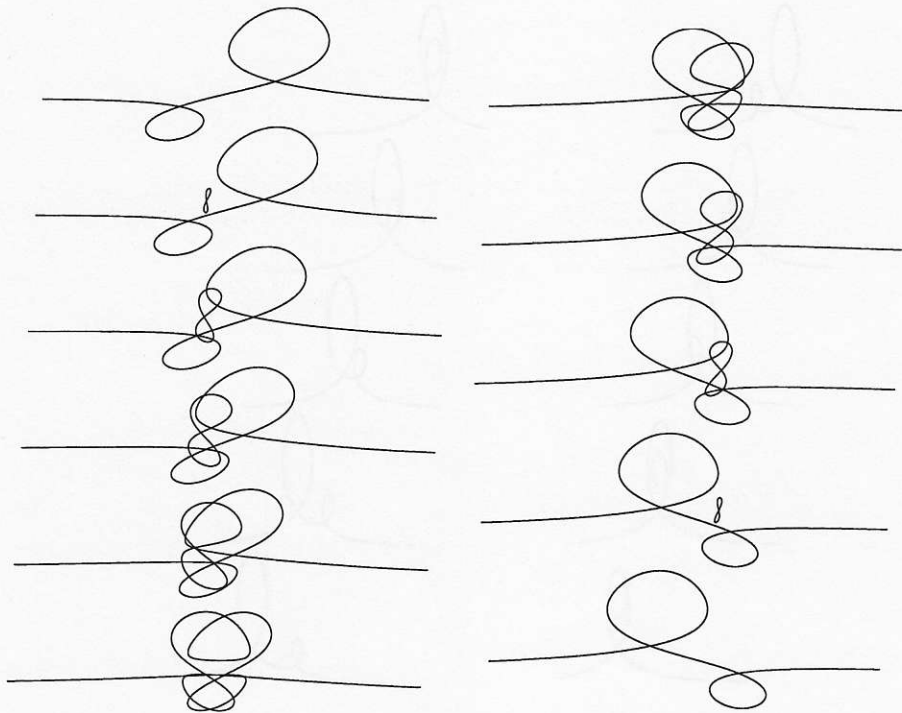
⁴wynika to z wyboru μ, ν tak, że $\mu\nu = 1$.



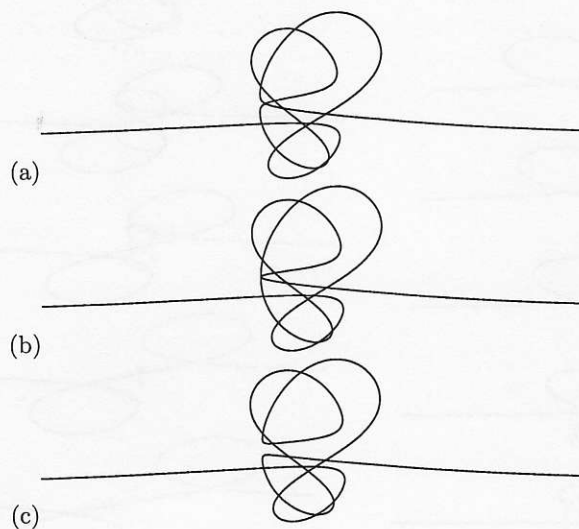
Rys. 8: $\hat{\Phi}$ w funkcji $\hat{\rho}$ dla różnych czasów \hat{t} : oddziaływanie solitonów dla $\mu = 2$ i $\nu = -6$.



Rys. 9: $\hat{\Phi}$ w funkcji $\hat{\rho}$ dla różnych czasów \hat{t} : oddziaływanie solitonów dla $\mu = 2$ i $\nu = 1/2$.



Rys. 10: $\hat{\Phi}$ w funkcji $\hat{\rho}$ dla różnych czasów \hat{t} : oddziaływanie solitonów dla $\mu = 2$ i $\nu = 3/10$. Struktura w kształcie ósemki (quasi-cząstka δ) będąca początkowo rozłączna z główną krzywą, podczas oddziaływania łączy się z nią.



Rys. 11: $\hat{\Phi}$ w funkcji $\hat{\rho}$ dla różnych czasów \hat{t} : oddziaływanie solitonów dla $\mu = 2$ i $\nu = 3/10$. Szczegóły oddziaływania: (a) Główna krzywa i quasi-cząstka δ przecinają się; (b) Quasi-cząstka δ i główna krzywa posiadają wspólną styczną; (c) Główna krzywa i quasi-cząstka δ połączyły się.

