

1 Imiona i nazwisko

Mikołaj Konrad Korzyński

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

- wrzesień 2002: Magister fizyki *cum laude*, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski. Praca magisterska "*Tensor Bacha i normalna konforemna koneksja Cartana*", promotor: prof. Jerzy Lewandowski
- marzec 2008: Doktor nauk fizycznych w zakresie fizyki, Uniwersytet Warszawski. Dysertacja pt. "*Dynamiczne aspekty kwazi-lokalnej teorii czarnych dziur*", promotor: prof. Jerzy Lewandowski

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- kwiecień 2008 – październik 2010: Postdoc w Instytucie Maksa Plancka Fizyki Grawitacji w Poczdamie (Instytucie Alberta Einsteina), Niemcy
- październik 2010 – sierpień 2012: Postdoc/asystent (*Universitätsassistent*) na Uniwersytecie Wiedeńskim, Wydział Fizyki, Grupa Fizyki Grawitacji, Austria
- wrzesień 2012 – : Adiunkt w Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk, Warszawa

4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

a) Tytuł osiągnięcia naukowego

Gruboziarniste uśrednianie w ogólnej teorii względności (cykl publikacji)

b) Lista publikacji wchodzących w skład cyklu (autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa, recenzenci wydawniczy)

- [H1] Mikołaj Korzyński, "*Covariant coarse-graining of inhomogeneous dust flow in General Relativity*", *Classical and Quantum Gravity* **27** (2010) 105015, 21 pp.
- [H2] Eloisa Bentivegna, Mikołaj Korzyński, "*Evolution of a periodic eight-black-hole lattice in numerical relativity*", *Classical and Quantum Gravity* **29** (2012) 165007, 20 pp.
- [H3] Eloisa Bentivegna, Mikołaj Korzyński, "*Evolution of a family of expanding cubic black-hole lattices in numerical relativity*", *Classical and Quantum Gravity* **30** (2013) 235008, 18 pp.
- [H4] Mikołaj Korzyński, "*Backreaction and continuum limit in a closed universe filled with black holes*", *Classical and Quantum Gravity* **31** (2014) 085002, 32 pp.
- [H5] Mikołaj Korzyński, "*Nonlinear effects of general relativity from multiscale structure*", *Classical and Quantum Gravity* **32** (2015) 215013, 32 pp.
- [H6] Mikołaj Korzyński, Ian Hinder, Eloisa Bentivegna, "*On the vacuum Einstein equations along curves with a discrete local rotation and reflection symmetry*", *JCAP* 1508 (2015) 08, 025

c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Struktura autoreferatu jest następująca: w następnym rozdziale dyskutuję problem gruboziarnistego uśredniania i backreaction w ogólnej teorii względności. Następnie w rozdziale 4.2 opisuję stan badań przed pojawieniem się prac [H1-H6] i szkicuję trzy możliwe podejścia do problemu. W rozdziale 4.3 skupiam się na nierozwiązanych problemach, którymi zająłem się w przedstawionych publikacjach. Treść publikację dyskutuję w rozdziałach 4.5–4.9, a w ostatnim rozdziale podsumowuję je i szkicuję przyszłe kierunki badań.

4.1 Wprowadzenie: gruboziarniste uśrednianie i problem backreaction w ogólnej teorii względności

Gruboziarniste uśrednianie to jedno z najważniejszych narzędzi fizyki teoretycznej, pozwalające opisać bardzo skomplikowany układ z ogromną liczbą stopni swobody w sposób przybliżony, ale znacznie prostszy. Podstawowy pomysł jest prosty: wybieramy pewną liczbę zmiennych opisujących stan układu w wielkich skalach, pomijając stopnie drobnoskalowe. Wyprowadzamy efektywne równania rządzące zachowaniem tych kolektywnych, wielkoskalowych stopni swobody pod pewnymi założeniami dotyczącymi fizyki na drobnych skalach i jej wpływu na wielkie skale. Jeśli wybraliśmy właściwe zmienne, to układ równań efektywnych domyka się i otrzymujemy dobre przybliżenie fizyki całego układu.

Mechanika bryły sztywnej dostarcza najstarszego przykładu gruboziarnistego uśredniania: z mikroskopowego punktu widzenia bryła sztywna to ogromnie złożony układ atomów połączonych siłami elektromagnetycznymi. Jednak gdy działające siły zewnętrzne, prędkości postępowe oraz kątowe są dostatecznie małe, możemy opisać jego ruch przy użyciu stosunkowo niewielkiej liczby zmiennych: położenia środka masy, jego prędkości, całkowitej masy i tensora momentu bezwładności, orientacji przestrzennej opisanej kątami Eulera i prędkości kątowej. Okazuje się więc, że skomplikowana drobnoskalowa dynamika nie gra żadnej roli o ile pytamy tylko o kolektywny ruch wszystkich atomów ciała.

To przybliżenie ma oczywiście swoje ograniczenia: załamuje się gdy działające siły są zbyt wielkie lub obrót jest zbyt szybki. Możemy je jednak usprawnić uwzględniając elastyczne własności ciała, jego mody oscylacyjne itp. Gruboziarniste uśrednianie jest więc więcej niż tylko zbiorem efektywnych zmiennych i zależności między nimi. Może ono dostarczyć języka potrzebnego do poprawiania efektywnego opisu układu gdy zbliżamy się do granicy stosowności poczynionych przybliżeń.

