

Autoreferat

1. Imię i Nazwisko:
Maciej Nieszporski
2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej
 - (a) magister fizyki, 1994, Instytut Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Warszawskiego, praca „Ewolucja kosmicznych pustek”, promotor prof. dr hab. Marek Demiański;
 - (b) doktor nauk fizycznych, 2003, Instytut Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Warszawskiego, rozprawa „Kongruencje Weingartena jako źródło układów całkowalnych”, promotor prof. dr hab. Antoni Sym.
3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.
 - a) 1994-1999 studia doktoranckie, Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
 - b) 1999-2003 asystent, Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Matematyczno-Fizyczny,
 - c) 2003 do teraz, adiunkt, Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
 - d) 2005-2007 stypendium Marie Curie, University of Leeds, School of Mathematics
4. Wskazanie osiągnięcia* wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.): **Cykl dziewięciu prac.**
 - a) tytuł osiągnięcia naukowego
Operatory różnicowe na sieciach regularnych dopuszczające transformacje typu Darboux.

b) Na osiągnięcie naukowe składa się cykl następujących 9 publikacji

- [H1] M. Nieszporski, P.M. Santini, and A. Doliwa, 2004, *Darboux transformations for 5-point and 7-point self-adjoint schemes and an integrable discretization of the 2D Schrodinger operator*, Physics Letters A, 323(3–4), 241–250.
- [H2] P.M. Santini, M. Nieszporski, and A. Doliwa, 2004, *Integrable generalization of the Toda law to the square lattice*, Physical Review E, 70(5), 056615:1–056615:6.
- [H3] M. Nieszporski and P.M. Santini, 2005, *The self-adjoint 5-point and 7-point difference operators, the associated Dirichlet problems, Darboux transformations and Lelievre formulae*, Glasgow Mathematical Journal, 47(A), 133–147.
- [H4] P. Małkiewicz and M. Nieszporski, 2005, *Darboux transformations for q -discretizations of 2d second order differential equations*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 12(Supplement: 2), 231–239.
- [H5] A. Doliwa, P. Grinevich, M. Nieszporski, and P.M. Santini, 2007, *Integrable lattices and their sublattices: From the discrete Moutard (discrete Cauchy-Riemann) 4-point equation to the self-adjoint 5-point scheme*, Journal of Mathematical Physics, 48(1), 013513:1–013513:28.
- [H6] M. Nieszporski, 2007, *Darboux transformations for a 6-point scheme*, Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, 40(15), 4193–4205.
- [H7] A. Doliwa, M. Nieszporski, and P. M. Santini, 2007, *Integrable lattices and their sublattices. II. From the B-quadrilateral lattice to the self-adjoint schemes on the triangular and the honeycomb lattices*, Journal of Mathematical Physics, 48(11), 113506:1–113506:17.
- [H8] P.M. Santini, M. Nieszporski, and A. Doliwa, 2008, *Integrable dynamics of Toda type on square and triangular lattices*, Physical Review E, 77(5), 056601:1–056601:12.
- [H9] A. Doliwa and M. Nieszporski, 2009, *Darboux transformations for linear operators on two-dimensional regular lattices*, Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, 42(45), 454001:1–454001:27.

- c) omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

1 Wstęp

Pojęcie *ciągłości* głęboko wrosło w podstawy współczesnej fizyki. Fundamentalne teorie takie jak mechanika płynów, elektrodynamika klasyczna, mechanika kwantowa czy ogólna teoria względności definiowane są na rozmaitych różniczkowych i w konsekwencji prawa tych teorii formułowane są w postaci *równań różniczkowych*. Niewątpliwy sukces rachunku różniczkowego w teoriach fizycznych spowodował, że *równania różnicowe* definiowane na zbiorach *dyskretnych* przez stulecia traktowane były jako ubodzy krewni wersji ciągłych. Sytuacja ta zmieniła się wraz z rozwojem metod numerycznych czy chociażby dzięki próbom kwantowania grawitacji. Pojawiła się potrzeba rozwoju aparatu matematycznego *równań różnicowych* i niniejsza rozprawa, która rozwija teorię *dyskretnych układów całkownych*, wpisuje się w nurt, który na to zapotrzebowanie odpowiada.

W szczególności w geometrii różnicowej [1], dziedzinie która stara się budować świat dyskretny od podstaw nie tracąc co prawda korespondencji z geometrią różniczkową (dlatego współcześnie przewrotnie nazywa się tę dziedzinę dyskretną geometrią różniczkową [2]), ale też ślepo jej nie kopiując, dojrzeć można następującą myśl przewodnią. Mianowicie, ograniczmy się najpierw do pewnej klasy powierzchni mających pewną dodatkową cechę i postarajmy się tę klasę powierzchni zdyskretyzować tak, by otrzymane dyskretne sieci posiadały tę samą cechę, a następnie rezultaty otrzymane w ten sposób postarajmy się rozciągnąć na bardziej ogólne obiekty, które danej cechy nie posiadają. W przypadku geometrii różnicowej tą dodatkową cechą jest *całkowalność* - najpierw wybieramy klasę powierzchni opisywaną przez *całkowne* nieliniowe równania różniczkowe i dyskretyzujemy ją w taki sposób by klasa dyskretnych sieci opisywana była przez *całkowne* nieliniowe równania różnicowe.

Przez *całkowalność* równań nieliniowych, zarówno różniczkowych jak i różnicowych, rozumiemy tu szereg powiązanych ze sobą własności począwszy od istnienia transformacji Bäcklunda (pozwalającej ze znanych rozwiązań konstruować nowe rozwiązania) i nieliniowej zasady superpozycji (pozwalającej te nowe rozwiązania superponować), poprzez istnienie układu równań liniowych (para Laxa), który to układ, co bardzo istotne z punktu widzenia

niniejszego referatu, jest współzmienniczy ze względu na tak zwane *transformacje typu (transformacji) Darboux* i dla którego równania nieliniowe są warunkami zgodności, na metodzie odwrotnego rozpraszania i metodach algebro-geometrycznych kończąc [3, 4, 5]. *Transformacje typu Darboux* rozumieć tu będziemy w najszerszym z używanych sensów, tzn. binarną transformację Darboux, często nazywaną transformacją fundamentalną, jak również jej redukcje będziemy tu po prostu nazywać transformacjami typu Darboux. Dla nas będzie istotne, że wiele technik konstruowania rozwiązań dla równań nieliniowych bazuje na tych transformacjach, pominiemy natomiast rolę tych transformacji w teorii równań liniowych.

