Załącznik nr 2

Autoreferat

1 Imię i Nazwisko

Andrzej Okołów

2 Posiadane stopnie naukowe

1. Doktor nauk fizycznych w zakresie fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, rok 2004.
   Tytuł rozprawy doktorskiej: *Representations of Quantum Geometry (Reprezentacje kwantowej geometrii).*

2. Magister, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, rok 1999.
   Tytuł pracy magisterskiej: *Nowe zmienne samodualne w kanonicznej grawitacji.*

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

1. od października 2004 — adiunkt w Instytucie Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Warszawskiego;

2. od marca 2005 do lutego 2006 — staż podoktorski w Department of Physics & Astronomy, Louisiana State University (USA).

4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego — jednotematycznego cyklu publikacji

Kanoniczne kwantowanie teleparalelnego modelu ogólnej teorii względności — analiza hamiltonowska i konstrukcja kinematycznych stanów kwantowych.

4.2 Jednotematyczny cykl publikacji

[H1] Okołów A, Świeżewski J, 2012 Hamiltonian formulation of a simple theory of the teleparallel geometry. *Class. Quant. Grav.* **29** 045008. `arXiv:1111.5490`.

[H2] Okołów A, 2013 ADM-like Hamiltonian formulation of gravity in the teleparallel geometry. *Gen. Rel. Grav.* **45** 2569–2610. `arXiv:1111.5498`.

[H3] Okołów A, 2014 ADM-like Hamiltonian formulation of gravity in the teleparallel geometry: derivation of constraint algebra. *Gen. Rel. Grav.* **46** 1636. `wersja rozszerzona: arXiv:1309.4685`

[H4] Okołów A, 2013 Construction of spaces of kinematic quantum states for field theories via projective techniques. *Class. Quant. Grav.* **30** 195003. `arXiv:1304.6330`.

[H5] Okołów A, 2014 Variables suitable for constructing quantum states for the Teleparallel Equivalent of General Relativity I. *Gen. Rel. Grav.* **46** 1620. `arXiv:1305.4526`.

[H6] Okołów A, 2014 Variables suitable for constructing quantum states for the Teleparallel Equivalent of General Relativity II. *Gen. Rel. Grav.* **46** 1638. `arXiv:1308.2104`.

[H7] Okołów A, 2014 Kinematic quantum states for the Teleparallel Equivalent of General Relativity. *Gen. Rel. Grav.* **46** 1653. `arXiv:1304.6492`.

4.3 Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

4.3.1 Wprowadzenie

Jednym z najważniejszych wyzwań stojących przez współczesną fizyką teoretyczną jest sformułowanie teorii obejmującej ogólną teorię względności (OTW) i mechanikę kwantową (kwantową teorię pola). Pierwsze próby stworzenia takiej teorii zwanej powszechnie *kwantową grawitacją* miały miejsce w latach 30-tych ubiegłego wieku. Obecnie istnieje szereg podejść do kwantowej grawitacji [1, 2] takich jak np. teoria strun, pętlowa grawitacja kwantowa, piany spinowe, dynamiczne triangulacje, jednakże żadne z tych podejść nie jest wolne od mniej lub bardziej poważnych "wewnętrznych" problemów nie mówiąc już o tym, że eksperymentalna weryfikacja jakiegokolwiek modelu kwantowej grawitacji jest ciągle poza zasięgiem naszych możliwości. Ponieważ w obecnej sytuacji nie możemy być pewni, że którekolwiek z istniejących podejść doprowadzi do sformułowania poprawnej fizycznie kwantowej grawitacji, warto jest podejmować próby tworzenia nowych podejść do tego problemu.

Naturalnym sposobem konstruowania modelu kwantowej grawitacji jest kwantowanie OTW czyli zastosowanie wybranej procedury kwantyzacji do tej klasycznej teorii. Szczególną cechą OTW jest różnorodność jej lagranżowskich sformułowań używających różnych pól jako zmiennych konfiguracyjnych np. działanie Hilberta-Einsteina jest funkcjonałem na przestrzeni lorentzowskich metryk, zaś w tzw. sformułowaniu Palatiniego zmiennymi konfiguracyjnymi są koreper i jednoforma koneksji. Różnorodność sformułowań OTW oznacza *potencjalną* różnorodność modeli kwantowej grawitacji otrzymywanych poprzez zastosowanie różnych metod kwantyzacji do różnych sformułowań tej teorii.

Jednym ze sformułowań OTW, które dotychczas nie zostało użyte jako punkt wyjścia do kwantyzacji tej teorii, jest tzw. teleparalelny model OTW[1] (TOTW). Istnieją dwie wersje

[1] Najnowszą pracą przeglądową na temat tego sformułowania jest praca [3].

tego modelu różniące się zmiennymi konfiguracyjnymi: w jednym przypadku zmiennymi są koreper i jednoforma koneksji o zerowej krzywiźnie i niezerowej torsji, zaś w drugim przypadku zmienną konfiguracyjną jest koreper.

Celem sformułowanego przeze mnie projektu badawczego, który jak do tej pory zaowocował powstaniem cyklu prac [H1]-[H7] jest zbadanie, *czy TOTW daje się skwantować poprzez zastosowanie procedury kanonicznej kwantyzacji.* Ponadto, biorąc pod uwagę fakt, że TOTW jest teorią niezależną od tła (dyfeomorficznie niezmienniczą), postanowiłem skwantować ten model w sposób *niezależny od tła* podobnie jak to ma miejsce w przypadku pętlowej grawitacji kwantowej (patrz [4] i literatura podana w tej pracy).

W dużym skrócie *wyniki osiągnięte w cyklu prac* [H1]-[H7] można podsumować jak następuje:

1. podałem opis *hamiltonowskiej struktury* TOTW oraz pewnej pokrewnej teorii, która może służyć jako model–zabawka pomocny przy kwantowaniu TOTW; opis ten odpowiada wymaganiom procedury kanonicznego niezależnego od tła kwantowania,

2. metodę konstrukcji przestrzeni kinematycznych stanów kwantowych dla teorii pola opracowaną przez J. Kijowskiego [5] uogólniłem na przypadek teorii o nielinowych przestrzeniach fazowych (metoda oryginalna działa w przypadku tych teorii, których przestrzenie fazowe posiadają strukturę przestrzeni liniowej),

3. poprzez zastosowanie uogólnionej metody skonstruowałem w sposób niezależny od tła *przestrzeń kinematycznych stanów kwantowych* dla TOTW (i zarazem dla wspomnianego powyżej modelu–zabawki).

Przejdę teraz do szczegółowego omówienia wyników.

4.3.2 Hamiltonowskie sformułowanie TOTW

Krokiem wstępnym wymaganym przez kanoniczne kwantowanie jest zapisanie danej teorii w postaci hamiltonowskiej. W momencie rozpoczynania pracy nad projektem znane mi były prace [6, 7, 8, 9, 10] opisujące hamiltonowską strukturę TOTW. Wynikało z nich, że TOTW przetransformowana do postaci hamiltonowskiej jest systemem z więzami oraz że więzy są na tyle skomplikowanymi funkcjami zmiennych kanonicznych, że można było wykluczyć możliwość znalezienie ogólnych rozwiązań więzów. W tej sytuacji przyjąłem, że do kwantyzacji TOTW należy zastosować Diracowską procedurę kanoniczego kwantowania sytemów z więzami. Według tej procedury w pierwszym kroku zaniedbuje się więzy i konstruuje tzw. *przestrzeń kinematycznych stanów kwantowych* czyli przestrzeń stanów kwantowych odpowiadającą całej przestrzeni fazowej, następnie w drugim kroku uwzględnia się więzy poprzez nałożenie odpowiednich warunków (tzw. kwantowych więzów) na kinematyczne stany kwantowe.

Biorąc pod uwagę metodę kwantowania, jaką miałem zamiar zastosować, przyjąłem następujące kryteria, jakie powinno spełniać hamiltonowskie sformułowanie TOTW przydatne do moich celów:

K1. sformułowanie jest wyprowadzone bez ustalenia jakiegokolwiek cechowania (aby niepotrzebnie nie ograniczać symetrii modelu kwantowego), K2. przestrzeń fazowa ma możliwie najprostszą strukturę: zmiennymi kanonicznymi są koreper cofnięty na przestrzenne cięcie czasoprzestrzeni oraz pęd kanonicznie z nim sprzężony (to założenie ma na celu uproszczenie, a w praktyce umożliwienie konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych),

K3. w sposób jawny znane są komplet więzów na przestrzeni fazowej oraz algebra więzów (jest to wymóg stawiany przez Diracowską procedurę kwantyzacji),

K4. sformułowanie jest typu ADM [11] tzn. niedynamiczne stopnie swobody na lagranżowskiej przestrzeni konfiguracyjnej opisane są przez funkcję N upływu czasu (ang. *lapse function*) i pole wektorowe $\vec{N}$ przestrzennego przesunięcia (ang. *shift vector field*), dzięki czemu jednym z funkcjonałów więzów jest wektorowy funkcjonał więzów generujący na przestrzeni fazowej transformacje cechowania odpowiadające działaniu przestrzennych dyfeomorfizmów (wymaganie to motywowane jest chęcią skwantowania TOTW w sposób niezależny od tła).