Gruboziarniste uśrednianie jest bardzo rozpowszechnione w fizyce teoretycznej. Równania Naviera-Stokesa można wyprowadzić gruboziarniście uśredniając równania kinetycznej teorii gazów. Równania grupy renormalizacji w kwantowych teoriach pola można interpretować jako gruboziarniste uśrednianie oddziaływań na bardzo małych skalach i wysokich energiach. Jedną z nielicznych dziedzin fizyki w których problem gruboziarnistego uśredniania nie został dogłębnie przebadany jest ogólna teoria względności (OTW).

OTW jest obecnie uznaną teorią grawitacji i geometrii czasoprzestrzeni. Postuluje, że geometria czasoprzestrzeni jest pseudoriemannowska, opisywana tensorem metrycznym $g_{\mu\nu}$. Tensor ten określa jak w czasoprzestrzeni mierzymy odległości, kąty, prędkości i czas. Związany jest on z rozkładem materii poprzez równania Einsteina¹

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Łączą one krzywiznę czasoprzestrzeni, czyli kombinację pochodnych cząstkowych składowych $g_{\mu\nu}$ reprezentowaną przez tensor Einsteina $G_{\mu\nu}$, z tensorem energii-pędu materii $T_{\mu\nu}$. Zauważmy, że lewa strona równania (1) to obiekt lokalny, geometryczny, określony w jednym punkcie. Z drugiej strony $T_{\mu\nu}$ po prawej stronie interpretowany jest na ogół jako obiekt *statystyczny*, opisujący wszystkie składniki materii w pewnym mezoskopowym otoczeniu danego punktu. Ta nieco nielokalna, statystyczna interpretacja tensora gęstości energii-pędu przyjmowana jest powszechnie w podręcznikach OTW. Jest jasne, że zawiera ona niejawnie gruboziarniste uśrednianie drobnych szczegółów rozkładu materii: zamiast rozwiązywać równania Einsteina biorąc pod uwagę wszystkie drobne szczegóły rozkładu materii na skalach do subatomowej włącznie będziemy go reprezentować jako "zwyczajną", lokalną średnią z rozkładu wszystkich składników materii. $g_{\mu\nu}$ reprezentuje tutaj geometrię czasoprzestrzeni bez drobnych zniekształceń spowodowanych ziarnistością rozkładu materii. Takie rozumienie równań Einsteina jest niezwykle wygodne w astrofizycznych zastosowaniach OTW, gdyż pozwala stosować jej równania do obiektów takich jak galaktyki czy gromady galaktyk bez znajomości szczegółów ich budowy, ale rodzi ono pewne wątpliwości.

¹ W tekście zakładamy, że prędkość światła $c = 1$.

Po pierwsze, czy da się je ściśle uzasadnić, jeśli przyjmiemy, że równania (1) spełnione są dokładnie na najdrobniejszych skalach? W klasycznych równaniach elektrodynamiki Maxwella opisujemy skomplikowany ruch jonów bądź elektronów poprzez uśredniony, wielkoskalowy prąd elektryczny. Łatwo to uzasadnić w tym przypadku, gdyż mikroskopowe równania są ściśle liniowe. Z lokalnych równań Maxwella dla skomplikowanego pola elektrycznego i magnetycznego na skali atomowej wynikają takie same równania dla uśrednionych pól elektrycznego i magnetycznego przy założeniu, że odpowiednio uśrednimy też źródła pola, czyli prądy i ładunki. Ale dla nieliniowego układu równań różniczkowych cząstkowych, takiego jak (1), nie jest jasne czy wielkoskalowe równania otrzymane przez uśrednienie lokalnej metryki, będą miały podobną formę ze "zwyczajnie" uśrednionym tensorem gęstości energii-pędu. W ogólnym przypadku możemy się raczej spodziewać, że efektywne $T_{\mu\nu}$ i zwyczajna średnia będą różne. Tę różnicę przyjęło się nazywać *backreaction*. Po drugie, na poziomie bardziej fundamentalnym niejasne jest jak należy rozumieć średnią z wielkości tensorowych, takich jak metryka lub $T_{\mu\nu}$, gdy geometria rozwiązania jest zakrzywiona. Przy braku jakichkolwiek symetrii danego rozwiązania nie możemy użyć do definiowania średniej metod znanych z przestrzeni euklidesowej, takich jak transformacja Fouriera. W zakrzywionej czasoprzestrzeni nie istnieje niezależny od układu współrzędnych sposób, by porównać lub zsumować wielkości tensorowe zadane w różnych punktach. To powoduje, że najprostsze metody uśredniania, np. poprzez całkowanie po zadanym obszarze współrzędnych z odpowiednią miarą, nie dają się zastosować, gdyż ich wyniki są całkowicie zależne od arbitralnie wybranego układu współrzędnych.