Podkreślmy, w przypadku ciągłym fundamentalnym obiektem jest klasa powierzchni, a nie równanie różniczkowe je opisujące. Skupiając się na powierzchniach unifikujemy opisujące je równania różniczkowe. Tę konstatację w teorii układów całkownych zawdzięczamy Antoniemu Symowi [6]. Klasyfikacyjnym przykładem są powierzchnie pseudosferyczne. Standardowym sposobem ich opisu jest podanie kąta $\phi(u, v)$ między liniami asymptotycznymi, kąt ten spełnia równanie sinus-Gordona

$$\partial_u \partial_v \phi(u, v) = \sin \phi(u, v).$$

Innym sposobem opisu jest podanie wektora normalnego $\vec{n}(u, v)$, który spełnia następujący nieliniowy układ (pojawiający się również w teorii nieliniowych σ -modeli czy opisujący szczególne odwzorowania harmoniczne)

$$\partial_u \partial_v \vec{n}(u, v) = f(u, v) \vec{n}(u, v), \quad \vec{n}(u, v) \cdot \vec{n}(u, v) = 1$$

i odtworzenie wektora wodzącego $\vec{r}(u, v)$ powierzchni pseudosferycznych używając tzw. formuł Lelievre'a

$$\partial_u \vec{r}(u, v) = \partial_u \vec{n}(u, v) \times \vec{n}(u, v), \quad \partial_v \vec{r}(u, v) = \vec{n}(u, v) \times \partial_v \vec{n}(u, v).$$

Do formuł Lelievre'a wrócimy za chwilę.

Dochodzimy tu palącego problemu geometrii różnicowej. Otóż w ciągłym przypadku mamy możliwość zmiany parametryzacji powierzchni $\tilde{u} = f(u, v)$, $\tilde{v} = g(u, v)$. W szczególności *równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu w dwóch zmiennych niezależnych*, które pojawiają się w geometrii solitonów na przykład jako

- jedno z równań pary Laxa

- lub część układu nieliniowego (patrz przytoczony wyżej opis powierzchni pseudosferyczny przy pomocy ich wektora normalnego)
- lub równania ruchomego reperu,

zazwyczaj są sprowadzane, przez odpowiedni dobór parametryzacji, do postaci kanonicznej

$$[\partial_x \partial_x + \epsilon \partial_y \partial_y + \alpha(x, y) \partial_x + \beta(x, y) \partial_y + \gamma(x, y)] \psi(x, y) = 0,$$

gdzie $\epsilon = -1, 0, 1$. W przypadku równań hiperbolicznych (tzn. gdy $\epsilon = -1$) często za postać kanoniczną przyjmuje się

$$[\partial_u \partial_v + a(u, v) \partial_u + b(u, v) \partial_v + c(u, v)] \psi(u, v) = 0. \quad (1)$$

W geometrii różnicowej zostały dotąd zdyskretyzowane jedynie niektóre szczególne parametryzacje (siatki współrzędnych), na przykład współrzędne asymptotyczne. Ograniczenie to przejawia się na poziomie równań w dyskretyzowaniu równania (1) czyli innymi słowy w dyskretyzowaniu operatora $\partial_u \partial_v + a(u, v) \partial_u + b(u, v) \partial_v + c(u, v)$. Jest to słabość geometrii różnicowej, dla której staramy się tu znaleźć remedium.

W omawianym cyklu prac staramy się skompensować brak możliwości wystarczająco ogólnej zamiany zmiennych niezależnych w przypadku dyskretnym przez rozważenie ogólniejszych operatorów dyskretnych, niż te rozważane dotąd w geometrii różnicowej. Przedstawiamy tu dyskretyzacje liniowych operatorów różniczkowych drugiego rzędu w dwóch zmiennych niezależnych. Klasy dyskutowanych tu dyskretnych operatorów dopuszczają transformację Darboux w pełnej analogii do ich ciągłych odpowiedników i ich uboższych dyskretnych wersji. W szczególności pokazujemy dyskretyzacje pełnego liniowego operatora drugiego rzędu w dwóch zmiennych niezależnych (a nie jak dotąd dyskretyzacje jego kanonicznej wersji (1)) jak również dyskretyzacje pełnego formalnie samosprzężonego liniowego operatora drugiego rzędu w dwóch zmiennych niezależnych. Pokazujemy przykładowe zastosowania otrzymanych operatorów w teorii układów całkownych oraz w geometrii różnicowej.

Na potrzebę rozważania w teorii dyskretnych układów całkownych sieci regularnych innych niż \mathbb{Z}^n zwracał uwagę już w 1997 roku S.P. Novikov [7, 8]. Rozważania na temat dyskretyzacji równań samosprzężonych eliptycznych drugiego rzędu w dwóch zmiennych niezależnych, tak by dyskretne operatory dawały się faktoryzować (i w efekcie dopuszczały transformacje Laplace'a),

doprowadziły do samosprężonego operatora 7-punktowego zadanego na sieci trójkątnej. Transformacje Laplace’a odgrywają istotną rolę w klasyfikacji różniczkowych i różnicowych równań całkownych i dlatego prace [7, 8] należy uznać za początek zastosowań sieci regularnych innych niż \mathbb{Z}^n w teorii układów całkownych. W pracach składających się na niniejszą rozprawę poszliśmy krok dalej, pokazaliśmy między innymi, że operator 7-punktowy dopuszcza również transformacje typu Darboux (ściślej mówiąc ich podklasę nazywaną transformacjami typu Moutarda) i jako taki może być traktowany jako część pary Laxa dla układów całkownych. Warto może wspomnieć, że w przeciwieństwie do rozważanych tu operatorów dwuwymiarowych w przypadku operatorów jednowymiarowych terminy transformacja Darboux i transformacja Laplace’a mogą być używane zamiennie.

Spójrzmy wreszcie na zagadnienie dyskretyzacji równań różniczkowych w szerszej perspektywie. Całkowalnymi równaniami są równanie Ernsta, równanie Kadomtseva–Petviashvili, czy nieliniowe równanie Schrödingera, czyli szczególne przypadki fundamentalnych nieliniowych równań fizyki odpowiednio równań Einsteina, równań Naviera-Stokesa, czy równania Grossa-Pitajewskiego. Można pokusić się o próbę dyskretyzacji pełnych równań (na przykład równań Einsteina lub równań Naviera-Stokesa), wychodząc od rezultatów otrzymanych dla całkownych dyskretyzacji szczególnych całkownych przypadków tych równań. Przede wszystkim musimy jednak nauczyć się konstruować dyskretne równania całkowne tak, by odtwarzały one w granicy ciągłej nie tylko samo równanie, opisujące daną sytuację geometryczną ale również swobodę wynikającą z możliwości zmiany zmiennych niezależnych. Pierwszy przykład takiej konstrukcji w literaturze omawiamy w rozdziale 5 niniejszej rozprawy, gdzie przywołujemy wyniki pracy [H3] dotyczące dyskretyzacji jednych z ważniejszych formuł geometrii equi-afinicznej tzw. formuł Lelievre’a [9].