3 Podsumowanie wyników

Wśród najważniejszych rezultatów zamieszczonych w cyklu prac [H1]-[H5] możemy wymienić

- geometryczną i analityczną charakterystykę membran o nieokreślonym rozkładzie napięć wewnętrznych [H1],
- szczegółowy opis równań równowagi (8) wraz z równaniami Gaussa-Mainardi-Codazzi (9) jako układu zupełnie całkowalnego [H1],
- analityczny opis powierzchni L-izotermicznych (czyli dopuszczających konforemnie płaską trzecią formę fundamentalną sparametryzowaną przy użyciu współrzędnych krzywiznowych) poprzez niejednorodne równanie liniowe (33) [H1]-[H4],
- opis transformacji Bäcklunda dla powierzchni L-izotermicznych przy użyciu równania (33) [H3],
- analiza powierzchni L-izotermicznych będących jednocześnie powierzchniami L-minimalnymi oraz konstrukcja reprezentacji Weierstrassa (40)-(41) tych powierzchni [H4],
- wykazanie własności solitonowych równania telegraficznego oraz wykrycie nowych zachowań oddziałujących solitonów [H5].

Literatura

- [1] N. Hitchin, G. B. Segal, S. R. Ward, *Integrable systems: Twistors, loop groups and Riemann surfaces*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press, Oxford (1999).
- [2] E. Bour, Théorie de la déformation des surfaces, *J. l'École Imperiale Polytech.* **19**, Cahier 39, 1-48 (1862).
- [3] L. Bianchi, Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi. Tesi di Abilitazione, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1)* **2**, 285-304 (1879).
- [4] L. Bianchi, Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche, *Rend. Lincei* **5**, 3-12 (1892).
- [5] A.V. Bäcklund, Om ytor med konstant negativ krökning, *Lunds Universitets Årsskrift* **19**, 1-48 (1883).
- [6] A. Seeger, H. Donth, A. Kochendörfer, Theorie der Versetzungen in eindimensionalen Atomreihen III. Versetzungen, Eigenbewegungen und ihre Wechselwirkung, *Z. Phys.* **134**, 173-193 (1953).
- [7] B. D. Josephson, Supercurrents through barriers, *Adv. Phys.* **14** (56), 419-451 (1965).
- [8] G. L. Lamb Jr., Propagation of ultrashort optical pulses, *Phys. Lett. A* **25** (3), 181-182 (1967).
- [9] T. H. R. Skyrme, A Non-Linear Theory of Strong Interactions, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **247** (1249), 260-278 (1958).
- [10] G. L. Lamb Jr., Analytical Descriptions of Ultrashort Optical Pulse Propagation in a Resonant Medium, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 99-124 (1971).
- [11] H. M. Gibbs, R. E. Slusher, Peak Amplification and Breakup of a Coherent Optical Pulse in a Simple Atomic Absorber, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 638-641 (1970).
- [12] D. J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine Series 5*, Volume **39** Issue 240, 422-443 (1895).