4.2 Stan badań

Problemom *backreaction* i gruboziarnistego uśredniania, pomimo ich ogromnego znaczenia w kwestii stosowalności OTW w astrofizyce, poświęcono zaskakująco mało miejsca w dotychczasowej historii matematycznej OTW. W 1968 roku Isaacson rozważył propagowanie fal grawitacyjnych na tle dowolnej metryki przy użyciu metod perturbacyjnych i przybliżenia krótkiej fali [1, 2]. Obliczył on wpływ fal grawitacyjnych na wielkoskalowy tensor gęstości energii-pędu, otrzymany przez uśrednienie fal do 0 w rzędzie liniowym i zbadał wpływ wyrazów nieliniowych. Isaacson wyprowadził w ten sposób wyrażenie na nieliniowe poprawki przy gruboziarnistym uśrednianiu fal grawitacyjnych.

Większość badań w tej dziedzinie wykonano w kontekście problemów *backreaction* i fitowania w kosmologii [3, 4]. We współczesnym paradygmacie kosmologicznym zakładamy, że geometria Wszechświata na wielkich skalach opisana jest różnorodnością wyposażoną w metrykę jednorodną i izotropową, której fizyczna skala zmienia się w czasie. Takie rozwiązanie równań Einsteina nazywa się metryką Friedmana-Lemaître'a-Robertsona-Walkera (FLRW). Materia w tym rozwiązaniu rozłożona jest całkowicie jednorodnie. Zarówno problem *backreaction*, jak i problem fitowania mają swoje źródło w obserwacji, że we Wszechświecie rozkład materii jest daleki od jednorodności na drobnych skalach i każdy realistyczny jego model musi to uwzględniać. Ellis i Stoeger [3] zwrócili uwagę, że niejednorodności mają wpływ na obserwacje kosmologiczne i wprowadzają systematyczne efekty przy interpretacji danych. Badanie bezpośredniego wpływu niejednorodności na obserwacje kosmologiczne przy użyciu ścisłych rozwiązań badało potem wielu autorów [5, 6, 7, 8, 9]. Inne podejście zaproponował potem Buchert i inni: stwierdzili oni, że niejednorodności mogą na wiele sposobów wpływać na wielkoskalową dynamikę Wszechświata [10, 11, 12, 13].

Temat zapoczątkował gorącą debatę na początku lat dwutysięcznych, gdy niektórzy autorzy zasugerowali, że efekty *backreaction* mogą wyjaśnić przyspieszenie rozszerzania się Wszechświata, obserwowane w zależności odległości jasnościowej supernowych typu I od ich przesunięcia ku czerwieni [13, 14]. Takie wyjaśnienie zostało odrzucone przez większość badaczy, ale problem *backreaction* dyskutowany jest do dzisiaj. W szczególności program badawczy Bucherta został zakwestionowany przez Ishibashi i Walda [15]. Ich argumenty przeciw podejściu Bucherta opierają się na założeniach dotyczących geometrii Wszechświata: zakładają oni, że tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ jest wszędzie bliski wartości średniej razem z pochodnymi i pokazują, że to założenie jest całkowicie zgodne z obserwowanymi ogromnymi kontrastami gęstości. Pod tymi założeniami Ishibashi i Wald dowodzą, że równania Einsteina sprowadzają się do prostego, liniowego układu równań na jedną zmienną, a wyrazy nieliniowe okazują się pomijalne. W dalszych pracach Green oraz Wald prezentują ogólniejsze i bardziej dopracowane podejście, w którym zakładają, że metryka jest bliska uśrednionej metryce wielkoskalowej, jej pierwsze pochodne mogą być duże ale ograniczone z góry i spełniają pewne techniczne założenia dotyczące ich słabej granicy przy parametrze mierzającym skalę niejednorodności dążącym do 0. Wyprowadzają potem wyrażenie na *backreaction* w tym przypadku jako tensor bezśladowy i dodatnio określony oraz stwierdzają, że dla realistycznego modelu Wszechświata jest ono małe.

Należy podkreślić, że argumenty zaprezentowane w [15, 16, 17] wymagają, by różnica między fizyczną

a uśrednioną metryką była wszędzie mała, tak, aby dało się zastosować rozmaite przybliżenia perturbacyjne. Autorzy postulują więc, aby *a priori* założyć, że tak jest, dodać do modelu FLRW niewielkie perturbacje, zbadać jak zachowują się obserwabla kosmologiczne i dofitować obserwacje do tych modeli – dokładnie tak, jak przyjęte jest to dzisiaj w kosmologii.

Niestety jeśli warunek małych perturbacji nie jest spełniony, *i to nawet lokalnie*, przestaje być jasne na ile poprawne jest podejścia Greena i Walda. W kosmologii i astrofizyce możemy oczekiwać, że ten warunek załamie się w pobliżu czarnych dziur lub gwiazd neutronowych. Pytanie brzmi więc na ile wolno stosować zwyczajne, naiwne gruboziarniste uśrednianie w przypadku, gdy w rozwiązaniu obecne są obszary o dużych perturbacjach metryki, gdzie zlinearyzowana OTW załamuje się, i jak wprowadzić ewentualne poprawki. Co więcej, okazuje się, że jest możliwe, że pewne typy niejednorodności, choć prowadzą do znacznych perturbacji metryki, skutecznie „udają” model jednorodny gdy badamy ich obserwacyjne własności [18, 19].

Debata o backreaction trwa do 2016 roku. Buchert i współpracownicy wskazali rozmaite problemy z formalizmem Greena i Walda [20], w tym problemy z zależnością od cechowania i poprawną definicją uśrednionych wielkości. Ci z kolei odpowiedzieli dwiema kolejnymi pracami [21, 22], w których bronią swojego podejścia.