Ponieważ żadne ze sformułowań opisanych w pracach [6, 7, 8, 9, 10] nie spełniało wszystkich wyżej wymienionych kryteriów konieczne stało się opracowania nowego hamiltonowskiego sformułowania TOTW zgodnego z tymi kryteriami. Jednakże zadanie to okazało się dość trudne z rachunkowego punktu widzenia. Dlatego też w pierwszym kroku postanowiłem wyprowadzić w formie ćwiczenia hamiltonowskie sformułowanie teorii, która posiadałaby taką samą lagranżowską przestrzeń konfiguracyjną co TOTW i której działanie byłoby mniej skomplikowanym funkcjonałem niż działanie TOTW lecz generującym *taką samą przestrzeń fazową*. Ponadto miałem zamiar otrzymać w ten sposób uproszczony model-zabawkę, na którym można byłoby testować elementy procedury kwantyzacji przed zastosowaniem ich do bardziej skomplikowanej TOTW. Jako uproszczoną teorię wybrałem *teleparalelny model typu Yanga-Millsa* (TMYM) [12] o działaniu następującej postaci

$$s[\boldsymbol{\theta}^A] = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{d\theta}^A \wedge \star \boldsymbol{d\theta}_A, \tag{4.1}$$

gdzie $(\boldsymbol{\theta}^A)_{A=0,1,2,3}$ jest koreperem na czterowymiarowej zorientowanej rozmaitości $\mathcal{M}$, $\boldsymbol{d}$ pochodną zewnętrzną na $\mathcal{M}$, $\star$ operatorem dualizacji Hodge'a zadanym przez metrykę

$$g := \eta_{AB}\, \boldsymbol{\theta}^A \otimes \boldsymbol{\theta}^B, \quad (\eta_{AB}) = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$$

zaś wskaźnik A w $\boldsymbol{\theta}_A$ został "opuszczony" za pomocą macierzy (η_{AB}).

Praca [H1] Strukturę hamiltonowską TMYM opisałem w pracy [H1] używając do tego ogólnego formalizmu hamiltonowskiego wyrażonego w języku form różniczkowych zaczerpniętego z pracy [13]. W ramach analizy wstępnej koniecznej do przeprowadzenia rozkładu 3+1 działania (4.1) znalazłem jawną formułę opisującą czasową składową koreperu $(\boldsymbol{\theta}^A_\perp)$ jako funkcję funkcji N, pola wektorowego $\vec{N}$ i przestrzennej części koreperu $(\underline{\boldsymbol{\theta}}^A)$ oraz wyprowadziłem wzór opisujący rozkład $3+1$ czteroformy postaci $\alpha \wedge \star\beta$, gdzie α, β są k-formami. Następnie podałem opis przestrzeni fazowej[2], znalazłem hamiltonian, komplet więzów na

[2]Opis ten zawiera drobny błąd w postaci zbyt słabego warunku nałożonego na zmienne "położeniowe" (θ^A). Błąd ten został skorygowany w pracy [H2].

przestrzeni fazowej oraz wyprowadziłem algebrę więzów — hamiltonian okazał się być sumą wszystkich więzów, zaś wszystkie więzy okazały się być więzami pierwszego rodzaju (ang. *first class constraints*).

Prace [H2, H3] Korzystając z doświadczeń wyniesionych z pracy nad TMYM przystąpiłem do badania kanonicznej struktury TOTW. Otrzymane rezultaty opublikowałem w pracach [H2, H3] — w pracy [H2] wyprowadziłem więzy i hamiltonian oraz przeanalizowałem transformacje cechowania generowane na przestrzeni fazowej przez funkcjonały więzów, w pracy [H3] wyprowadziłem algebrę więzów.

Za punkt wyjścia hamiltonowskiej analizy TOTW przyjąłem działanie [14, 15, 16, 17, 18, 19]

$$S[\boldsymbol{\theta}^A] = \int -\frac{1}{2}(\boldsymbol{d\theta}^A \wedge \boldsymbol{\theta}_B) \wedge \star(\boldsymbol{d\theta}^B \wedge \boldsymbol{\theta}_A) + \frac{1}{4}(\boldsymbol{d\theta}^A \wedge \boldsymbol{\theta}_A) \wedge \star(\boldsymbol{d\theta}^B \wedge \boldsymbol{\theta}_B). \tag{4.2}$$

Przestrzeń fazowa TOTW, którą otrzymałem, ma postać iloczynu kartezjańskiego $P \times \Theta$, gdzie

1. Θ jest zbiorem wszystkich czwórek $(\theta^A)_{A=0,1,2,3}$ jednoform określonych na trójwymiarowej *zorientowanej* rozmaitości[3] Σ takich, że
$$q := \eta_{AB}\, \theta^A \otimes \theta^B \tag{4.3}$$
jest *riemannowską (dodatnio określoną)* metryką na Σ,

2. P jest zbiorem wszystkich czwórek $(p_B)_{B=0,1,2,3}$ dwuform zdefiniowanych na Σ — dwuforma p_A jest pędem kanonicznie sprzężonym do jednoformy θ^A.

Kompletny zbiór więzów na powyższej przestrzeni fazowej opisałem za pomocą funkcjonałów: skalarnego funkcjonału więzów, wektorowego funkcjonału więzów oraz dwóch innych funkcjonałów — jeden z nich nazwałem funkcjonałem lorentzowskich pchnięć, a drugi funkcjonałem obrotów. Znalazłem także jawną postać algebry więzów, z której wynika, że wszystkie więzy są więzami pierwszego rodzaju. Hamiltonian TOTW, który wyprowadziłem z działania (4.2), jest sumą wszystkich wymienionych powyżej funkcjonałów więzów.

Wektorowy funkcjonał więzów $V(\vec{M})$ zależny od "rozsmarowującego" pola wektorowego $\vec{M}$ na rozmaitości Σ generuje transformacje cechowania na przestrzeni fazowej będące cofnięciem form (p_A, θ^B) wzdłuż krzywych całkowych pola $\vec{M}$ czyli działaniem przestrzennych dyfeomorfizmów na zmienne kanoniczne. Transformacje cechowania generowane przez funkcjonał lorentzowskich pchnięć i funkcjonał obrotów definiują lokalne transformacje Lorentza zmiennych kanonicznych — dokładniejsza analiza tych transformacji pokazała, że działają one na zmienne kanoniczne w dość niestandardowy sposób.

Znalezione w pracach [H2, H3] hamiltonowskie sformułowanie TOTW spełnia wszystkie kryteria K1–K4, co oznacza, że w oparciu o to sformułowanie można podjąć próbę kanonicznego kwantowania TOTW według metody Diraca i w sposób niezależny od tła.

[3] Rozmaitość Σ modeluje typowy liść foliacji definiującej rozkład $3+1$ czasoprzestrzeni.

4.3.3 Konstrukcja przestrzeni kinematycznych stanów kwantowych za pomocą technik projektywnych

Decyzja o próbie skwantowania TOTW w sposób *niezależny od tła* powoduje, że przestrzeń kinematycznych stanów kwantowych wymagana przez Diracowską procedurę kwantowania również powinna być skonstruowana w sposób niezależny od tła. Metoda konstrukcji takich przestrzeni została opracowana [20] na potrzeby pętlowej grawitacji kwantowej. Jednakże metoda ta nie jest ogólna tzn. nie daje się zastosować do każdej teorii pola, a w szczególności nie daje się zastosować do TOTW.

Inną metodą konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych dla teorii pola jest metoda J. Kijowskiego [5] wykorzystująca techniki projektywne. Ograniczeniem tej metody jest wymóg nałożony na przestrzeń fazową teorii, do której chcemy tą metodę zastosować — przestrzeń ta powinna posiadać strukturę przestrzeni liniowej. Nieliniowość otrzymanej przeze mnie przestrzeni fazowej TOTW (źródłem nieliniowości jest tu warunek nałożony na zmienne (θ^A)) zmotywowała mnie do podjęcia próby uogólnienia tej metody na teorie o nieliniowych przestrzeniach fazowych. Próba ta przeprowadzona z wykorzystaniem pewnych konstrukcji stosowanych w pętlowej grawitacji kwantowej [4, 21, 22] zakończyła się podwójnym sukcesem: po pierwsze, metoda dała się uogólnić, a po drugie, uogólniona metoda pozwoliła na skonstruowanie przestrzeni kinematycznych stanów kwantowych dla TOTW.