- [13] F.J. Ernst, New formulation of the axially symmetric gravitational field problem, *Phys. Rev.* **167**, 1175-1178 (1968).
- [14] D. Maison, Are the Stationary, Axially Symmetric Einstein Equations Completely Integrable?, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 521-522 (1978).
- [15] D. Maison, On the complete integrability of the stationary, axially symmetric Einstein equations, *J. Math. Phys.* **20**, 871-877 (1979).
- [16] M. Lelievre, Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique, *Bulletin des Sciences Mathématiques* **XII**, 126-128 (1888).
- [17] L.P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York: Dover (1960).
- [18] J. Tafel, Surfaces in \mathbb{R}^3 with prescribed curvature, *J. Geom. Phys.* **17** (4), 381-390 (1995).
- [19] A. Szereszewski, *Rozwiązania równań Einsteina i równań Rarity-Schwingera*, praca doktorska napisana na Wydziale Fizyki UW pod kierunkiem prof. Jacka Tafla (2004).
- [20] H.A. Buchdahl, On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field, *Nuovo Cim.* **10**, 96-103 (1958).
- [21] V.V. Novozhilov, *Thin Shell Theory*, 2nd edn. Groningen: Noordhof (1964).
- [22] W.K. Schief, B.G. Konopelchenko, On the unification of classical and novel integrable surfaces. I. Differential geometry, *Proc. R. Soc. Lond. A* **459**, 67-84 (2003).
- [23] W.K. Schief, M. Kléman, C. Rogers, On a nonlinear elastic shell system in liquid crystal theory: generalized Willmore surfaces and Dupin cyclides, *Proc. R. Soc. A* **461**, 2817-2837 (2005).
- [24] R. Steurewald, Über die Enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation, *Abh. Bayer. Akad. Wiss.* **40**, 1-105 (1936).
- [25] C. Dupin, *Applications de Géométrie et de Mécanique*, Bachelier, Paris (1822).
- [26] J. C. Maxwell, On the cyclide, *Q. J. Pure Appl. Math.* **9**, 111-126 (1868).
- [27] A. Cayley, On the cyclide, *Q. J. Pure Appl. Math.* **12**, 148-165 (1873).
- [28] E. V. Ferapontov, Dupin hypersurfaces and integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type which do not possess Riemann invariants, *Diff. Geom. Appl.* **5**, 121-152 (1995).
- [29] A. Degasperis, C. Rogers, W.K. Schief, Isothermic surfaces generated via Darboux-Bäcklund transformations Boomeron and Zoomeron connections, *Stud. Appl. Math.* **109**, 39-65 (2002).
- [30] L. Bianchi, Sulla generazione, per rotolamento, delle superficie isoterme e delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura *Rom. Acc. L. Rend. (5)* **24**₂ 377-387 (1915).
- [31] L. P. Eisenhart, *Transformations of surfaces* (Princeton: N. J. Princeton University Press) (1923).
- [32] G. Darboux, Sur une proposition relative aux équations linéaires, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, Paris **94** 1456-1459 (1882).
- [33] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie und Geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. III: Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln*. Bearbeitet von G. Thomsen, Berlin: J. Springer (1929).
- [34] T. E. Cecil, *Lie Sphere Geometry: With Applications to Submanifolds*, New York: Springer-Verlag (1992).

- [35] E. V. Ferapontov, Lie sphere geometry and integrable systems, *Tohoku Math. J. (2)* **52** No 2, 199-233 (2000).
- [36] C. Rogers, W. K. Schief, J. Wylie, Wave propagation in ideally hard inhomogeneous elastic materials associated with pseudospherical surfaces, *Int. J. Eng. Sci* **41**, 1965-1974 (2003).
- [37] C. Rogers, W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge: Cambridge University Press (2002).

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

- 1) **A. Szereszewski**, J. Tafel, Integrability of the Rarita-Schwinger equation, *Class. Quantum Grav.* **18** No 18, L129-L132 (2001)
- 2) **A. Szereszewski**, J. Tafel, Solutions of the Rarita-Schwinger equation in Einstein spaces, *Phys. Lett. A* **297** Issue: 5-6, 359-362 (2002)

W artykule 1) zostały przeanalizowane warunki całkowalności równania Rarity-Schwingera zdefiniowanego na zakrzywionej przestrzeni. Znanym od dawna wynikiem jest fakt, że warunki te redukują się do równań Einsteina ze stałą kosmologiczną. Przyjmując, że przestrzeń wyposażona jest w osiowosymetryczną metrykę stacjonarną, równanie Rarity-Schwingera staje się układem liniowym, którego warunki całkowalności zawierają równanie Ernsta. Okazuje się jednak, że tak skonstruowany układ liniowy różni się zasadniczo od znanego układu liniowego stowarzyszonego z równaniem Ernsta z punktu widzenia zupełnej całkowalności. Analiza przeprowadzona w pracy pokazała, że najprawdopodobniej równanie Rarity-Schwingera nie jest odpowiednie do badania zupełnej całkowalności równań Einsteina.

W artykule 2) przeanalizowano rozwiązania równania Rarity-Schwingera w czasoprzestrzeni dopuszczającej kongruencje zerowych linii geodezyjnych bez ścinania. Wyznaczono więzy na geometrię czasoprzestrzeni w przypadku, gdy spinorowe pole Rarity-Schwingera separuje się do iloczynu trzech spinorów o walnecji jeden. To pozwoliło w jawny sposób skonstruować rozwiązania Rarity-Schwingera dla metryki Schwarzschilda, fal pp oraz przestrzeni konformnie płaskiej. Podobnie jak w 1) został użyty formalizm spinorów Weyla.