Ogólny problem wpływu niejednorodności w kosmologii można podzielić na dwie powiązane, ale różne kwestie:

- Kwestię *fizycznego backreaction*: jak należy poprawnie zdefiniować wielkoskalowe zmienne związane z polem grawitacyjnym, np. metrykę? Zauważmy, że definicja powinna być kowariantna, czyli nie powinna zależeć od wprowadzonych ad hoc struktur takich jak układ współrzędnych. W przeciwnym przypadku wynik gruboziarnistego uśredniania będzie trudny do zinterpretowania fizycznego. Dla zadanej definicji wielkoskalowych zmiennych - jak zachowują się równania Einsteina pod wpływem gruboziarnistego uśredniania? Tak postawiony problem należy bardziej do teorii równań różniczkowych cząstkowych niż do fizyki.
- Kwestię *obserwowalnych konsekwencji niejednorodności*: jak niejednorodności wpływają na propagację światła i obserwacje w kosmologii (np. zależność jasności obserwowanej od przesunięcia ku czerwieni) i jakie poprawki należy uwzględnić analizując dane obserwacyjne? To pytanie jest oczywiście powiązane z poprzednim, gdyż efekty backreaction na dużych skalach z pewnością wpływają własności geodezyjnych zerowych. Jest ono jednak istotniejsze z punktu widzenia obserwacyjnej kosmologii.

W pracach [H1-H6] przedstawionych w tym postępowaniu habilitacyjnym zajmuję się przede wszystkim pierwszą z tych kwestii. Najważniejsze pytania, które rozważałem w tych pracach to:

- Jak duże są efekty backreaction w typowych zastosowaniach astrofizycznych OTW? Jaki mają wpływ na wielkoskalowe równania kosmologii? Te pytania są trudne gdy rozwiązanie znajduje się poza zasięgiem metod perturbacyjnych czy zlinearyzowanych równań Einsteina. Ciężko je zatakwować w całej ogólności, więc rozpocząłem od nieco uproszczonych kwestii: jak zależą wyrazy backreaction od szczegółów rozkładu materii na drobnych skalach i dla jakich rozkładów materii mogą one być duże?
- Jaki jest status przybliżenia płynu czy kontinuum w OTW i kosmologii? To pytanie jest ciekawe dla mocno ziarnistych rozkładów materii, np. gdy materia ma postać ciężkich, zwartych obiektów (czarnych dziur, gwiazd neutronowych), w pobliżu których nie da się stosować przybliżenia liniowego równań Einsteina. Czy można ściśle dowieść istnienia granicy kontinuum dla równań Einsteina dla bardzo dużej liczby obiektów?

4.3 Podejścia do problemu gruboziarnistego uśredniania i backreaction

W literaturze można wyróżnić trzy podejścia do problemu backreaction. Pierwsze to podejście przybliżone, gdzie tensor metryczny rozwijany jest przy użyciu jakiegoś schematu aproksymacji (przybliżenie krótkofalowe [2, 23], zlinearyzowana OTW [24, 25] lub ich kombinacja [16, 26, 22]). Oczywiście wyniki uzyskane w ten sposób mają ograniczony zakres stosowalności,

Po drugie, istnieje możliwość badania ścisłych rozwiązań równań Einsteina opisujących niejednorodne modele kosmologiczne. Niestety znane jest tylko niewiele takich rodzin rozwiązań. Największą i najdokładniej przebadaną grupą są rozwiązania typu Swiss cheese (albo rozwiązania cut-and-paste, jak nazywa je D. Wiltshire), w których wycięte sfery zostały zastąpione częściami rozwiązania Lemaitre'a-Tolmana-Bondiego, Szekeresa lub Schwarzschilda [27, 28, 29, 30]. Modele tego typu badane były przez

wielu autorów [31, 32, 33], ich ewolucja sprowadza się do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych (rozwiązywalnych przez kwadratury), a ich podstawowe własności są dobrze znane. Zakładają one jednak bardzo specyficzną, uproszczoną geometrię niejednorodności. Badanie bardziej skomplikowanych przykładów wymaga zastosowania technik numerycznych. Postęp w numerycznej OTW, jaki dokonał się w ostatniej dekadzie, napędzany badaniami zlewania się czarnych dziur [34, 35], umożliwił rozwiązywanie pełnych równań Einsteina 3+1 dla stosunkowo skomplikowanych rozkładów materii z czarnymi dziurami w rozsądnym czasie, o ile dysponuje się odpowiednio silnym klastrem obliczeniowym. Po raz pierwszy dokonano tego w [H2].