Praca [H4] Uogólnioną metodę konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych dla teorii pola opisałem w pracy [H4]. Idea tej konstrukcji zaczerpnięta z pracy [5] przedstawia się następująco. Punktem wyjścia konstrukcji jest specjalny zbiór skierowany $(\Lambda, \geq)$ — każdy element λ tego zbioru jest (w mniej lub bardziej dosłownym sensie) układem fizycznym o skończonej liczbie stopni swobody otrzymanym z przestrzeni fazowej danej teorii, zaś relacja $\geq$ jest dobrana w taki sposób, że jeżeli $\lambda' \geq \lambda$ to układ λ jest *podukładem* układu λ'. W pierwszym kroku konstrukcji dokonuje się "kwantyzacji" każdego układu λ poprzez przyporządkowanie mu przestrzeni $\mathcal{D}_\lambda$ stanów kwantowych, a w drugim kroku wszystkie przestrzenie $\{\mathcal{D}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ łączy się za pomocą technik projektywnych w jedną przestrzeń $\mathcal{D}$ stanów kwantowych odpowiadającą wyjściowej przestrzeni fazowej. Należy tu podkreślić, że uogólniona metoda, podobnie jak jej pierwowzór z pracy [5], bazuje na strukturze przestrzeni fazowej danej teorii pola bez uwzględniania ewentualnych więzów nałożonych na zmienne kanoniczne, stąd też przestrzeń $\mathcal{D}$ jest przestrzenią *kinematycznych* stanów kwantowych.

W pracy [H4] zbiór skierowany $(\Lambda, \geq)$ zdefiniowałem w oparciu o wybraną rodzinę funkcji na przestrzeni fazowej w sposób będący kombinacją oryginalnej metody J. Kijowskiego oraz konstrukcji pewnej algebry klasycznych obserwabli [22] znanej z pętlowej grawitacji kwantowej. Wspomniane funkcje na przestrzeni fazowej nazwałem *elementarnymi stopniami swobody* — zakładając, że przestrzeń fazowa teorii ma postać $P \times Q$, gdzie P jest przestrzenią pędów, a Q przestrzenią konfiguracyjną (przestrzenią "położeń") wprowadziłem zbiór *elementarnych konfiguracyjnych stopni swobody* jako wybraną rodzinę rzeczywistych funkcji na Q oraz zbiór *elementarnych pędowych stopni swobody* jako wybraną rodzinę rzeczywistych funkcji na P. Następnie założyłem, że każdemu pędowemu stopniowi swobody φ odpowiada operator liniowy $\hat{\varphi}$ działający na funkcje określone na przestrzeni Q — $\hat{\varphi}$ zdefiniowany jest za pomocą nawiasów Poissona

$$\Psi \mapsto \hat{\varphi}\Psi := \{\varphi, \Psi\} \tag{4.4}$$

lub, jeśli jest to konieczne, za pomocą odpowiedniej regularyzacji tych nawiasów. W kolejnym kroku wprowadziłem rzeczywistą przestrzeń wektorową $\hat{\mathcal{F}}$ rozpinaną przez wszystkie operatory $\{\hat{\varphi}\}$. Zbiór Λ zdefiniowałem jako zbiór złożony z par $(\hat{F}, K)$, gdzie $\hat{F}$ jest *skończenie wymiarową* podprzestrzenią liniową przestrzeni $\hat{\mathcal{F}}$, zaś K *skończonym* zbiorem elementarnych konfiguracyjnych stopni swobody.

Zgodnie z naszkicowaną powyżej ideą konstrukcji przestrzeni $\mathcal{D}$, każdy element $\lambda = (\hat{F}, K)$ zbioru Λ powinien dać się zinterpretować jako pewien skończony układ fizyczny. I rzeczywiście, taka interpretacja istnieje. Otóż konfiguracyjne stopnie swobody tworzące zbiór K definiują tzw. *zredukowaną przestrzeń konfiguracyjną* Q_K — punkt przestrzeni Q_K to podzbiór przestrzeni konfiguracyjnej Q, na którym każdy stopień swobody $\kappa \in K$ jest funkcją stałą. Przestrzeń Q_K odgrywa rolę przestrzeni konfiguracyjnej skończonego układu fizycznego, zaś operatory tworzące przestrzeń $\hat{F}$ działają w naturalny sposób na funkcje określone na Q_K i zawierają w sobie informację zarówno o pędowych stopniach swobody jak i o nawiasach Poissona[4].

Jednakże, aby interpretacja zbioru $(\Lambda, \geq)$ jako rodziny skończonych układów fizycznych wyposażonej w relację układ–podukład nie była jedynie powierzchowna i aby z tego zbioru można było wygenerować przestrzeń stanów kwantowych $\mathcal{D}$ musiałem nałożyć na ten zbiór szereg warunków, z których wymienię tu tylko trzy:

W1. jeżeli $(\hat{F}, K) \in \Lambda$ i K jest zbiorem N-elementowym to zredukowana przestrzeń konfiguracyjna Q_K jest w naturalnej bijekcji z $\mathbb{R}^N$.

W2. jeżeli $(\hat{F}, K) \in \Lambda$ to "struktura Poissonowska" zakodowana w operatorach tworzących przestrzeń $\hat{F}$ jest *niezdegenerowana* — niezdegenerowanie to jest odpowiednikiem niezdegenerowania zwykłych nawiasów Poissona[5] (niniejszy warunek jest naturalnym uogólnieniem pewnego warunku z pracy [5]).

W3. jeżeli $(\hat{F}', K') \geq (\hat{F}, K)$ to układ $(\hat{F}', K')$ zawiera pełną informację o układzie $(\hat{F}, K)$, a relacja między nimi jest liniowa w następującym sensie:

  (a) każdy stopień swobody $\kappa \in K$ jest *liniową kombinacją* stopni swobody tworzących zbiór K';

  (b) $\hat{F}$ jest *podprzestrzenią liniową* przestrzeni $\hat{F}'$.

Następnie wykazałem, że zbiór $(\Lambda, \geq)$ generuje w naturalny sposób przestrzeń $\mathcal{D}$ — uczyniłem to powtarzając zasadnicze kroki oryginalnej konstrukcji odwołując się przy tym jedynie do założonych przeze mnie właściwości zbioru $(\Lambda, \geq)$.

[4]Odwołując się do terminologii stosowanej w kanonicznym kwantowaniu przestrzeń operatorów $\hat{F}$ oraz przestrzeń funkcji na Q_K tworzą *algebrę elementarnych klasycznych obserwabli* [22] skończonego układu fizycznego.

[5]Nawiasy Poissona są niezdegenerowane, jeżeli definiują formę symplektyczną.

A zatem, jeżeli $\lambda = (\hat{F}, K) \in \Lambda$ to na mocy warunku W1 na przestrzeni Q_K istnieje miara $d\mu_\lambda$ odpowiadająca mierze Lebesgue'a na $\mathbb{R}^N$. Miara ta pozwala zdefiniować przestrzeń Hilberta

$$\mathcal{H}_\lambda := L^2(Q_K, d\mu_\lambda)$$

jako przestrzeń "czystych stanów kwantowych" układu λ oraz przestrzeń $\mathcal{D}_\lambda$ operatorów gęstości na $\mathcal{H}_\lambda$ jako przestrzeń "mieszanych stanów kwantowych" tego układu.

Pokazałem następnie, że jeżeli $\lambda' \geq \lambda$ to warunki nałożone na zbiór $(\Lambda, \geq)$ zadają jednoznacznie rozkład przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{\lambda'}$

$$\mathcal{H}_{\lambda'} = \tilde{\mathcal{H}}_{\lambda'\lambda} \otimes \mathcal{H}_{\lambda'\lambda}$$

taki, że przestrzeń $\mathcal{H}_{\lambda'\lambda}$ jest naturalnie izomorficzna przestrzeni $\mathcal{H}_\lambda$. Rozkład ten pozwala zdefiniować za pomocą cząstkowego śladu względem przestrzeni $\tilde{\mathcal{H}}_{\lambda'\lambda}$ projekcję

$$\pi_{\lambda\lambda'} : \mathcal{D}_{\lambda'} \to \mathcal{D}_\lambda.$$

Udowodniłem wreszcie, że tak otrzymana rodzina $\{\mathcal{D}_\lambda, \pi_{\lambda\lambda'}\}_{\lambda\in\Lambda}$ jest rodziną projektywną, co pozwoliło zdefiniować przestrzeń kinematycznych stanów kwantowych $\mathcal{D}$ jako *granicę projektywną* tej rodziny. Należy tutaj podkreślić, że przestrzeń stanów kwantowych $\mathcal{D}$ skonstruowana w ten sposób ze zbioru skierowanego $(\Lambda, \geq)$ *nie jest* przestrzenią Hilberta, lecz *zbiorem wypukłym stanów kwantowych.*

W obydwu metodach konstrukcji przestrzeni $\mathcal{D}$ tzn. w metodzie uogólnionej i oryginalnej kluczową rolę odgrywa liniowość zredukowanych przestrzeni konfiguracyjnych i liniowość relacji układ–podukład, a *podstawowa różnica* między tymi metodami polega na odmiennym źródle jednej i drugiej liniowości: w przypadku metody oryginalnej tym źródłem jest założona liniowość przestrzeni fazowej i wybór elementarnych stopni swobody w postaci liniowych funkcji na tej przestrzeni, zaś w przypadku metody uogólnionej tym źródłem są warunki W1, W3a oraz W3b, dzięki czemu metoda uogólniona może być stosowana w przypadku teorii o nieliniowych przestrzeniach fazowych.