2 Transformacje typu Darboux

Powszechnie znaną pod nazwą transformacji Darboux transformację dla operatora $\frac{d^2}{dx^2} - u(x) - \lambda$, jej autor otrzymał [10, 11] separując zmienne w tak zwanej transformacji Moutarda [12, 13]. Przypomnijmy transformację Moutarda, jako że w dużej części niniejszej pracy będziemy mieli do czynienia z tym rodzajem transformacji typu Darboux. Niech ψ oznacza jądro operatora

Moutarda

$$\mathcal{M} := \partial_x \partial_y - F(x, y) \quad (2)$$

a θ szczególny niezerowy element tego jądra $\mathcal{M}\theta = 0$ (szczególne rozwiązanie równania Moutarda), wtedy zbiór funkcji $\tilde{\psi}$ będących rozwiązaniami następującego układu liniowych równań różniczkowych

$$\partial_x(\theta\tilde{\psi}) = \theta\partial_x\psi - \psi\partial_x\theta, \quad \partial_y(\theta\tilde{\psi}) = -\theta\partial_y\psi + \psi\partial_y\theta,$$

należy do jądra operatora Moutarda $\tilde{\mathcal{M}} := \partial_x \partial_y - \tilde{F}(x, y)$ gdzie $\tilde{F} = \theta\partial_x \partial_y \frac{1}{\theta}$. Dalsze badania nad transformacjami tego typu doprowadziły do konstrukcji transformacji, nazywanej nie bez powodu *transformacją fundamentalną*, dla operatorów $\partial_u \partial_v + a(u, v)\partial_u + b(u, v)\partial_v + c(u, v)$ (lub układów takich operatorów pochodzących od zgodnego układu równań postaci(1)) [14].

Przedstawmy istotę tej transformacji w sposób, który można zastosować zarówno w przypadku ciągłym jak i dyskretnym [H6,H9].

Po pierwsze dwa operatory drugiego rzędu \mathcal{L} i L , czy to różniczkowe czy to różnicowe, nazwiemy równoważnymi (ze względu na cechowanie) wtedy i tylko wtedy gdy istnieją dwa operatory mnożenia przez funkcję (w rozważanych tu przypadkach funkcje te są funkcjami $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ w przypadku ciągłym, w przypadku dyskretnym \mathbb{R}^2 należy zastąpić odpowiednią siecią regularną) θ, ϕ takie, że $\mathcal{L} = \phi L\theta$. Rzecz w tym, że jeśli dany operator L pomnożymy z prawej strony przez element jądra tego operatora $L\theta = 0$ a z lewej przez element jądra operatora formalnie sprzężonego L^\dagger do operatora L , $L^\dagger\phi = 0$ to wtedy równanie $\phi L\theta\Psi = 0$ można zapisać w przypadku ciągłym w postaci $\partial_x P + \partial_y Q = 0$ a w przypadku dyskretnym $(T_m - 1)\mathcal{P} + (T_n - 1)\mathcal{Q} = 0$, co gwarantuje istnienie funkcji $\tilde{\Psi}$ w przypadku ciągłym danej przez $P = \partial_y \tilde{\Psi}$, $Q = -\partial_x \tilde{\Psi}$, a w przypadku dyskretnym $\mathcal{Q} = (T_m - 1)\tilde{\Psi}$, $\mathcal{P} = -(T_n - 1)\tilde{\Psi}$. Przy zadanych θ, ϕ (tzw. funkcyjne parametry transformacji) zbiór funkcji $\tilde{\Psi}$ otrzymanych ze zbioru funkcji Ψ należy do jądra pewnego operatora liniowego drugiego rzędu, tzw. transformaty Darboux operatora L .

Kluczowe rezultaty niniejszej rozprawy zawarte są w pracach [H1,H6] oraz w przeglądowej pracy [H9] gdzie wyniki te zestawiamy ze znanymi rezultatami na temat 2-wymiarowych operatorów różnicowych dopuszczających transformacje typu Darboux. Tu ograniczymy się jedynie do podania najważniejszych faktów.

2.1 Schemat 6-punktowy

W pracy [H6] pokazujemy, że różnicowy operator zadany na sześciu punktach sieci trójkątnej

$$A_{m,n}T_mT_m + B_{m,n}T_nT_n + 2C_{m,n}T_mT_n + G_{m,n}T_m + H_{m,n}T_n + F_{m,n}, \quad (3)$$

gdzie T_m i T_n oznaczają elementarne operatory przesunięcia na sieci trójkątnej, w naturalnej granicy ciągłej przechodzący na najogólniejszy operator liniowy dwóch zmiennych niezależnych

$$a(x, y)\partial_x\partial_x + b(x, y)\partial_y\partial_y + 2c(x, y)\partial_x\partial_y + g(x, y)\partial_x + h(x, y)\partial_y + f(x, y), \quad (4)$$

dopuszcza transformację typu Darboux mającą wszelkie cechy transformacji fundamentalnej patrz wniosek 2 pracy [H6] (jak również Twierdzenie 3.1 z pracy [H9]).

W teorii układów całkownych istotne jest pytanie czy daną klasę operatorów można zawęzić do pewnej podklasy operatorów, która jest zachowywana przez pewną (zredukowaną) transformację typu Darboux. Tym zagadnieniem również zajmujemy się w pracy [H6].

Więzy $A_{m,n} \equiv 0$, $B_{m,n} \equiv 0$ i $F_{m,n} \equiv 0$ są zachowywane przez wspomnianą transformację (Twierdzenie 3.1 z pracy [H9]). Położenie $A_{m,n} \equiv 0$ i $B_{m,n} \equiv 0$, odtwarza rezultaty dla dwuwymiarowego przypadku z pracy [15]. Położenie $A_{m,n} \equiv 0$, $B_{m,n} \equiv 0$ i $F_{m,n} \equiv 0$, odtwarza rezultaty dla dwuwymiarowego przypadku z prac [16, 17]. Powyższe więzy nie zmieniają charakteru transformacji, transformacja wciąż pozostaje transformacją fundamentalną, jej parametrami funkcyjnymi pozostają funkcje θ i ϕ . Taką procedurę nazywamy w pracach [H6] i [H9] specyfikacją operatora. Specyfikacja $A_{m,n} \equiv 0$ i $B_{m,n} \equiv 0$ prowadzi do dyskretyzacji operatora hiperbolicznego występującego w równaniu (1). W przypadku ciągłym efekt analogiczny do specyfikacji $a(x, y) \equiv 0$ i $b(x, y) \equiv 0$ można uzyskać przez zmianę parametryzacji, tzn. zamianę zmiennych niezależnych. W przypadku dyskretnym wiąże się z drastyczną zmianą z operatora zadanego na sześciu punktach na operator zadany na czterech punktach.