Zamiast badać pełną ewolucję w czasie równań Einsteina można skoncentrować się na danych początkowych. Jak wiadomo, dane początkowe dla równań Einsteina składają się z rozmaitości trójwymiarowej z dodatnią metryką q_{ij} oraz symetrycznym tensorem krzywizny zewnętrznej K_{ij} . Nie są one zadane w dowolny sposób, lecz muszą spełniać 4 równania więzów łączących je z rozkładem materii:

$$\begin{aligned} R^{(3)} + (K^i_i)^2 - K_{ij} K^{ij} &= 16\pi G T_{00} \\ D_i K^i_j - K_{,j} &= 8\pi G T_{0j}. \end{aligned}$$

Równania te łączą geometrię z rozkładem materii, mają więc sens fizyczny. Wystarczą one, by badać backreaction w składowych T_{00} i T_{0i} tensora gęstości energii-pędu. Są też bez porównania prostsze niż równania ewolucji, a do ich rozwiązywania rozwinięto szereg technik, w tym metodę konforemnego rozkładu Lichnerowicza i Yorka [36, 37]. Pionierami w tej dziedzinie byli Lindquist i Wheeler, którzy jako pierwsi badali czarne dziury ułożone w sieci, i.e. rozwiązania z dyskretną grupą symetrii przypominające sieć krystaliczną (black hole lattices, BHL) [38]. Można je skonstruować przy użyciu metod Lichnerowicza. Takimi danymi początkowymi zajęli się potem inni autorzy [39, 12].

Jednak najbardziej wartościowymi rezultatami w tej dziedzinie byłyby wyniki ścisłe, prawdziwe dla szerokiej klasy rozwiązań. Mogłyby mieć one formę dokładnych wyrażeń na backreaction lub nierówności szacujących te efekty od góry. Ze względu na stopień skomplikowania problemu do momentu pojawienia się omawianych tutaj prac tego typu rezultatów w literaturze nie było.

4.4 Szczegółowe problemy dyskutowane w cyklu publikacji

Publikacje, które przedstawiam w poniższym autoreferacie, mają wspólny cel: zrozumienie aspektów matematycznych gruboziarnistego uśredniania w OTW i efektów backreaction dla niejednorodnych rozkładów materii oraz problemu granicy kontinuum poza obszarem stosowalności technik perturbacyjnych. W tym rozdziale podam krótki opis konkretnych, słabo zbadanych dotychczas zagadnień, którymi zajmuję się w swoich pracach.

- **Ścisłe rezultaty dotyczące backreaction.** Oczywiście luką w literaturze jest brak ogólnych i ścisłych rezultatów dotyczących backreaction. Jest całkiem prawdopodobne, że nie ma jednego, całkowicie ogólnego, prostego wyrażenia na wielkość tego efektu, ale można mimo to rozważać fizycznie interesujące rodziny rozwiązań i próbować dowodzić wyników w postaci nierówności szacujących backreaction od góry. Nierówności różnego typu mają długą historię w OTW, np. słynne twierdzenie o dodatniości masy lub nierówności dotyczące pola powierzchni, momentu pędu i masy czarnej dziury [40, 41, 42]. Takie nierówności, choć mniej użyteczne i wszechstronne niż pełne wyrażenia na zadaną wielkość, dostarczają istotnych informacji o niej. Mogą mianowicie służyć do wskazania sytuacji, gdy nie musimy brać efektów backreaction pod uwagę. Poza tym sposób w jaki szacowanie zależy od własności rozwiązania ma często znaczenie fizyczne. To prowadzi nas do kolejnego problemu:
- **Zależność backreaction od szczegółów mikroskopowego rozkładu materii.** Nie jest jasne jakie szczegóły mikroskopowego rozkładu materii mają znaczenie gdy szacujemy backreaction. To oczywiście bardzo poważny problem gdy próbujemy stosować metody statystyczne do struktury w kosmosie: nie da się poprawnie stosować OTW w tym przypadku jeśli nie wiemy jakie cechy mikroskopowego rozkładu powodują duże efekty relatywistyczne na dużych skalach. Wyrazy backreaction da się wyrazić poprzez mikroskopowy tensor metryczny, jednak takie wyrażenie ma ograniczoną stosowalność, gdyż mikroskopową metrykę trudno określić z obserwacji prowadzonych z wielkich odległości.
- **Ścisłe rezultaty dotyczące granicy kontinuum.** Dyskretne rozkłady materii z bardzo zwartymi, ciężkimi źródłami pola grawitacyjnego opisuje się w OTW jako pył (płyn bez ciśnienia) lub

ogólniej przy użyciu równań Einstein-Własowa. Intuicja podpowiada, że to przybliżenie powinno działać tym lepiej, im większy jest iloraz skali makroskopowej i skali rozmiaru dyskretnej źródeł, albo – co równoważne – gdy liczba obiektów rozbiega do nieskończoności przy niezmiennych parametrach makroskopowych. W fizyce statystycznej nazywamy taką granicę *granicą continuum*. Czy zawsze istnieje ona w OTW? Czy sam tensor metryczny zbiega do odpowiedniej wartości średniej i w jakim sensie? Zauważmy, że ze względu na obecność masywnych, mocno relatywistycznych obiektów ten problem znajduje się poza zasięgiem przybliżenia liniowego.