Lista warunków, jakie zbiór $(\Lambda, \geq)$ powinien spełniać, aby generować przestrzeń $\mathcal{D}$ oraz konstrukcja przestrzeni $\mathcal{D}$ z takiego zbioru są głównymi wynikami pracy [H4]. Należy zaznaczyć, że wyniki te *nie gwarantują* ani istnienia ani jednoznaczności przestrzeni $\mathcal{D}$ dla każdej teorii pola. Wiadomo już też, że jednoznaczności przestrzeni $\mathcal{D}$ nie da się zapewnić — udało mi się skonstruować dwie istotnie różne przestrzenie $\mathcal{D}$ dla TOTW [H5, H7] (źródłem różnicy jest tu odmienny wybór elementarnych stopni swobody na przestrzeni fazowej TOTW).

Inne istotne wyniki pracy [H4], które omówię poniżej, to

1. konstrukcja przestrzeni $\mathcal{D}$ dla tzw. zdegenerowanej grawitacji Plebańskiego,

2. kolekcja kilku pomocniczych stwierdzeń przydatnych w praktyce przy konstruowaniu zbiorów skierowanych typu $(\Lambda, \geq)$ dla teorii pola,

3. konstrukcja przestrzeni Hilberta dla teorii pola w oparciu o pewne funkcje prawie okresowe.

Z praktycznego punktu widzenia główny wynik pracy [H4] sprowadza konstrukcję przestrzeni $\mathcal{D}$ do konstrukcji odpowiedniego zbioru $(\Lambda, \geq)$. Jest więc istotne zaprezentowanie przykładu konstrukcji takiego zbioru. W pracy [H4] uczyniłem to dla pewnej prostej, niezależnej od tła teorii pola, którą wprowadziłem w publikacji [P7]. Zmiennymi w tej teorii są pola zdefiniowane na czterowymiarowej rozmaitości $\mathcal{M}$: funkcja $\mathbf{\Psi}$, jednoforma $\mathbf{A}$ reprezentująca koneksję na trywialnej wiązce głównej $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ oraz dwuforma $\boldsymbol{\sigma}$. Działanie tej teorii ma postać

$$S[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \mathbf{\Theta}] := \int \boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{d}\mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{\Psi}\, \boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{\sigma},$$

a przestrzeń fazowa jest zbiorem par (σ, A) pól określonych na trójwymiarowej rozmaitości Σ — σ jest dwuformą pełniącą rolę pędu kanonicznie sprzężonego do jednoformy A. Teorię tą nazwałem *zdegenerowaną grawitacją Plebańskiego* (ZGP) ponieważ powyższe działanie bierze się z dość radykalnego uproszczenia samodualnego działania Plebańskiego [23], a sama teoria opisuje tzw. zdegenerowany sektor OTW typu $1+1$ analizowany w pracy [24].

Definiując odpowiedni zbiór skierowany $(\Lambda, \geq)$ dla ZGP w sposób niezależny od tła wykorzystałem pewne konstrukcje stosowane w pętlowej grawitacji kwantowej [4, 21, 22]: elementarne konfiguracyjne stopnie swobody zdefiniowałem jako całki z jednoformy A wzdłuż zwartych odcinków krzywych, zaś elementarne pędowe stopnie swobody jako całki z dwuformy σ po ograniczonych dwuwymiarowych powierzchniach:

$$\kappa_e(A) := \int_e A, \qquad\qquad \varphi_S(\sigma) := \int_S \sigma,$$

gdzie e jest odcinkiem krzywej, a S powierzchnią. Ponieważ nawias Poissona $\{\varphi_S, \kappa_e\}$ nie jest dobrze zdefiniowany jako operatora liniowego $\hat{\varphi}_S$ użyłem tzw. operatora strumienia (ang. *flux operator*) [22] otrzymanego przez pewną regularyzację nawiasu $\{\varphi_S, \kappa_e\}$. Z grafem γ zawartym w rozmaitości Σ związałem zbiór K_γ konfiguracyjnych stopni swobody zadanych przez ramiona tego grafu. Jako zbiór Λ wybrałem zbiór wszystkich par $\{(\hat{F}, K_\gamma)\}$ o niezdegenerowanej "strukturze Poissonowskiej" (warunek W2), gdzie γ przebiega zbiór wszystkich grafów. Relację $\geq$ na zbiorze Λ zdefiniowałem jak następuje:

$$(\hat{F}', K_{\gamma'}) \geq (\hat{F}, K_\gamma) \qquad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \qquad \begin{cases} \hat{F}' \supset \hat{F} \\ \gamma' \geq \gamma \end{cases}$$

(ostatnia relacja jest standardową relacją na zbiorze skierowanym grafów stosowaną powszechnie w pętlowej grawitacji kwantowej). Następnie pokazałem, że zbiór $(\Lambda, \geq)$ jest zbiorem skierowanym oraz że spełnia wszystkie wymagane warunki.

Konstruując zbiór $(\Lambda, \geq)$ dla ZGP oraz dowodząc, że spełnia on wszystkie wymagane warunki doszedłem do wniosku, że pewne stwierdzenia użyte w tych celach warto sformułować i udowodnić w ogólny sposób tak aby mogły być pomocne w innych przypadkach — stwierdzenia te tak sformułowane i udowodnione zamieściłem w pracy [H4] (rozdział 3.6). Zostały one następnie wykorzystane w pracy [H7] np. dwa twierdzenia dotyczące liniowej niezależności operatorów należących do przestrzeni $\hat{\mathcal{F}}$ okazały się niezbędne przy dowodzeniu, że zbiór $(\Lambda, \geq)$ skonstruowany dla TOTW w pracy [H7] rzeczywiście jest zbiorem skierowanym.

W trakcie pracy nad ogólną konstrukcją przestrzeni $\mathcal{D}$ zauważyłem, że dla każdej teorii pola, dla której przestrzeń $\mathcal{D}$ daje się skonstruować, istnieje ponadto pewna przestrzeń Hilberta. Otóż ze zbiorem $(\Lambda, \geq)$ generującym przestrzeń $\mathcal{D}$ związany jest inny zbiór skierowany $(\mathbb{K}, \geq)$ — zbiór ten tworzą wszystkie zbiory $\{K\}$ użyte do konstrukcji zbioru Λ, a relacja $\geq$ jest zdefiniowana poprzez odwołanie się do warunku W3a. Na każdej zredukowanej przestrzeni Q_K istnieje zbiór funkcji prawie okresowych tworzących (nieośrodkową) przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_K$. Pokazałem, że rodzinę $\{\mathcal{H}_K\}_{K\in\mathbb{K}}$ można w prosty sposób wyposażyć w strukturę *rodziny induktywnej*, co pozwala zdefiniować nową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ jako *granicę induktywną* tej rodziny.

Przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ jest matematycznym produktem ubocznym konstrukcji przestrzeni $\mathcal{D}$ — w tej chwili trudno jest mi powiedzieć, czy przestrzeń $\mathcal{H}$ może mieć jakieś znaczenie czy zastosowanie fizyczne.

4.3.4 Konstrukcja przestrzeni kinematycznych stanów kwantowych dla TOTW

Konstrukcji przestrzeni kinematycznych stanów kwantowych dla TOTW (i jednocześnie dla TMYM) za pomocą uogólnionej metody projektywnej poświęciłem ostatnie trzy prace cyklu: [H5], [H6] oraz [H7] — w dwóch pierwszych pracach wprowadziłem i poddałem analizie nowe zmienne kanoniczne dla TOTW, zaś w trzeciej pracy opisałem opartą na nowych zmiennych konstrukcję odpowiedniego zbioru skierowanego $(\Lambda, \geq)$ dla TOTW.