Klasę operatorów możemy również zawęzić wybierając specjalne cechowanie. Ponieważ ta procedura ma mniejsze znaczenie w teorii układów całkownych (w teorii transformacji Darboux operujemy na klasach równoważności operatorów równoważnych ze względu na cechowanie) pozwolimy ją sobie tu ominąć, zainteresowanego czytelnika odsyłamy do prac [H6] i [H9]. Wreszcie do dyspozycji mamy redukcje kiedy rozwiązania ϕ równania formalnie

sprzężonego do danego można wyrazić przez rozwiązania θ samego równania przy pomocy pewnego podstawienia różnicowego. Dwa takie przypadki dyskretnego równania Goursata i dyskretnego równania Moutarda, w obecności więzów $A_{m,n} \equiv 0$ i $B_{m,n} \equiv 0$ opisujemy rozdziale 3.3 pracy [H9] i choć oba te przypadki znane były wcześniej (patrz [H14] i cytowania tam zawarte) to dokładne prześledzenie redukcji transformacji fundamentalnej do transformacji typu Darboux dla dyskretnego równania Goursata i dyskretnego równania Moutarda jest oryginalnym rezultatem pracy [H9].

2.2 Samosprzężony schemat 7-punktowy

W pracy [H1] pokazujemy, że formalnie samosprzężony operator różnicowy z pracy [8]

$$a_{m,n}T_m + a_{m-1,n}T_m^{-1} + b_{m,n}T_n + b_{m,n-1}T_n^{-1} + c_{m+1,n}T_mT_n^{-1} + c_{m,n+1}T_m^{-1}T_n - f_{m,n}, \quad (5)$$

będący dyskretyzacją formalnie samosprzężonego dwuwymiarowego operatora różniczkowego

$$\partial_x[A(x,y)\partial_x + C(x,y)\partial_y] + \partial_y[C(x,y)\partial_x + B(x,y)\partial_y] - F(x,y), \quad (6)$$

dopuszcza, w pełnej analogii do swego ciągłego odpowiednika, szczególny rodzaj transformacji typu Darboux: transformację typu Moutarda. Co więcej zarówno w przypadku ciągłym jak i dyskretnym mamy możliwość specyfikacji obu operatorów gdyż zarówno wiąz $c_{m,n} \equiv 0$ jak i jego ciągły odpowiednik $C(x,y) \equiv 0$ są zachowywane przez wspomniane transformacje. W przypadku dyskretnym specyfikacja ta prowadzi do operatora

$$a_{m,n}T_m + a_{m-1,n}T_m^{-1} + b_{m,n}T_n + b_{m,n-1}T_n^{-1} - f_{m,n}, \quad (7)$$

który jest dyskretnym odpowiednikiem operatora

$$\partial_x[A(x,y)\partial_x] + \partial_y[B(x,y)\partial_y] - F(x,y). \quad (8)$$

I tym razem w przypadku ciągłym specyfikację $C(x,y) \equiv 0$ można uzyskać przez zmianę zmiennych niezależnych.

Wyniki te warto zestawić ze znanymi rezultatami na temat dyskretyzacji formalnie samosprzężonego dwuwymiarowego operatora różniczkowego. Otóż operator Moutarda (2) posiada dwie dyskretyzacje: dyskretny operator Moutarda [18, 19]

$$T_mT_n + 1 - f_{m,n}(T_m + T_n)$$

i sprzężony dyskretny operator Moutarda [H14]

$$T_m T_n + 1 - f_{m+1,n} T_m - f_{m,n+1} T_n.$$

Łatwo zrozumieć naszą pierwotną motywację. Zależało nam na znalezieniu pełnej dyskretyzacji równania (6) (ale takiej która dopuszcza transformacje Darboux) a nie tylko jego szczególnej wersji (2). Główną naszą motywacją było zajęcie się dyskretnymi operatorami o eliptycznym charakterze to znaczy pozwalającymi na siatce dyskretnej rozwiązywać zagadnienie brzegowe Dirichleta (patrz praca [H3] niniejszej rozprawy).

Pozostaje pytanie czy istnieją związki między dyskretnymi operatorem Moutarda a operatorami (5) lub (7)? Twierdzącą odpowiedź poznamy w następnym rozdziale rozprawy.

2.3 Operatory q-różnicowe

Praca [H4] pokazuje, że rezultaty otrzymane w pracach [H1] i [H6] przenoszą się na przypadek operatorów q-różnicowych. Warto w tym miejscu wspomnieć o pracy magisterskiej napisanej pod moją opieką [20] gdzie transformacja fundamentalna dla operatorów q-różnicowych została przedstawiona w sposób bliższy oryginalnej pracy Jonasa [14].

3 Metoda przejścia na podsiatkę

Szczególna postać dyskretnego równania Moutarda

$$[T_m T_n - 1 - \frac{p_m - q_n}{p_m + q_n} (T_m - T_n)] \psi(m, n) = 0$$

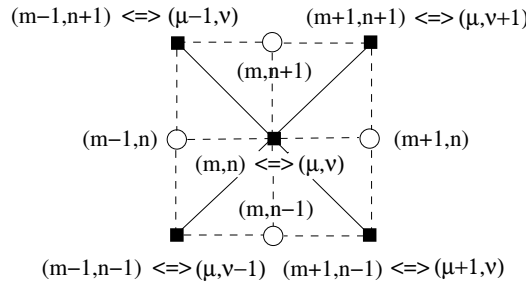
pełni kluczową rolę w teorii dyskretnych funkcji holomorficznym patrz [21] i cytowania tam zawarte (patrz również wstęp do pracy [H5]), równanie to jest dyskretnym odpowiednikiem równań Cauchy'ego-Riemanna. Według mojej wiedzy właśnie w dziedzinie dyskretnych funkcji holomorficznym metoda przejścia na podsiatkę była użyta po raz pierwszy prowadząc do dyskretnych wersji równania Laplace'a. Ogólne sformułowanie metody przejścia na podsiatkę jest przedstawione na drugiej stronie pracy [H5]. Tu przejdźmy od razu do ilustrujących ją przykładów, prowadzących do zaanonowanych w poprzednim rozdziale związków między dyskretyzacjami operatora formalnie samosprzężonego.