- **Geometria modeli sferycznych Lindquista–Wheeler bez nałożonych symetrii.** Clifton, Tavakol i Rosquist przedyskutowali geometrię i własności fizyczne danych początkowych z regularną siecią czarnych dziur na sferze S^3 [12]. Wheeler opisał szczegółowo konfiguracje z pięcioma czarnymi dziurami [39]. Te prace dotyczyły jednak wysoce symetrycznych konfiguracji czarnych dziur. Pojawia się więc pytanie jakie cechy tych konfiguracji zachowane są przez dowolne rozkłady czarnych dziur na S^3 .
- **Pełne numeryczne symulacje sieci czarnych dziur.** Wspomniane wcześniej sieci czarnych dziur to jeden z najprostszych przykładów rozkładów materii jednorodnych w skalach makroskopowych, ale w skalach mikroskopowych wykazujących silną ziarnistość. Są to więc jedne z najważniejszych przykładów do badania w kontekście efektów backreaction i do testowania rozmaitych metod gruboziarnistego uśredniania w OTW. O ewolucji w czasie tych modeli napisano wiele prac, łącznie ze wspomnianą już pracą Lindquista i Wheeler [38], ale tylko przy użyciu rozmaitych metod przybliżonych [43, 44, 45]. Postępy w dziedzinie numerycznego całkowania równań Einsteina w wymiarze 3+1, w tym pierwsze stabilne symulacje zlewania się czarnych dziur [46] przy użyciu metody ruchomego nakłucia (*moving puncture method*), a także wzrost mocy obliczeniowej dostępnych klastrów, pozwalają na zbadanie ich własności metodami numerycznymi. Tego typu badań brakowało do roku 2012.
- **Kowariantne gruboziarniste uśrednianie tensorowej części równań Einsteina i równań ruchu materii.** Metoda uśredniania Bucherta, najbardziej chyba znany formalizm gruboziarnistego uśredniania w kosmologii, bierze pod uwagę jedynie skalarną część równań. Pełny formalizm powinien oczywiście brać pod uwagę ich część tensorową.

4.5 Praca [H1] – gruboziarniste uśrednianie niejednorodnego przepływu materii w OTW

Celem pracy [H1] było dostarczenie przepisu na gruboziarniste uśrednianie równań ruchu materii, który byłby alternatywą dla metody Bucherta, a ponadto obejmował tensorową część równań. Rozważam w tych pracach rozwiązanie równań Einsteina z pyłem. Zakładam też, że zadany jest a priori rozkład 3+1 czasoprzestrzeni (jeśli przepływ jest bezwirowy, to współporuszający synchroniczny układ współrzędnych nadaje się znakomicie). W metodzie Bucherta unoszonej objętości płynu D przypisujemy uśrednioną ekspansję wykorzystując do tego jej fizyczną objętość. Buchert przypisuje efektywny czynnik skali według przepisu

$$a_{\text{eff}}(t) = \left(\frac{V_D(t)}{V_D(t_0)} \right)^{1/3}, \quad (2)$$

gdzie t_0 to ustalony moment. Czynnik ten służy dalej do zdefiniowania uśrednionej ekspansji $\langle \theta \rangle_D$, która spełnia uśrednioną po objętości wersję równania Raychaudhuri i równania więzów skalarnych. W ten sposób uśrednione wielkości spełniają to samo równanie co lokalne, uzupełnione o dobrze określone wyrazy typu backreaction. Wadą tego podejścia jest oczywiście fakt, że w ten sposób uśredniliśmy wyłącznie skalarną część równań, podczas gdy na drobnych skalach przepływ materii wykazuje także wirowość i ścinanie opisane wielkościami tensorowymi.

Główną przeszkodą, jaką napotykamy próbując zdefiniować uśrednione wielkości tensorowe, jest konieczność zachowania kowariancji. Przepis powinien bowiem być niezależny od układu współrzędnych, gdyż w przeciwnym przypadku wyniki będzie trudno zinterpretować fizycznie. Zależny od układu współrzędnych przepis może wręcz pokazywać nieznikające backreaction w jednorodnym rozwiązaniu FLRW rozpatrywanym w nietypowym układzie współrzędnych. Niezależność taką nie jest jednak łatwo uzyskać, gdy geometria czasoprzestrzeni nie wyróżnia prostego przepisu na uśrednianie tensorów zdefiniowanych w różnych punktach.

Głównym pomysłem pracy [H1] jest spostrzeżenie, że gruboziarniste uśrednianie nie musi wykorzystywać średnich w potocznym znaczeniu tego słowa, jako średnich względem jakiejś miary. Przypisanie uśrednionych wielkości może odbywać się inaczej o ile definicja spełnia zdroworozsądkowe własności zmiennych wielkoskalowych, np. zgadza się ze standardową średnią w prostych przypadkach.

Niech $Q^i_j = v^i_{,j}$ oznacza gradient prędkości nierelatywistycznego płynu w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Jego rozkład na ślad, część symetryczną bezśladową oraz antysymetryczną odpowiada rozkładowi na ekspansję, ścinanie i wirowość płynu. Średnią objętościową z Q_{ij} po obszarze D można przepisać jako całkę po brzegu obszaru korzystając z twierdzenia Gaussa:

$$\langle Q^i_j \rangle = V_D^{-1} \int_D v^i_{,j} d^3x = V_D^{-1} \int_{\partial D} v^i n_j d^2\sigma. \quad (3)$$

Uogólnianie pierwszej z tych całek do dowolnej, nieeuklidesowej geometrii jest trudne, ale możemy też spróbować uogólnić tę drugą. Równość między nimi nie będzie oczywiście zachowana, ale można dowolnej z nich użyć do zdefiniowania $\langle Q^i_j \rangle$. Wielkości zdefiniowane tylko przy użyciu danych geometrycznych na brzegu jakiegoś obszaru nazywane są w OTW wielkościami *kwazi-lokalnymi* [47].