- 3) **A. Szereszewski**, J. Tafel, Perfect fluid spacetimes with two symmetries, *Class. Quantum Grav.* **21**, 1755-1759 (2004)
- 4) **A. Szereszewski**, J. Tafel, From 2-dimensional surfaces to cosmological solutions, *Gen. Relativ. Gravit.* **37** (2), 257-269 (2005)

W artykule 3) została zaprezentowana nowa metoda rozwiązywania równań Einsteina z płynem doskonałym, przy założeniu, że czasoprzestrzeń dopuszcza dwa komutujące wektory Killinga. Metoda opiera się na spostrzeżeniu, że mając daną 2-wymiarową powierzchnię zanurzoną w 3-wymiarowej niefizycznej przestrzeni Minkowskiego równania Einsteina redukują się do jednego nieliniowego równania. Startując z powierzchni obrotowej w przestrzeni Minkowskiego zostało skonstruowane nowe kosmologiczne rozwiązanie typu Bianchiego VII_0 . Powyższa metoda została zastosowana w artykule 4) do specjalnych powierzchni, które są niezmiennicze ze względu na 1-wymiarową grupę symetrii w przestrzeni Minkowskiego. W wyniku otrzymano nowe rozwiązania kosmologiczne typu Bianchiego II , VI_0 oraz VII_0 . Rozwiązania te zależą od funkcji jednej zmiennej, której wybór może posłużyć do kontrolowania równania stanu.

- 5) C. Rogers, A. Szereszewski, On the Geometry of Complex-Lamellar Magnetohydrodynamics: Universal Motions, *Stud. Appl. Math.* **128** (3), 225-251 (2012)

W artykule 5) poddano analizie układ równań różniczkowych magnetohydrodynamiki. Użyto podejścia geometrycznego, w którym wielkości fizyczne i geometryczne są opisywane względem ruchomego reperu ortonormalnego $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ stowarzyszonego z liniami prądu cieczy. Stosując podejście geometryczne udało się zbadać przypadek, gdy pole magnetyczne jest równoległe do kierunku binormalnego \mathbf{t} . Przy dodatkowych założeniach geometrycznych, w szczególności gdy $\mathbf{t} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}) = 0$ (czyli gdy mamy do czynienia z przepływem określanym terminem *complex-lamellar*) pokazano, że linie prądu są geodezyjnymi na uogólnionych helikoidach, a linie pola magnetycznego mają kształt helis. Wykazano także, że kluczowe wielkości geometryczne i fizyczne mogą być wyrażone w terminach torsji linii prądu. Prosty zabieg matematyczny umożliwił konstrukcję ogólniejszych rozwiązań nie spełniających warunku $\mathbf{t} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}) = 0$.

- 6) A. Szereszewski, J. Tafel, M. Jakimowicz, D -dimensional metrics with $D - 3$ symmetries, *Int. J. Theor. Phys.* **51** (5), 1360-1369 (2012)

W artykule 6) zbadano symetrie, które posiadają D -wymiarowe metryki próżniowe Einsteina z $D - 3$ komutującymi wektorami Killinga. Wyznaczono wszystkie istotne parametry tej symetrii mogące prowadzić do nowych rozwiązań. Szczegółowo przeanalizowano przypadek 5-wymiarowy. Udało się wykazać, że rozwiązanie Reissnera-Nordströma (zapisane jako 5-wymiarowy odpowiednik typu Kaluzy-Kleina) jest powiązane poprzez tę transformację symetrii z metryką Grossa-Perrego. Udowodniono także, że 5-wymiarowa metryka opisująca fale pp jest związana w analogiczny sposób z rozwiązaniem Grossa-Perrego-Sorkina.

- 7) A. Sym, A. Szereszewski, On Darboux's Approach to R-Separability of Variables, *SIGMA* **7**, 095 (2011)

- 8) A. Szereszewski, A. Sym, On Darboux's approach to R-separability of variables. Classification of conformally flat 4-dimensional binary metrics. *J. Phys. A, Math. Theor.* **48** (2015), No. 38, 385201.

W artykule 7) zostało opisane nowe podejście do badania R -separacji (tzn. separacji z czynnikiem funkcyjnym R) w stacjonarnym równaniu Schrödingera zdefiniowanym na n -wymiarowej przestrzeni Riemanna dopuszczającej współrzędne ortogonalne. Metoda ta (zainicjowana przez G. Darboux w płaskim przypadku 3-wymiarowym) umożliwia badanie przypadków separacji, w których liczba stałych separacji nie jest maksymalna. Sformułowano w sposób jawny warunki konieczne i dostateczne na metrykę i czynnik R tak, by R -separacja mogła zachodzić. Wprowadzono także ważną klasę metryk binarnych (spełniających jeden z warunków R -separowalności) oraz podano systematyczną procedurę, która pozwoliła znaleźć i przeanalizować wiele 3-wymiarowych przykładów.