3.1 Dyskretny operator Moutarda na sieci \mathbb{Z}^2 a operator 5-punktowy

Dwa twierdzenia z pracy [H5] (Proposition 1 i Proposition 2) dają zaskakującą charakterystykę dyskretnego równania Moutarda. Otóż mając do dyspozycji równanie liniowe $\alpha_{m,n}\psi_{m+1,n+1} + \beta_{m,n}\psi_{m+1,n} + \gamma_{m,n}\psi_{m,n+1} + \delta_{m,n}\psi_{m,n} = 0$, wiążące wartości funkcji ψ w czterech punktach sieci kwadratowej \mathbb{Z}^2 i wypisując to równanie dla kwadratów mających wspólny wierzchołek (m, n)

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n}\psi_{m+1,n+1} + \beta_{m,n}\psi_{m+1,n} + \gamma_{m,n}\psi_{m,n+1} + \delta_{m,n}\psi_{m,n} &= 0, \\ \alpha_{m-1,n}\psi_{m,n+1} + \beta_{m-1,n}\psi_{m,n} + \gamma_{m,n}\psi_{m-1,n+1} + \delta_{m-1,n}\psi_{m-1,n} &= 0, \\ \alpha_{m,n-1}\psi_{m+1,n} + \beta_{m,n-1}\psi_{m+1,n-1} + \gamma_{m,n-1}\psi_{m,n} + \delta_{m,n-1}\psi_{m,n-1} &= 0, \\ \alpha_{m-1,n-1}\psi_{m,n} + \beta_{m-1,n-1}\psi_{m,n-1} + \gamma_{m-1,n-1}\psi_{m-1,n} + \delta_{m-1,n-1}\psi_{m-1,n-1} &= 0, \end{aligned}$$

można wyeliminować z tych czterech równości zmienne $\psi_{m-1,n}$, $\psi_{m+1,n}$, $\psi_{m,n-1}$ i $\psi_{m,n+1}$ wtedy i tylko wtedy gdy wyjściowe równanie jest równoważne ze względu na cechowanie pewnemu równaniu Moutarda. Pozostałe pięć punktów spełnia samosprężone równanie $L\psi = 0$ gdzie L jest operatorem (7) z odpowiednio zredefiniowanymi operatorami translacji na sieci „czarnych” punktów, patrz Rysunek 1. Otrzymujemy w ten sposób związek między samo-



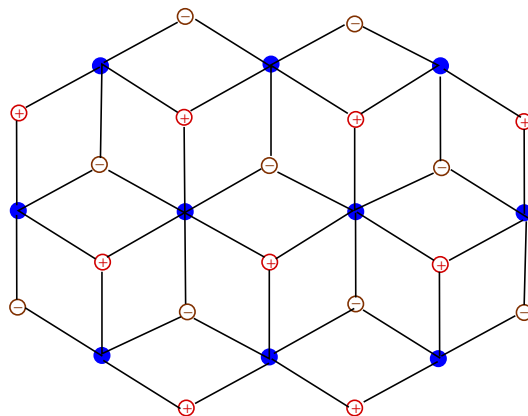
Rysunek 1: Od dyskretnego równania Moutarda do schematu 5-punktowego.

sprężonym operatorem 5-punktowym a dyskretnym operatorem Moutarda. Ponadto pokazujemy, że całkowalne cechy przenoszą się z siatki na podsiatkę:

- z transformacji Darboux i ich superpozycji dla dyskretnego równania Moutarda wyprowadzamy transformacje Darboux i ich superpozycje dla samosprężonego równania 5-punktowego,
- z rozwiązań algebro-geometrycznych dla dyskretnego równania Moutarda konstruujemy rozwiązania algebro-geometryczne dla samosprężonego równania 5-punktowego.

3.2 Operator Moutarda na kwaziregularnym parkietażu rombicznym a operator 7-punktowy

W analogiczny sposób do sposobu przywołanego w poprzednim podrozdziale można otrzymać związek między samosprzężonym operatorem 7-punktowym a dyskretnym operatorem Moutarda (patrz praca [H7]). Siatkę \mathbb{Z}^2 należy zastąpić kwaziregularnym parkietażem rombicznym (Rysunek 2). Na każdym rombie takiego parkietażu zadajemy równanie Moutarda tzn. suma (lub różnica) wartości funkcji ψ w przeciwległych wierzchołkach danego rombu ma być proporcjonalna do sumy (lub różnicy) wartości tej funkcji w pozostałych dwóch wierzchołkach tego rombu. Biorąc sześć kopii równania na sześciu



Rysunek 2: Kwaziregularny parkietaż rombiczny

rombach mających wspólny wierzchołek o niebieskim (szarym przy wydruku czarno-białym) kolorze na Rysunku 2 i eliminując wartości funkcji w punktach oznaczonych plusem i minusem otrzymuje się w ten sposób 7-punktowy operator samosprzężony (5). Okazuje się, że metoda przejścia na podsiatkę pozwala wyprowadzić transformację typu Darboux dla 7-punktowego operatora samosprzężonego (5) z transformacji typu Darboux dla dyskretnego równania Moutarda co pokazaliśmy w rozdziale IV A pracy [H7].

3.3 Operator samosprzężony na sieci heksagonalnej

Biorąc trzy kopie równania Moutarda na trzech rombikach mających wspólny wierzchołek oznaczony na Rysunku 2 plusem (lub minusem) możemy wyeliminować z nich wartości funkcji w punktach oznaczonych na niebiesko (lub

szaro). Otrzymujemy w ten sposób parę równań (a co za tym idzie parę operatorów) zadanych na sieci heksagonalnej (na którą składają się wierzchołki oznaczone plusem i wierzchołki oznaczone minusem na Rysunku 2). Jedno równanie z tej pary wiąże wartości funkcji w punkcie oznaczonym plusem i wartości w trzech najbliższych wierzchołkach oznaczonych minusem. W drugim równaniu odwrotnie, wartości funkcji w punkcie oznaczonym minusem są powiązane z wartościami funkcji w trzech najbliższych wierzchołkach oznaczonych plusem. Tak jak w poprzednim przypadku metoda przejścia na podsiatkę pozwala nam z transformacji typu Darboux dla dyskretnego równania Moutarda skonstruować transformację typu Darboux dla pary równań na sieci heksagonalnej (co pokazaliśmy w rozdziale IV B pracy [H7]).

3.4 Bardzo krótkie podsumowanie rozdziału 3

Rysunek 1 z przeglądowej pracy [H9] (jego pełnowymiarową wersję znaleźć można w preprincie pracy [H9], tzn. na Rysunku 1 z wersji [22]) stanowi zestawienie naszych rezultatów z pracami innych autorów na temat dyskretyzacji dwuwymiarowych liniowych operatorów różniczkowych drugiego rzędu.