Aby zdefiniować kwazi-lokane, gruboziarnisto uśrednione ścinanie, ekspansję i wirowość posłużyłem się klasycznym wynikiem geometrii różniczkowej, czyli twierdzeniem o izometrycznym zanurzeniu powierzchni o topologii S^2 . Mianowicie mając daną taką powierzchnię C o dostatecznie regularnej, dodatniej metryce i o dodatniej krzywiznie możemy znaleźć globalne izometryczne zanurzenie $f : C \mapsto \mathbf{R}^3$ w trójwymiarową przestrzeń euklidesową. Ponadto zanurzenie jest jedyne z dokładnością do odbić, przesunięć i obrotów [48].

Rozważmy teraz metrykę dwuwymiarową $q_{AB}(t)$ wyindukowaną na brzegu obszaru D . Zakładając, że spełnia ona założenia twierdzenia o izometrycznym zanurzeniu, możemy znaleźć numerowaną czasem rodzinę takich zanurzeń f_t . Możemy też obliczyć pochodną po czasie położenia obrazu każdego punktu w D , otrzymując w ten sposób fikcyjną prędkość v^i w \mathbf{R}^3 zefiniowaną na obrazie $f_t(D)$. To pole prędkości można wykorzystać do zdefiniowania średniego ścinania poprzez równanie (3). Ze względu na niejednoznaczność zanurzenia pole prędkości zdefiniowane jest tylko z dokładnością do generatorów obrotów i przesunięć, ale to nie ma wpływu na wartość gruboziarnisto uśrednionych ścinania i ekspansji. Jeśli zaś chodzi o wirowość, przedstawiłem w pracach nieco inną konstrukcję wykorzystującą zanurzenia f_t oraz rzutowanie czteroprędkości płynu na powierzchnię stałego czasu.

$\langle Q^i_j \rangle$ zdefiniowane jest w abstrakcyjnej przestrzeni \mathbf{R}^3 będącej przeciwdziedziną zanurzeń, ale w [49] pokazuję, że przestrzeń tę można w naturalny sposób zidentyfikować z przestrzeniami stycznymi do powierzchni stałego czasu w punktach leżących na brzegu D , dostarczając interpretacji geometrycznej uśrednionym wielkościom. $\langle Q^i_j \rangle$ okazuje się być polem tensorowym na powierzchni $t = \text{const}$, zdefiniowanym na punktach leżących na ∂D .

Pokazuję w [H1], że uśrednione wielkości spełniają uogólnione równanie Raychaudhuri, identyczne z lokalnym oprócz kilku wyrazów backreaction pojawiających się z powodu niejednorodności przepływu materii w D . Pokazuję też, że konstrukcja spełnia podstawowe założenia gruboziarnistego uśredniania: w granicy obszaru D kurczącego się do punktu uśrednione wielkości zrównują się z lokalnymi, ponadto w kilku ścisłych rozwiązaniach (FLRW, LTB, Gödla) wyniki zgadzają się z oczekiwaniami.

Najważniejsze wnioski z pracy [H1] można podsumować następująco:

- Twierdzenie o izometrycznym zanurzeniu powierzchni o topologii S^2 pozwala na przyporządkowanie gruboziarnisto uśrednionej ekspansji, ścinania i wirowości do skończonej porcji płynu w sposób kowariantny. Uśrednione wielkości są kwazi-lokalne, czyli zależą wyłącznie od danych na brzegu dziedziny uśredniania. Konstrukcja wymaga, aby brzeg tego obszaru miał odpowiednią topologię i dodatnią krzywiznę.
- Uśrednione wielkości spełniają uogólnioną wersję równania Raychaudhuri z dodatkowymi wyrazami określającymi backreaction. Wyrazy te składają się z części newtonowskiej, obecnej także dla nierelatywistycznych płynów, oraz wyrazów relatywistycznych.
- W granicy bardzo małego obszaru uśredniania otrzymane wielkości zgadzają się z lokalnymi, a uogólnione równanie Raychaudhuri sprowadza się do lokalnego równania wzdłuż geodezyjnej czasowej, jak należało się spodziewać.

4.6 Prace [H2] i [H3] – numeryczna ewolucja sieci czarnych dziur

Sieci czarnych dziur, czyli rozwiązania równań Einsteina o dyskretnej grupie symetrii odbiciowych i obrotowych, to proste a zarazem ciekawe fizycznie przykłady niejednorodnych rozkładów materii, które

wyglądają jednorodnie i izotropowo w dużych skalach. Początki ich badań to praca Lindquista i Wheelera [38], którzy do badania ich ewolucji wykorzystali metody przybliżone zapożyczone z fizyki ciała stałego. Podejście to rozwinęli Clifton oraz Ferreira [45, 43]. Wheeler opisał potem szczegółowo dane początkowe dla konfiguracji pięciu czarnych dziur na sferze S^3 [39], a inne dane początkowe z sieciami na S^3 opisano w pracy [12].

Największe zalety sieci czarnych dziur to ich względna prostota dzięki dużej symetrii oraz silne efekty nieliniowe obecne na małych skalach, co pozwala na zbadanie nieliniowych efektów OTW. Jak wiadomo, w modelach FLRW możliwe są trzy typy powierzchni stałego czasu: płaskie (\mathbf{R}^3), sferyczne S^3 dla modeli zamkniętych i hiperboliczne H^3 . Wprowadzenie sieci czarnych dziur łamie pełną grupę izometrii takich rozwiązań (odpowiednio $E(3)$, $SO(4)$ i $SO(1,3)$) do dyskretnych podgrup.