Tematyka powyższa była kontynuowana w pracy 8), w której uogólniono warunki R -separowalności na przypadek metryk o dowolnej sygnaturze. Podano także pełną klasyfikację 4-wymiarowych, konforemnie płaskich metryk binarnych, co wymagało znalezienia wszystkich rozwiązań układu nieliniowych równań różniczkowych. W szczególności pokazano, że w najbardziej interesującym przypadku następującej metryki

$$g = \frac{u_{12}^\gamma u_{13}^\gamma u_{14}^\gamma}{F_1(u^1)} (du^1)^2 + \frac{u_{12}^\gamma u_{23}^\gamma u_{24}^\gamma}{F_2(u^2)} (du^2)^2 + \frac{u_{13}^\gamma u_{23}^\gamma u_{34}^\gamma}{F_3(u^3)} (du^3)^2 + \frac{u_{14}^\gamma u_{24}^\gamma u_{34}^\gamma}{F_4(u^4)} (du^4)^2, \quad (*)$$

gdzie $u_{ij} = u^i - u^j$, stała γ jest 'skwantowana' tzn. $\gamma \in \{-2, -1, 0, 1\}$ oraz funkcje $F(u^i)$ muszą być odpowiednimi wielomianami. Wykazano także, że wcześniej znane R -separowalne metryki podane przez E. Kalnina i W. Millera Jr. zawierają się w klasie metryk binarnych.

Rozwijana metoda pozwoliła skonstruować wiele przykładów metryk niestäckelowskich oraz metryk dopuszczających nieregularną R -separację. Zaproponowano też uzasadnienie dla terminu ' n -wymiarowa metryka izotermiczna' wprowadzonego w pracy 7). Zgodnie z nim n -wymiarowa metryka izotermiczna charakteryzuje się tym, iż każda 2-wymiarowa podrozmaitość zdefiniowana poprzez ustalenie $n - 2$ współrzędnych ortogonalnych posiada 2-wymiarową metrykę izotermiczną w zwykłym sensie.

Badania 4-wymiarowych (oraz n -wymiarowych) metryk binarnych są kontynuowane. W pracy *Diagonal Einstein metrics of special kind* 4-wymiarowe metryki binarne zostały przeanalizowane z punktu widzenia konforemnej Einsteinowskości. Okazuje się, że istnieje klasa metryk (\star) z $m = -3/4$, które nie są konformnie płaskie, ale są konformne do metryk spełniających próżniowe równania Einsteina $R_{\mu\nu} = 0$. Współczynnik konforemny może być obliczony i jawnie wyrażony przy użyciu tensora Weyla metryki g . W generycznym przypadku metryki (\star) nie posiadają żadnych konforemnych wektorów Killinga, ale udało się sklasyfikować wszystkie przypadki, w których metryki tego typu posiadają symetrie konforemne.

Innym naukowym projektem, w który jestem zaangażowany dotyczy dyskretyzacji 2-wymiarowych powierzchni zanurzonych w 3-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni rzutowej \mathbb{P}^3 . Parametryzując powierzchnie przy użyciu współrzędnych asymptotycznych stają się dostępne standardowe metody dyskretyzacji dla sieci asymptotycznych. Okazuje się, że dyskretyzacja w tym przypadku możliwa jest nie tylko na poziomie algebraicznym (dyskretyzacja równań różniczkowych), ale także geometrycznym. Od dawna wiadomo, że istnieje redukcja równań Gaussa-Mainardi-Codazzi prowadząca do równań zupełnie całkowalnych. Co więcej, symetryczna redukcja tych równań prowadzi do powierzchni rzutowo-minimalnych, które w naturalny sposób pojawiają się w kontekście równań solitonowych i mogą być sklasyfikowane algebraicznie i geometrycznie. W podobny sposób można dokonać redukcji na poziomie dyskretnym, co pozwala m.in. zdefiniować dyskretne powierzchnie rzutowo-minimalne. Wszystkie powyższe rezultaty zostaną zawarte w publikacji *Discrete projective minimal surfaces: geometry and integrability*. Projekt ten jest realizowany we współpracy z prof. W. K. Schiefem.

Adam Przeworski