4 Całkowalne uogólnienie łańcucha Tody na sieci kwadratowe i trójkątne

Mając do dyspozycji Darboux współzmiennicze liniowe operatory (5) i (7) naturalnym jest zapytać o nieliniowe równania z nimi związane, tzn. potraktować operatory te jako część pary Laxa (problem liniowy) pewnego układu nieliniowego. W pracach [H2] i [H8] pokazaliśmy, że w odpowiedzi dostajemy uogólnienia tak zwanych łańcuchów Tody [23] tzn. układów równań postaci

$$\frac{d^2 Q_m(t)}{dt^2} = \Delta_m e^{\Delta_m Q_{m-1}(t)},$$

na funkcję $Q_m(t)$ zmiennej ciągłej t i dyskretnej m (gdzie $\Delta_m = T_m - 1$). W przypadku operatora (7) otrzymujemy równania na sieci \mathbb{Z}^2 (patrz praca [H2] niniejszej rozprawy)

$$C_{m,n} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{C_{m,n}} \frac{dQ_{m,n}}{dt} \right) = \Delta_m \left(C_{m,n} C_{m-1,n} e^{\Delta_m Q_{m-1,n}} \right) + \Delta_n \left(C_{m,n} C_{m,n-1} e^{\Delta_n Q_{m,n-1}} \right),$$

$$\frac{C_{m+1,n+1}}{C_{m,n}} = e^{-\Delta_m \Delta_n Q_{m,n}},$$

natomiast w przypadku operatora (5) rozważania prowadzą do układu równań na sieci trójkątnej (patrz praca [H8] niniejszej rozprawy)

$$\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\xi}\Delta_1(\xi\xi_{-1}A_{-1}^2) + \frac{1}{\eta}\Delta_2(\eta\eta_{-2}B_{-2}^2) + \frac{1}{\zeta}\Delta_3(\zeta\zeta_{-3}C_{-3}^2) = 0,$$

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} + \frac{1}{2}\Delta_1(\xi F) - \frac{1}{2}\frac{BC_1}{A}(\eta + \zeta)_2 + \frac{1}{2}\frac{B_{-3}C_{-3}}{A}(\eta + \zeta)_{-3} = 0,$$

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} + \frac{1}{2}\Delta_2(\eta F) + \frac{1}{2}\frac{A_3C}{B}(\xi - \zeta)_3 - \frac{1}{2}\frac{AC_1}{B}(\xi - \zeta)_1 = 0,$$

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}\Delta_3(\zeta F) + \frac{1}{2}\frac{B_{-1}A_{-1}}{C}(\xi + \eta)_{-1} - \frac{1}{2}\frac{A_3B}{C}(\xi + \eta)_2 = 0,$$

$$AB_1(\xi - \eta)_1 = A_2B(\xi - \eta)_2,$$

$$AC(\xi + \zeta) = A_3C_1(\xi + \zeta)_2,$$

$$B_{-3}C_1(\eta - \zeta)_1 = BC_{-3}(\eta - \zeta).$$

gdzie dla oszczędności miejsca operatory przesunięcia na sieci trójkątnej oznaczyliśmy indeksami dolnymi tzn. $T_i f \equiv f_i$, $T_i^{-1} f \equiv f_{-i}$, (ponadto $\Delta_i = T_i - 1$) $i = 1, 2, 3$. Należy pamiętać, że operatory przesunięcia na sieci trójkątnej nie są niezależne, zachodzi $T_1 T_3 = T_2$. Transformacje typu Darboux dla operatorów rozważanych w poprzednich rozdziałach pozwoliły nam skonstruować transformacje Bäcklunda dla powyższych nieliniowych układów równań. W pracach [H2] i [H8] dyskutujemy szczególne postaci powyższych nieliniowych równań, pokazujemy ich redukcje i konstruujemy ich szczególne rozwiązania.

5 Geometryczne aspekty - formuły Lelievre'a

Odsłonięcie nowych całkowalnych struktur, w tym przypadku odsłonięcie złożoności struktury dyskretnych równań dopuszczających transformację typu Moutarda i będących dyskretyzacjami samosprężonych równań różniczkowych, znajduje zazwyczaj zastosowanie w dyskretnej geometrii różniczkowej. Przyjrzyjmy się bowiem klasycznemu zagadnieniu geometrii equiafinicznej, mianowicie formułom Lelievre'a [9]. Formuły te pozwalają z pola (ko)normalnego i afinicznej formy fundamentalnej odtworzyć powierzchnię. Przy pewnych niezbyt restrykcyjnych założeniach (patrz warunki (31-33)

z pracy [H3]) można pokazać, że pole normalne do pewnej powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa \mathbb{E}^3 (lub ogólniej pole konormalne do pewnej powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni equiafinicznej $e\mathbb{A}^3$) spełnia równanie formalnie samosprężone drugiego rzędu. Gdy równanie to jest równaniem Moutarda (2) formuły odtwarzają powierzchnię sparametryzowaną liniami asymptotycznymi, gdy równanie jest postaci $L\psi = 0$ gdzie L jest operatorem (8) formuły odtwarzają powierzchnię sparametryzowaną siecią sprężoną, wreszcie pełne równanie $L\psi = 0$ gdzie L jest operatorem (6) daje po użyciu formuł Lelievre’a generyczne parametryzacje powierzchni.

W dyskretnym przypadku dyskretne równanie Moutarda poprzez formuły Lelievre’a daje dyskretne sieci asymptotyczne [24]. W pracy [H3] pokazaliśmy, że formuły Lelievre’a dla równania związanego z operatorem (7), czyli dyskretyzacji (8), dają sieci czworoboków płaskich czyli dyskretny analog sieci sprężonych. Co więcej formuły Lelievre’a dla równania $L\psi = 0$ gdzie L jest operatorem (5), dają niemal generyczne (spełniające założenia (39-42) z pracy [H3]) dwuwymiarowe dyskretne sieci.

Otrzymaliśmy więc kolejny przykład, gdzie dopiero zrozumienie rozmaitych aspektów całkowalnych dyskretyzacji, pozwala dyskretyzować klasyczne konstrukcje geometrii różniczkowej. Po raz pierwszy w dyskretnej geometrii nie tylko rozważaliśmy do szczególne parametryzacje powierzchni przy dyskretyzacji, lecz również dopuszczaliśmy generyczne parametryzacje tychże.