Praca [H5] Pracę [H5] rozpocząłem od zbadania możliwości skonstruowania zbioru $(\Lambda, \geq)$ dla TOTW w oparciu o elementarne stopnie swobody zdefiniowane w naturalny sposób przez zmienne kanoniczne (p_A, θ^B) otrzymane w pracach [H2, H1]:

$$\kappa^A_e(\theta) := \int_e \theta^A, \qquad\qquad \varphi^S_B(p) := \int_S p_B, \tag{4.5}$$

gdzie $\theta \equiv (\theta^B)$ oraz $p \equiv (p_A)$. W tym celu pokazałem, że dla każdego grafu γ zbiór K_γ konfiguracyjnych stopni swobody zadanych przez ramiona tego grafu definiuje zredukowaną przestrzeń konfiguracyjną Θ_{K_γ} będącą w naturalnej bijekcji z odpowiednim $\mathbb{R}^N$ (warunek W1). Wynika stąd, że używając stopni swobody (4.5) można skonstruować spełniający wszystkie wymagania zbiór $(\Lambda, \geq)$ dla TOTW — wystarczy powtórzyć wszystkie kroki omówionej wcześniej konstrukcji takiego zbioru dla ZGP nieznacznie je modyfikując tam gdzie jest to koniecznie. Istnieje zatem przestrzeń kinematycznych stanów kwantowych $\bar{\mathcal{D}}$ dla TOTW generowana przez stopnie swobody (4.5).

Odkryłem jednak, że przestrzeń $\bar{\mathcal{D}}$ posiada pewien dość poważny mankament. Otóż stopnie swobody (4.5) nic "nie wiedzą" o warunku definiującym przestrzeń konfiguracyjną Θ czyli o tym, że jednoformy $(\theta^A) \in \Theta$ definiują za pomocą wzoru (4.3) riemannowską metrykę. W konsekwencji stany kwantowe tworzące przestrzeń $\bar{\mathcal{D}}$ odpowiadają także tym jednoformom (θ^A), które definiują metryki lorentzowskie. Oznacza to, że przestrzeń $\bar{\mathcal{D}}$ jest "zbyt duża" z punktu widzenia kwantyzacji TOTW i aby dostosować ją do moich potrzeb na stany kwantowe tworzące tą przestrzeń muszę nałożyć pewne ograniczenie odpowiadające warunkowi nałożonemu na zmienne (θ^A). Niestety, jak pokazałem, nie można tego dokonać za pomocą rodziny ograniczeń $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ takich, że dla każdego $\lambda \in \Lambda$ ograniczenie R_λ nałożone jest na elementy przestrzeni $\mathcal{D}_\lambda$ użytej do konstrukcji przestrzeni $\bar{\mathcal{D}}$. Fakt ten w połączeniu ze złożonością przestrzeni $\bar{\mathcal{D}}$ czyni nałożenie pożądanego ograniczenia na stany kwantowe zadaniem bardzo trudnym. Konkluzja ta oznaczała w praktyce konieczność znalezienia nowych zmiennych kanonicznych na przestrzeni fazowej TOTW, które generowałyby przestrzeń $\mathcal{D}$ wolną od mankamentu przestrzeni $\bar{\mathcal{D}}$.

Pierwszym krokiem do tego celu było wprowadzenie nowych zmiennych na przestrzeni konfiguracyjnej Θ. W rzeczywistości, zdefiniowałem całą rodzinę $\{(\xi^I_\iota, \theta^J)\}$ nowych zmiennych na Θ indeksowaną pewnym wskaźnikiem ι. Dla ustalonego wskaźnika

1. $(\xi^I_\iota)_{I=1,2,3}$ jest trójką rzeczywistych funkcji na Σ,
2. $(\theta^J)_{J=1,2,3}$ jest trójką jednoform na Σ tworzących globalny koreper na tej rozmaitości.

Związek nowych zmiennych (ξ^I_ι, θ^J) ze zmiennymi wyjściowymi (θ^A) jest następujący: jednoformy (θ^J) są formami wchodzącymi w skład czwórki $(\theta^A) = (\theta^0, \theta^J)$, zaś trzy funkcje (ξ^I_ι) zawierają informację o składowych jednoformy θ^0 wyrażonej w koreperze (θ^J). Wybór nowych zmiennych (ξ^I_ι, θ^J) uzasadniłem

1. właściwościami metryki (4.3) wyrażonej przez nowe zmienne,
2. naturalną interpretacją nowych zmiennych;
3. właściwościami elementarnych konfiguracyjnych stopni swobody zdefiniowanych w naturalny sposób przez nowe zmienne.

I tak, pokazałem, że metryka (4.3) wyrażona jako funkcja nowych zmiennych nie może być lorentzowska nawet jeżeli zrezygnuje się z żądania, że (θ^J) tworzą globalny koreper na Σ. Oznacza to, że jeżeli w oparciu o zmienne (ξ^I_ι, θ^J) oraz pędy doń sprzężone można skonstruować przestrzeń $\mathcal{D}$ stanów kwantowych dla TOTW to stany kwantowe tworzące $\mathcal{D}$ nie będą związane z lorentzowskimi metrykami na Σ.

Odnośnie interpretacji zmiennych (ξ^I_ι): w opisach hamiltonowskich struktur TOTW i TMYM zaprezentowanych w pracach [H2, H3, H1] istotną rolę odgrywa czwórka $(\xi^A)_{A=0,1,2,3}$ pewnych funkcji na rozmaitości Σ. Funkcje te pozwalają odtworzyć czasową składową $(\boldsymbol{\theta}^A_\perp)$ czasoprzestrzennego koreperu z jednoform $(\theta^A) \in \Theta$, funkcji N i pola wektorowego $\vec{N}$:

$$\boldsymbol{\theta}^A_\perp = N\xi^A + \vec{N} \lrcorner\, \theta^A;$$

funkcje (ξ^A) pojawiają się także w więzach i hamiltonianach TOTW i TMYM. Otóż nowe zmienne (ξ^I_ι) są tożsame (z dokładnością do znaku) z funkcjami ξ^1, ξ^2, ξ^3 wchodzącymi w skład czwórki (ξ^A).

Nowe zmienne (ξ^I_ι, θ^J) definiują w naturalny sposób następujące konfiguracyjne stopnie swobody:

$$\kappa^I_y(\theta) := \xi^I_\iota(y), \qquad\qquad \kappa^J_e(\theta) = \int_e \theta^J, \tag{4.6}$$

gdzie $\theta \equiv (\xi^I_\iota, \theta^J)$, a y jest punktem rozmaitości Σ. Pokazałem, że tak zdefiniowane stopnie swobody posiadają szereg własności pożądanych z punktu widzenia ich przyszłego zastosowania do niezależnej od tła konstrukcji zbioru $(\Lambda, \geq)$ dla TOTW. Wykazałem w szczególności, że zbiór $K_{u,\gamma}$ stopni swobody (4.6) zadanych przez punkty skończonego zbioru $u \subset \Sigma$ i ramiona grafu γ definiuje zredukowaną przestrzeń konfiguracyjną $Q_{K_{u,\gamma}}$ będącą w naturalnej bijekcji z odpowiednim zbiorem $\mathbb{R}^N$.

Na tym zakończyłem pracę [H5].

Praca [H6] Analizę rodziny $\{(\xi^I_\iota, \theta^J)\}$ nowych zmiennych kontynuowałem w pracy [H6] uzyskując następujące wyniki:

1. znalazłem proste kryterium odróżniające różniczkowalne (w sensie rachunku wariacyjnego) zmienne (ξ^I_ι, θ^J) od nieróżniczkowalnych;

2. wprowadziłem pędy $(\zeta_{\iota I}, r_J)$ kanonicznie sprzężone do różniczkowalnych zmiennych (ξ^I_ι, θ^J) — $\zeta_{\iota I}$ jest trójformą na Σ pełniącą rolę pędu kanonicznie sprzężonego do funkcji ξ^I_ι, zaś dwuforma r_J jest pędem kanonicznie sprzężonym do θ^J;

3. wyraziłem nowe zmienne kanoniczne $(\zeta_{\iota I}, r_J, \xi^K_\iota, \theta^L)$ w funkcji wyjściowych zmiennych (p_A, θ^B) i *vice versa*;

4. wyraziłem więzy (a tym samym i hamiltoniany) TOTW i TMYM w funkcji nowych zmiennych kanonicznych;

5. pokazałem, że struktury hamiltonowskie TOTW i TMYM opisane w pracach [H2, H1] *wyróżniają dwa komplety zmiennych* $(\zeta_{\iota I}, r_J, \xi^K_\iota, \theta^L)$. Mianowicie, dla wszystkich innych zmiennych tego typu istnieje pewna przeszkoda w definiowaniu kwantowych więzów: otóż jeżeli w oparciu o stopnie swobody zadane w naturalny sposób przez te zmienne można zbudować przestrzeń stanów kwantowych $\mathcal{D}$ to dla niektórych więzów TOTW i TMYM nie można znaleźć kwantowych odpowiedników w postaci rodzin operatorów $\{\hat{C}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ takich, że $\hat{C}_\lambda$ jest operatorem więzów na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_\lambda$. Dla wspomnianych dwóch kompletów zmiennych ta przeszkoda nie występuje.

Praca [H7] Wynikiem wieńczącym cykl prac [H1]-[H7] jest niezależna od tła konstrukcja przestrzeni $\mathcal{D}$ kinematycznych stanów kwantowych dla TOTW (i TMYM) — konstrukcja ta sprowadza się do opisanej w pracy [H7] konstrukcji odpowiedniego zbioru skierowanego $(\Lambda, \geq)$.

Do konstrukcji zbioru $(\Lambda, \geq)$ dla TOTW użyłem stopni swobody zdefiniowanych przez jeden z dwóch wyróżnionych kompletów zmiennych $(\zeta_{\iota I}, r_J, \xi^K_\iota, \theta^L)$, aczkolwiek konstrukcja ta jest poprawna dla dowolnych zmiennych tego typu. Użyte konfiguracyjne stopnie swobody to oczywiście stopnie swobody (4.6), zaś użyte pędowe stopnie swobody to

$$\varphi^V_I(p) := \int_V \zeta_{\iota I}, \qquad\qquad \varphi^S_J(p) := \int_S r_J,$$

gdzie $p \equiv (\zeta_{\iota I}, r_J)$, a V jest trójwymiarową podrozmaitością rozmaitości Σ. Operator $\hat{\varphi}^V_I$ zdefiniowałem za pomocą nawiasu Poissona (4.4), zaś w charakterze operatora $\hat{\varphi}^S_J$ zastosowałem podobnie jak w przypadku ZGP operator strumienia.

Wyniki uzyskane w pracy [H5] sugerują, że zbiór Λ dla TOTW powinien zostać zdefiniowany jako zbiór wszystkich par $\{(\hat{F}, K_{u,\gamma})\}$ o niezdegenerowanej "strukturze Poissonowskiej" (przypomnę, że u jest tu skończonym zbiorem punktów rozmaitości Σ, a γ jest grafem). Uznałem jednak za rzecz pożądaną, aby na każdej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_\lambda$ użytej do konstrukcji przestrzeni $\mathcal{D}$ można było zdefiniować pewien rodzaj geometrii kwantowej generowanej przez riemannowską geometrię rozmaitości Σ. Pokazałem następnie, że aby taką kwantową geometrię można było łatwo zdefiniować para (u, γ) powinna spełniać pewne proste warunki. Parę $\dot{\gamma} \equiv (u, \gamma)$ spełniającą te warunki nazwałem *grafem kropkowanym* (ang. *speckled graph*) i udowodniłem, że wszystkie grafy kropkowane tworzą zbiór skierowany.

Ostatecznie zbiór Λ dla TOTW zdefiniowałem jako zbiór wszystkich par $\{(\hat{F}, K_{\dot{\gamma}})\}$ o niezdegenerowanej "strukturze Poissonowskiej", gdzie $\dot{\gamma}$ przebiega zbiór wszystkich grafów kropkowanych zawartych w Σ. Na zbiorze Λ wprowadziłem relację:

$$(\hat{F}', K_{\dot{\gamma}'}) \geq (\hat{F}, K_{\dot{\gamma}}) \qquad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \qquad \begin{cases} \hat{F}' \supset \hat{F} \\ \dot{\gamma}' \geq \dot{\gamma} \end{cases},$$

a następnie pokazałem, że $(\Lambda, \geq)$ jest zbiorem skierowanym spełniającym wszystkie wymagania nałożone na taki zbiór w pracy [H4]. Oznacza to, że $(\Lambda, \geq)$ generuje przestrzeń kinematycznych stanów kwantowych $\mathcal{D}$ dla TOTW (i TMYM).

Ponadto w pracy [H7] uzyskałem dwa inne istotne wyniki:

1. pokazałem, że naturalne działanie dyfeomorfizmów rozmaitości Σ na pola $(\zeta_{\iota I}, r_J, \xi^K_\iota, \theta^L)$ generuje działanie tych dyfeomorfizmów na przestrzeni $\mathcal{D}$ oraz, że działanie to zachowuje przestrzeń $\mathcal{D}$ — wynik ten pokazuje, że przestrzeń $\mathcal{D}$ może być użyta do niezależnej od tła kwantyzacji TOTW;

2. wykazałem, że dwa wyróżnione komplety zmiennych $(\zeta_{\iota I}, r_J, \xi^K_\iota, \theta^L)$ generują tą samą przestrzeń $\mathcal{D}$.

4.3.5 Podsumowanie wyników

Cykl prac [H1]-[H7] powstał w ramach realizacji własnego projektu badawczego, którego celem jest kanoniczne niezależne od tła skwantowanie TOTW. W pracach tych

1. opisałem struktury hamiltonowskie TOTW i TMYM w sposób dostosowany do potrzeb kanonicznej niezależnej od tła kwantyzacji,

2. opracowałem uogólnioną metodę konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych dla teorii pola za pomocą technik projektywnych — uogólnienie wiąże się tu z rozszerzeniem stosowalności oryginalnej metody na teorie o nieliniowych przestrzeniach fazowych,

3. wykonałem pierwszy krok Diracowskiej procedury kanonicznego kwantowania w zastosowaniu do TOTW i TMYM — używając uogólnionej metody skonstruowałem w sposób niezależny od tła przestrzeń $\mathcal{D}$ kinematycznych stanów kwantowych dla tych teorii,

4. na przestrzeni $\mathcal{D}$ zdefiniowałem zachowujące tą przestrzeń działanie grupy dyfeomorfizmów trójwymiarowej rozmaitości Σ modelującej przestrzenne cięcie czasoprzestrzeni.

Według mojej wiedzy

1. opis struktury kanonicznej TOTW podany w pracy [H2] jest pierwszym opisem tej struktury spełniającym kryteria K1–K3 otrzymanym przez rozkład typu ADM czasoprzestrzennego koreperu $(\boldsymbol{\theta}^A)$ (czyli rozkład na funkcję N upływu czasu, pole wektorowe $\vec{N}$ przestrzennego przesunięcia oraz część przestrzenną $(\underline{\boldsymbol{\theta}}^A)$),
2. przestrzeń $\mathcal{D}$ skonstruowana dla TOTW jest pierwszą przestrzenią kinematycznych stanów kwantowych znalezioną dla tego sformułowania OTW.

4.3.6 Wykorzystanie wyników

Wyniki otrzymane w cyklu prac [H1]-[H7] pozwalają rozpocząć drugi etap Diracowskiej procedury kwantowania TOTW polegający na zdefiniowaniu (i rozwiązaniu, o ile okaże się to możliwe) kwantowych więzów na przestrzeni $\mathcal{D}$ odpowiadających więzom na przestrzeni fazowej TOTW. W szczególności, działanie grupy przestrzennych dyfeomorfizmów na przestrzeni $\mathcal{D}$ może być użyte do znalezienia rozwiązań kwantowych więzów będących odpowiednikiem więzów zdefiniowanych przez funkcjonał wektorowy $V(\vec{M})$ — wzorując się na pętlowej grawitacji kwantowej [21] za takie rozwiązanie można uznać każdy zachowywany przez to działanie element przestrzeni $\mathcal{D}$ (o ile taki element istnieje).

Ponadto metoda konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych przedstawiona w pracy [H4] wydaje się być na tyle ogólna, że można podejmować próby zastosowania jej do innych teorii pola czy też do innych sformułowań OTW — konstrukcja nowych przestrzeni stanów kwantowych dla pętlowej grawitacji kwantowej i pętlowej kosmologii kwantowej odwołująca się do prac J. Kijowskiego i moich została przedstawiona [25] na jednej z niedawno zorganizowanych konferencji.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5.1 Pozostałe publikacje

[P1] Lewandowski J, Okołów A, 2000 2-Form Gravity of the Lorentzian Signature. *Class. Quant. Grav.* **17** L47–L51. `arXiv:gr-qc/9911121`.

[P2] Okołów A, Lewandowski J, 2003 Diffeomorphism covariant representations of the holonomy-flux *-algebra. *Class. Quant. Grav.* **20** 3543–3567. `arXiv:gr-qc/0302059`.