6 Perspektywy

Teoria nieliniowych dyskretnych równań całkowalnych odzwierciedlająca nie tylko wybrane siatki współrzędnych na powierzchniach solitonowych, lecz również swobodę zmiany ich parametryzacji jest wciąż w powijakach. Opisywana w pracach [H5,H7] metoda przejścia na podsiatkę była obiecującym kandydatem na odpowiednik zamiany zmiennych niezależnych w przypadku dyskretnym. Wydaje się jednak, że kandydatem niewystarczającym. Jeden z możliwych kierunków rozwoju tej teorii został wskazany przez A. Doliwę w pracy [26], gdzie metodę przejścia na podsiatkę wzbogacono o możliwość dokonywania transformacji Laplace’a i pokazano, że teorię sieci czworoboków płaskich [15] można opisać używając równania Hiroty-Miwy [16].

Najważniejszym pytaniem nie mającym dotąd odpowiedzi jest czy rezultaty pracy [H6] mogą być uogólnione na więcej wymiarów w analogii do prac [15, 16]. Innymi słowy czy istnieją całkowalne dyskretyzacje powierzchni za-

wierających sieci sprzężone, takie które się do sieci sprzężonych nie odwołują. Należy w tym miejscu wspomnieć, że badanie możliwości uogólniania równań całkownych do całkownego układu równań w *wielu wymiarach* urosło do rangi metody odkrywania i badania dyskretnych równań całkownych [27, 25]. I chociaż nasze prace w tej dziedzinie dotyczą sieci \mathbb{Z}^n [H17,H18,H19], to już prace naszych współpracowników [28] poza sieci \mathbb{Z}^n wychodzą.

Jak wspomnieliśmy we wstępie, liniowe operatory tu rozważane często są częścią układu nieliniowych równań różniczkowych. Pojawia się więc szansa na dyskretyzację tych ostatnich. Pomimo, że wątek ten nie jest akcentowany w cyklu prac składających się na niniejszą rozprawę, chcielibyśmy przedstawić przynajmniej jeden przykład *ilustrujący perspektywy* metod zastosowanych w prezentowanym cyklu prac. Mianowicie wektor wodzący $\vec{R}_{m,n}$ i jego kwadrat długości $|\vec{R}_{m,n}|^2$ dyskretnej sieci izotermicznej spełnia równanie Moutarda w tak zwanym cechowaniu afinicznym (patrz książka [2])

$$\Delta_m \left(\Theta_{m,n} \Theta_{m,n+1} \Delta_n \left[\frac{\vec{R}_{m,n}}{|\vec{R}_{m,n}|^2} \right] \right) + \Delta_n \left(\Theta_{m,n} \Theta_{m+1,n} \Delta_m \left[\frac{\vec{R}_{m,n}}{|\vec{R}_{m,n}|^2} \right] \right) = 0. \quad (9)$$

W granicy ciągłej otrzymujemy równania na wektor wodzący powierzchni izotermicznej sparametryzowanej współrzędnymi krzywiznowymi. Zadając te równania na kwaziregularnym parkietażu rombicznym i stosując metodę przejścia na podsiatkę otrzymujemy

$$\Delta_m \left(A \Delta_{-m} \left[\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \right] + C \Delta_{-n} \left[\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \right] \right) + \Delta_n \left(B \Delta_{-n} \left[\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \right] + C \Delta_{-m} \left[\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \right] \right) = 0.$$

gdzie, by uczynić formułę zwartą, pominęliśmy zmienne niezależne. Ostatni układ równań w granicy ciągłej przechodzi na układ równań na wektor wodzący powierzchni izotermicznej w generycznej parametryzacji. Niestety nie jest znana geometryczna charakteryzacja tego dyskretnego układu równań i nie udało się również jak dotąd skonstruować transformacji Bäcklunda dla tegoż układu równań. Z drugiej strony metoda przejścia na podsiatkę pozwala nam otrzymywać rozwiązania tych równań z rozwiązań układu (9).

Lista problemów jest znacznie dłuższa. Dużą część monografii [2] warto by przejrzeć pod kątem możliwości rozszerzenia zawartych tam całkownych dyskretyzacji szczególnych parametryzacji powierzchni solitonowych na całkowną dyskretyzację generycznych parametryzacji tych powierzchni. Dyskretyzacje eliptycznych wersji nieliniowych całkownych równań różniczkowych jak na przykład równanie Ernsta nie są znane.

Dyskretna geometria różniczkowa jest wciąż przed nami.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych Prace przed doktoratem

- [H10] M. Nieszporski and A. Sym, 2000, *Bäcklund transformations for hyperbolic surfaces in E^3 via Weingarten congruences*, Theoretical and Mathematical Physics, 122(1), 84–97.
- [H11] M. Nieszporski, 2000, *The multicomponent Ernst equation and the Moutard transformation*, Physics Letters A, 272(1–2), 74–79.
- [H12] A. Doliwa, M. Nieszporski, and P.M. Santini, 2001, *Asymptotic lattices and their integrable reductions: I. the Bianchi-Ernst and the Fubini-Ragazzi lattices*, Journal of Physics A-Mathematical and General, 34(48), 10423–10439.
- [H13] M. Nieszporski, 2002, *On a discretization of asymptotic nets*, Journal of Geometry and Physics, 40(3–4), 259–276.
- [H14] M. Nieszporski, 2002, *A Laplace ladder of discrete Laplace equations*, Theoretical and Mathematical Physics, 133(2), 1576–1584.

Prace po doktoracie

- [H15] A. Doliwa, M. Nieszporski, and P.M. Santini, 2004, *Geometric discretization of the Bianchi system*, Journal of Geometry and Physics, 52(3), 217–240.
- [H16] M. Nieszporski and Sym A, 2009, *Bianchi surfaces: integrability in an arbitrary parametrization*, Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical, 42(40), 404014:1–404014:10.
- [H17] P. Kassotakis and M. Nieszporski, 2011, *Families of integrable equations*, SIGMA, 7, 100:1–100:14.
- [H18] P. Kassotakis and M. Nieszporski, 2012, *On non-multiaffine consistent-around-the-cube lattice equations*, Physics Letters A, 376(45), 3135–3140.
- [H19] J. Atkinson and M. Nieszporski, 2013, *Multi-quadratic quad equations: Integrable cases from a factorized-discriminant hypothesis*, International Mathematics Research Notices, e-pub: doi: 10.1093/imrn/rnt066.

Praca [H10] jest jeszcze jednym przykładem pokazującym unifikujące aspekty teorii powierzchni solitonowych. Rezultaty Bianchiego dotyczące specjalnej podklasy kongruencji Weingartena tzw. kongruencji Bianchiego zostały użyte do konstrukcji rozwiązań równania Ernsta.