[P3] Okołów A, Lewandowski J, 2005 Automorphism covariant representations of the holonomy-flux *-algebra. *Class. Quant. Grav.* **22** 657–679. `arXiv:gr-qc/0405119`.

[P4] Okołów A, 2005 Hilbert space built over connections with a non-compact structure group. *Class. Quant. Grav.* **22** 1329–1359. `arXiv:gr-qc/0406028`.

[P5] Lewandowski J, Okołów A, Sahlmann H, Thiemann T, 2006 Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy-flux algebras. *Comm. Math. Phys.* **267** 703–733. `arXiv:gr-qc/0504147`.

[P6] Kamiński W, Lewandowski J, Okołów A, 2006 Background independent quantizations: the scalar field II. *Class. Quant. Grav.* **23** 5547–5586. `arXiv:gr-qc/0604112`.

[P7] Okołów A, 2009 Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with a non-compact structure group—an example. *Comm. Math. Phys.* **28** 335–382. `arXiv:gr-qc/0605138`.

[P8] Lewandowski J, Okołów A, 2009 Quantum group connections. *J. Math. Phys.* **50** 123522. `arXiv:0810.2992`.

[P9] Dziendzikowski M, Okołów A, 2010 New diffeomorphism invariant states on a holonomy-flux algebra. *Class. Quant. Grav.* **27** 225005. `arXiv:0912.1278`.

5.2 Omówienie wyżej wymienionych prac

Moim pierwszym osiągnięciem naukowym było opisanie kanonicznej struktury teorii grawitacji zadanej przez nowe działanie dla tej teorii, które zapostulowane zostało przez J. Lewandowskiego. Podsumowanie otrzymanych wyników opublikowano w pracy [P1].

Kolejne zagadnienie, nad którym pracowałem, związane jest z reprezentacjami tzw. $*$-*algebry strumieni i holonomii* (ang. *holonomy-flux $*$-algebra*). Algebra ta stanowi istotny element procedury kanonicznej kwantyzacji prowadzącej od klasycznej grawitacji opisanej za pomocą rzeczywistych zmiennych Ashtekara-Barbero [26] do pętlowej grawitacji kwantowej [21, 4]. W najogólniejszym ujęciu algebra strumieni i holonomii jest algebrą "abstrakcyjnych" operatorów skonstruowaną dla przestrzeni fazowej, której punkty to pary pól (E, A), gdzie A jest koneksją na wiązce głównej $P(\Sigma, G)$ o rozmaitości bazowej Σ i grupie strukturalnej G, zaś pęd E kanonicznie sprzężony do A jest $(\dim \Sigma - 1)$-formą typu ad na wiązce P — w przypadku pętlowej grawitacji kwantowej $P = \Sigma \times SU(2)$, gdzie $\dim \Sigma = 3$.

W pętlowej grawitacji kwantowej przestrzeń kinematycznych stanów kwantowych jest przestrzenią Hilberta $\mathcal{H}_{AL}$ funkcji falowych zdefiniowanych na przestrzeni (uogólnionych) koneksji o grupie strukturalnej $SU(2)$ całkowalnych z kwadratem względem miary Ashtekara-Lewandowskiego [20]. Ten model kwantowej grawitacji jest niezależny od tła (dyfeomorficznie niezmienniczy), czego szczególnym przejawem jest fakt, że użyta w tym modelu reprezentacja $*$-algebry strumieni i holonomii na przestrzeni $\mathcal{H}_{AL}$ jest *współzmiennicza względem działania dyfeomorfizmów.*

Zagadnienie innych reprezentacji algebry strumieni i holonomii niż wyżej wymieniona jako pierwszy poruszył H. Sahlmann [27][6]. W pracy [28] pokazał on, że aby reprezentacja algebry strumieni i holonomii zdefiniowana w oparciu o wiązkę z grupą strukturalną $U(1)$ była *dyfeomorficznie współzmiennicza* przestrzeń Hilberta tej reprezentacji musi być przestrzenią

[6] Obydwie prace H. Sahlmanna [27] i [28] zostały upublicznione w formie preprintów w roku 2002, a opublikowane w recenzowanym czasopiśmie dopiero w roku 2011.

funkcji określonych na zbiorze koneksji na tej wiązce i całkowalnych z kwadratem względem miary Ashtekara-Lewandowskiego.

Przy wsparciu J. Lewandowskiego udało mi się uogólnić rezultat H. Sahlmanna na przypadek algebry strumieni i holonomii zbudowanej w oparciu o trywialną wiązkę główną postaci $\mathbb{R}^n \times G$, gdzie G jest dowolną zwartą i spójną grupą Liego. Wynik ten opublikowany został w pracy [P2]. Następnie samodzielnie dokonałem kolejnego uogólnienia tego wyniku — tym razem na przypadek dowolnej wiązki głównej $P(\Sigma, G)$ ze zwartą i spójną grupą strukturalną G, co zostało opisane w pracy [P3].

Zwieńczeniem prac nad dyfeomorficznie współzmienniczymi reprezentacjami algebry strumieni i holonomii stało się *twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności dyfeomorficznie niezmienniczego stanu (liniowego funkcjonału)* na tej algebrze, który to stan za pomocą konstrukcji GNS definiuje dyfeomorficznie współzmienniczą reprezentację tej algebry na przestrzeni Hilberta. Wynik ten został opublikowany w pracy [P5]. Mój wkład do tej pracy (w postaci kilku istotnych elementów zarówno sformułowania jak i dowodu twierdzenia) był mniejszy od wkładów J. Lewandowskiego i H. Sahlmanna.

Twierdzenie udowodnione w pracy [P5] jest słuszne przy pewnym warunku nałożonym na algebrę strumieni i holonomii. W pracy tej przedstawiony został znaleziony przeze mnie przykład algebry strumieni i holonomii nie spełniającej wspomnianego warunku, na której istnieją dwa różne dyfeomorficznie niezmiennicze stany. Powstało więc pytanie, czy istnieją inne przykłady tego typu. Pozytywna odpowiedź na to pytanie została udzielona w pracy [P9], gdzie został opisany przykład algebry strumieni i holonomii niepodlegającej założeniom twierdzenia z pracy [P5], na której istnieje nieskończenie wiele różnych dyfeomorficznie niezmienniczych stanów. Pomysł konstrukcji tej algebry i tych stanów pochodzi od M. Dziendzikowskiego. Mój wkład do tej pracy polegał na opracowaniu znacznej części dowodu stwierdzenia zapewniającego, że formuła zaproponowana przez współautora pracy rzeczywiście definiuje dyfeomorficznie niezmienniczy liniowy funkcjonał na tej algebrze.

Problemem pokrewnym do problemu istnienia i jednoznaczności dyfeomorficznie niezmienniczych stanów na algebrze strumieni i holonomii jest problem klasyfikacji homeomorficznie niezmienniczych stanów na pewnej $*$-algebrze "abstrakcyjnych" operatorów skonstruowanej dla teorii pola skalarnego. Problemem tym zajmowali się W. Kamiński i J. Lewandowski. Jednym z elementów znalezionego przez nich rozwiązania tego problemu jest pewien sformułowany i udowodniony przeze mnie lemat, który nie był wcześniej nigdzie opublikowany. Dlatego też W. Kamiński i J. Lewandowski uznali za stosowne dodać moje nazwisko do listy autorów pracy [P6] opisującej uzyskane przez nich wyniki.

Innym zagadnieniem, którym się zajmowałem, było znalezienie nieprzemiennego odpowiednika tzw. *przestrzeni uogólnionych koneksji* (ang. *space of generalized connections*). Przestrzeń uogólnionych koneksji $\overline{\mathcal{A}}$ jest pewnym rozszerzeniem przestrzeni koneksji $\mathcal{A}$ na wiązce głównej $P(\Sigma, G)$ o zwartej grupie strukturalnej wprowadzonym na potrzeby kwantyzacji — przestrzeń uogólnionych koneksji o grupie strukturalnej $SU(2)$ zdefiniowanych w oparciu o trójwymiarową rozmaitość bazową Σ jest kwantową przestrzenią konfiguracyjną dla pętlowej grawitacji kwantowej [29]. Przestrzeń $\overline{\mathcal{A}}$ może być zdefiniowana jako spektrum Gelfanda pewnej przemiennej C^*-algebry zwanej algebrą Ashtekara-Ishama (AI). J. Lewandowski zauważył, że algebrę AI można skonstruować z C^*-algebry $C^0(G)$ funkcji ciągłych na grupie G przy użyciu pewnych technik induktywnych i sformułował następujący problem:

czy zastępując algebrę $C^0(G)$ jej nieprzemienną "deformacją", a ściślej mówiąc, zwartą grupą kwantową w sensie Woronowicza [30] można otrzymać nieprzemienny odpowiednik algebry AI, który zgodnie z ideą nieprzemiennej geometrii "definiuje" przestrzeń "nieprzemiennych koneksji"? Na tak postawione pytanie udzieliłem pozytywnej odpowiedzi konstruując nieprzemienną algebrę AI z grupy kwantowej $SU_q(2)$ [31]. Konstrukcja ta została opublikowana w pracy [P8].

Zajmowałem się ponadto problemem konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych dla niezależnych od tła teorii pola, w których zmienną konfiguracyjną jest koneksja na wiązce głównej o *niezwartej* grupie strukturalnej. Podstawową motywacją do pracy nad tym zagadnieniem była chęć skonstruowania przestrzeni stanów kwantowych dla teorii grawitacji opisanej zespolonymi zmiennymi Ashtekara [32, 33] — jedną z tych zmiennych jest koneksja o grupie strukturalnej $SL(2,\mathbb{C})$. Jest to problem o tyle istotny, że nieumiejętność skonstruowania takiej przestrzeni spowodowała, że pętlowa grawitacja kwantowa oparta została na rzeczywistych zmiennych Ashtekara-Barbero [26] o grupie strukturalnej $SU(2)$, co oznacza złamanie lorentzowskiej symetrii teorii grawitacji do symetrii przestrzennych obrotów.

W ramach pracy nad tym zagadnieniem zdefiniowałem dyfeomorficznie niezmienniczy dodatnio określony iloczyn skalarny na zbiorze pewnych funkcji określonych na przestrzeni koneksji o grupie strukturalnej w postaci zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych (zbiór $\mathbb{R}$ wraz z operacją dodawania tworzy najprostszą niezwartą grupę Liego). Pokazałem ponadto, że w przypadku przestrzeni Hilberta zadanej przez ten iloczyn skalarny oraz przestrzeni skonstruowanych w analogiczny sposób jak np. przestrzeń Hilberta opisana w pracy [34] istnieje przeszkoda uniemożliwiająca w praktyce konstrukcję reprezentacji algebr strumieni i holonomii na tych przestrzeniach. Wyniki te opublikowałem w pracy [P4].

Dalsze prace w tym kierunku kontynuowałem w oparciu o wskazówkę udzieloną mi przez J. Kijowskiego, aby do konstrukcji przestrzeni stanów kwantowych użyć technik projektywnych [5]. Chcąc sprawdzić, czy te techniki mogą być zastosowane do niezależnych od tła teorii koneksji o niezwartej grupie strukturalnej wprowadziłem prosty model takiej teorii w postaci omówionej wcześniej zdegenerowanej grawitacji Plebańskiego. Za pomocą technik projektywnych udało mi się skonstruować przestrzeń stanów kwantowych dla ZGP (mam tu na myśli konstrukcję istotnie odmienną od tej przedstawionej w pracy [H4]). Znalazłem także szeroką klasę fizycznych stanów kwantowych (czyli stanów spełniających wszystkie więzy) dla tego modelu. Rezultaty te złożyły się na pracę [P7].

Na zakończenie niniejszego omówienia dodam, że praca [P1] podsumowuje wyniki mojej pracy magisterskiej, zaś prace [P2, P3, P4, P8] oparte są na mojej rozprawie doktorskiej.

Literatura

[1] Oriti D (editor) 2009 *Approaches to Quantum Gravity: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter.* Cambridge University Press, New York.

[2] Carlip S, 2001 Quantum Gravity: a Progress Report. *Rept. Prog. Phys.* **64** 885. `arXiv:gr-qc/0108040`.

[3] Maluf J W, 2013 The teleparallel equivalent of general relativity. *Ann. Phys.* **525** 339–357. `arXiv:1303.3897`.

[4] Ashtekar A, Lewandowski L, 2004 Background Independent Quantum Gravity: A Status Report. *Class. Quant. Grav.* **21** R53. `arXiv:gr-qc/0404018`.

[5] Kijowski J, 1977 Symplectic geometry and second quantization. *Rep. Math. Phys.* **11** 97–109.

[6] Nester J M, 1989 Positive energy via the teleparallel Hamiltonian. *Int. J. Mod. Phys. A* **4** 1755–1772.

[7] Mielke E W, 1992 Ashtekar's Complex Variables in General Relativity and Its Teleparallelism Equivalent. *Ann. Phys.* **219** 78–108.

[8] Maluf J W, 1994 Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *J. Math. Phys.* **35** 335–343.

[9] Blagojević M, Nikolić I A, 2000 Hamiltonian structure of the teleparallel formulation of GR. *Phys. Rev. D* **62** 024021. `arXiv:hep-th/0002022`.

[10] Maluf J W, da Rocha-Neto J F, 2001 Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. *Phys. Rev. D* **64** 084014. `arXiv:gr-qc/0002059`.

[11] Arnowitt R, Deser S, Misner C W, 1962 The Dynamics of General Relativity. In Witten L (editor) *Gravitation: an introduction to current research*, chap. 7, 227–265. Wiley. `arXiv:gr-qc/0405109`.

[12] Itin Y, 2002 Conserved currents for general teleparallel models. *Int. J. Mod. Phys.* **17** 2765. `arXiv:gr-qc/0103017`.

[13] Wallner R P, 1990 New variables in gravity theories. *Phys. Rev. D* **42** 441–448.

[14] Kopczyński W, 1982 Problems with metric-teleparallel theories of gravitation. *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 493–506.

[15] Thirring W, 1986 *Classical field theory.* Springer, New York, Wien.

[16] Nester J M, 1988 Is there really a problem with the teleparallel theory. *Class. Quant. Grav.* **5** 1003–1010.

[17] Wallner R P, 1992 Ashtekar variables reexamined. *Phys. Rev. D* **46** 4263–4285.

[18] Notte-Cuello E A, Rodrigues Jr W A, 2007 A Maxwell Like Formulation of Gravitational Theory in Minkowski Spacetime. *Int. J. Mod. Phys. D* **16** 1027–1042. `arXiv:math-ph/0608017`.

[19] Wallner R P, 1985 On the Structure of Gravitational U_4-Field Equations. *Ger. Rel. Grav.* **17** 1081–1107.

[20] Ashtekar A, Lewandowski J, 1994 Representation theory of analytic holonomy $C^{\star}$-algebras. In Baez J (editor) *Knots and quantum gravity.* Oxford University Press, Oxford. arXiv:gr-qc/9311010.

[21] Ashtekar A, Lewandowski J, Marolf D, Mourão J, Thiemann T, 1995 Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom. *J. Math. Phys.* **36** 6456–6493. arXiv:gr-qc/9504018.

[22] Ashtekar A, Corichi A, Zapata J A, 1998 Quantum Theory of Geometry III: Non-commutativity of Riemannian Structures. *Class. Quant. Grav.* **15** 2955–2972. arXiv:gr-qc/9806041.

[23] Plebański J F, 1977 On the separation of Einsteinian substructures. *J. Math. Phys.* **18** 2511.

[24] Jacobson T, 1996 1 + 1 Sector of 3 + 1 Gravity. *Class. Quan. Grav.* **13** L111–L116. arXiv:gr-qc/9604003.

[25] Lanéry S. A Larger State Space for Quantum Gravity. *Second EFI winter conference on Quantum Gravity*, February 2014, Tux, Austria.

[26] Barbero J F, 1995 Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-times. *Phys. Rev. D* **51** 5507–5510. arXiv:gr-qc/9410014.

[27] Sahlmann H, 2011 Some results concerning the representation theory of the algebra underlying loop quantum gravity. *J. Math. Phys.* **52** 012502. arXiv:gr-qc/0207111.

[28] Sahlmann H, 2011 When Do Measures on the Space of Connections Support the Triad Operators of Loop Quantum Gravity? *J. Math. Phys.* **52** 012503. arXiv:gr-qc/0207112.

[29] Ashtekar A, Isham C J, 1992 Representation of the holonomy algebras of gravity and non-Abelian gauge theories. *Class. Quant. Grav.* **9** 1433–1467.

[30] Woronowicz S L, 1998 Compact quantum groups. In *Les Houches, Session LXIV, 1995, Quantum Symmetries*, 845–884. Elsevier.

[31] Woronowicz S L, 1987 Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus. *RIMS* **23** 117–181.

[32] Ashtekar A, 1986 New Variables for Classical and Quantum Gravity. *Phys. Rev. Lett.* **57** 2244.

[33] Ashtekar A, 1987 A New Hamiltonian Formulation of General Relativity. *Phys. Rev. D* **36** 1587.

[34] Freidel L, Livine E R, 2003 Spin Networks for Non-Compact Groups. *J. Math. Phys.* **44** 1322–1356. arXiv:hep-th/0205268.

Andrzej Okołów
25.02.2014