Praca [H11] wskazuje rozmaite całkowalne aspekty kongruencji Weingartena (stanowiące podwaliny mojej rozprawy doktorskiej) co pozwoliło wskazać szereg całkowalnych podklas kongruencji Weingartena.

W pracy [H13] pokazuję całkowalne aspekty dyskretnej siatki asymptotycznych i wprowadzam pojęcie dyskretnej kongruencji Weingartena. Dzięki temu możliwe było znalezienie szeregu dyskretnej układów całkowalnych w szczególności dwóch omawianych w pracy [H12] mianowicie dyskretnej układu Bianchiego-Ernsta i dyskretnej układu Fubinięgo-Ragazzi.

Praca [H14] wprowadza pojęcie drabiny Laplace'a dla równań różnicowych opisujących czworoboki płaskie. Głównym odkryciem tej pracy było odkrycie sprzężonego dyskretnej równania Moutarda, jak również dyskretnej nieliniowej równania Goursata.

W pracy [H15] poruszane są geometryczne aspekty dyskretnej układu Bianchiego-Ernsta (z pracy [H13]) i jego transformacji Bäcklunda.

Praca [H16] dotyczy całkowalnych aspektów powierzchni Bianchiego zapisanych w arbitralnych parametryzacjach. Stanowi przygotowanie do znalezienia całkowalnych dyskretnej parametryzacji na powierzchniach Bianchiego innych niż parametryzacja liniami asymptotycznymi.

Prace [H17], [H18] i [H19] są cyklem prac poświęconym pewnym układom rekurencji zadanych na krawędziach sieci \mathbb{Z}^n , które dopuszczają istnienie trójparametrowej rodziny potencjałów skalarnych z (nie licząc możliwości dodania stałej do potencjału) zadanych na wierzchołkach sieci. Dla szczególnych wartości parametrów potencjał spełnia znane równania konsystentne na sześciacie [25] (które dzięki własności konsystencji na sześciacie są całkowalne). Dla pozostałych wartości parametrów otrzymujemy nowe wieloznaczne rekurencje: korespondencje konsystentne na sześciacie. Przez całkowalność korespondencji rozumiemy możliwość konstrukcji ich rozwiązań używając rozwiązań równań z pracy [25] (dzięki skonstruowanym przez nas transformacjom Bäcklunda między tymi równaniami).

Literatura

- [1] R. Sauer, *Differenzegeometrie*, Springer, 1970.
- [2] A. I. Bobenko and Y. B. Suris, *Discrete Differential Geometry: Integrable Structure*, Graduate Studies in Mathematics , Vol. 98. AMS, 2009.
- [3] S. Novikov, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*, Springer, 1984.
- [4] V.B. Matveev and M.A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, 1991.
- [5] C. Rogers and W.K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations. Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2002.
- [6] A. Sym, Soliton surfaces and their applications, *Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems (Lecture Notes in Physics N. 239)*, pp. 154-231, Springer-Verlag, Berlin 1985.
- [7] S. P. Novikov, Algebraic properties of two-dimensional difference operators, *Russian Math. Surveys* 52 (1997) 1.
- [8] S.P. Novikov, I.A. Dynnikov, Discrete spectral symmetries of low-dimensional differential operators and difference operators on regular lattices and two-dimensional manifolds, *Russ. Math. Surv.* 52(5) (1997) 1057-1116.
- [9] K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine differential geometry*, Cambridge Tracts in Math., vol. 111, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [10] G. Darboux, Sur la representation sphérique des surfaces, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* 94 (1882) 1343-1345.
- [11] S.B. Leble, Darboux transformation, *Encyclopedia of Mathematics*. URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Darboux_transformation&oldid=17264
- [12] Th.F Moutard, Sur la construction des équations de la forme $(1/z)(\partial^2 z / \partial x \partial y) = \lambda(x, y)$ qui admettent une intégrale générale explicite. *J. Éc. Pol.* 45 (1878) 1-11.

- [13] S.B. Leble, Moutard transformation, Encyclopedia of Mathematics. URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Moutard_transformation&oldid=15036
- [14] H. Jonas, Über die Transformation der konjugierten Systeme und über den gemeinsamen Ursprung der Bianchischen Permutabilitätstheoreme, Sitzber. Berliner Akad. Wiss. 14 (1915) 96-118.
- [15] A. Doliwa and P.M. Santini, Multidimensional quadrilateral lattices are integrable, Phys. Lett. A 233 (1997) 365-372.
- [16] E. Date, M. Jimbo, and T. Miwa, Method for generating discrete soliton equations. II, J. Phys. Soc. Japan 51 (1982) 4125-31;
- [17] J. J. C. Nimmo, Darboux transformations and the discrete KP equation, J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997) 8693-704.
- [18] E. Date, M. Jimbo and T. Miwa, Method for generating discrete soliton equations. V, J. Phys. Soc. Japan 52 (1983) 766-71.
- [19] J.J.C. Nimmo and W.K. Schief, Superposition principles associated with the Moutard transformation. An integrable discretisation of a (2+1)-dimensional sine-Gordon system, Proc. R. Soc. A 453 (1997) 255-79.
- [20] P. Małkiewicz, Transformacje Darboux dla q-różnicowych operatorów drugiego rzędu w dwóch zmiennych niezależnych, praca magisterska Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, 2005
- [21] Ch. Mercat, Exponentials form a basis of discrete holomorphic functions on a compact, Bull. Soc. Math. France 132 (2004) 305-326.
- [22] A. Doliwa and M. Nieszporski, Darboux transformations for linear operators on two dimensional regular lattices, arXiv:0905.3484
- [23] M. Toda, Vibration of a chain with a non-linear interaction, J. Phys. Soc. Japan 22 (1967) 431-436.
- [24] B. G. Konopelchenko and U. Pinkall, Projective generalizations of Lelievre's formula, Geometriae Dedicata 79 (2000) 81-99.

- [25] V.E. Adler, A.I. Bobenko, Yu.B. Suris, Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach, Commun. Math. Phys. 233 (2003) 513-543.
- [26] A. Doliwa, Desargues maps and the Hirota-Miwa equation, Proc. R. Soc. A 466 (2010) 1177-1200.
- [27] F.W. Nijhoff and A.J. Walker, The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier systems, Glasgow Math. J. 43A (2001) 109-123;
F.W. Nijhoff, Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system, Phys. Lett. A 297 (2002) 49-58.
- [28] J. Atkinson, Idempotent biquadratics, Yang-Baxter maps and birational representations of Coxeter groups, arXiv:1301.4613.

Maciej Nieszporski

Warszawa 11.02.2014