Praca [H2] rozpoczyna się dyskusją konstrukcji danych początkowych dla sieci czarnych dziur wykorzystując metrykę płaską, sferyczną lub hiperboliczną jako konforemną metrykę w metodzie Lichnerowicza-Yorka [36, 37, 50]. W pierwszym kroku wybieramy jedną z metryk: płaską δ_{ij} , sferyczną γ_{ij}^S lub hiperboliczną γ_{ij}^H i przyjmujemy jako metrykę niefizyczną b_{ij} . Metrykę fizyczną q_{ij} otrzymujemy przez konforemne przeskalowanie a conformal transformation

$$q_{ij} = \phi^4 b_{ij}, \quad (4)$$

zaś krzywizna zewnętrzna to

$$K_{ij} = \frac{K}{3} q_{ij} + A_{ij}, \quad (5)$$

gdzie tensor A_{ij} jest bezśladowy. Równania więzów upraszczają się do

$$\tilde{\Delta}\psi - \frac{\tilde{R}^{(3)}}{8}\psi - \frac{K^2}{12}\psi^5 + \frac{1}{8}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij}\psi^{-7} = -2\pi G\psi^5\rho \quad (6)$$

$$\tilde{D}_i\tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3}\psi^6\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_iK = 0, \quad (7)$$

gdzie $\tilde{\Delta}$ to laplasjan związany z metryką b_{ij} , $\tilde{R}^{(3)}$ to jej skalar Ricciego, a \tilde{A}_{ij} związane jest z A_{ij} poprzez wzór $\tilde{A}_{ij} = \psi^2 A_{ij}$. Zanim przejdziemy dalej zauważmy, że między krzywizną b_{ij} , chwilową ekspansją danych początkowych i materią zachodzi pewien związek przypominający związek między topologią powierzchni stałego czasu, ekspansją czasoprzestrzeni i zawartością materii w modelach FLRW [H2]. Mianowicie z pierwszego równania Friedmanna

$$\frac{R^{(3)}}{8} + \frac{K^2}{12} = 2\pi G\rho \quad (8)$$

w czasoprzestrzeniach FLRW wynika, że jeśli gęstość energii ρ jest dodatnia, to albo ekspansja (a więc i parametr Hubble'a) K nie znika, albo krzywizna jest dodatnia (bądź oba na raz). Nie jest możliwy model, w którym czasoprzestrzeń jest chwilowo bez ekspansji, a przy tym ma geometrię płaską lub hiperboliczną. Podobnie jest dla sieci czarnych dziur: nie da się skonstruować metodą Lichnerowicza-Yorka danych początkowych czasowo symetrycznych ($K_{ij} = 0$), w których geometria sieci byłaby płaska lub hiperboliczna. Pozostają więc dwa przypadki: (chwilowo) czasowo symetryczne sieci czarnych dziur na sferze lub rozszerzające się sieci (sferyczne, płaskie lub hiperboliczne). W [H2] zbadaliśmy przypadek pierwszy, w [H3] przypadek drugi z płaską, sześcienną siecią.

Czasowo symetryczne dane początkowe odpowiadają warunkom $K_{ij} = 0$ i $b_{ij} = \gamma_{ij}^S$ (metryka okrągłej, trójwymiarowej sfery jednostkowej). Ustalamy układ współrzędnych $(\lambda, \theta, \varphi)$ na S^3 . Próżniowe równania więzów wektorowych spełnione są automatycznie, pozostaje tylko równanie więzów skalarnych w formie liniowego równania eliptycznego na czynnik konforemny:

$$\tilde{\Delta}\psi - \frac{3}{4}\psi = 0. \quad (9)$$

Nie ma ono rozwiązań regularnych, ale posiada funkcję Greena z osobliwością typu nakłucia $\frac{1}{\lambda}$:

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\sin \lambda/2}. \quad (10)$$

Można złożyć dowolną liczbę takich funkcji Greena ześrodkowanych w wybranych punktach x_1, \dots, x_N :

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\sin \frac{\Lambda(x_i, x)}{2}}, \quad (11)$$

gdzie $\Lambda(x, y)$ oznacza geodezyjną odległość na S^3 , a α_i to rzeczywiste współczynniki. Dla dodatnich α_i i $N \geq 3$ takie dane początkowe odpowiadają zniekształconej początkowej sferze z N doklejonych asymptotycznie płaskich końców, osiągalnych poprzez powierzchnie minimalne. Geometria powstałych gardzieli bliska jest metryce Schwarzschilda (dla $N = 2$ to jest dokładnie geometria Schwarzschilda), można więc osobliwości w x_i zidentyfikować z N czarnymi dziurami umieszczonymi w sferycznym modelu kosmologicznym.

W [H2] i [H3] rozpatrywałem jedynie sieci, których komórkami są wielościany regularne z czarnymi dziurami w środku. Okazuje się, że na sferze S^3 możliwe jest tylko sześć układów tego typu, odpowiadające sześciu możliwym regularnym parkietazom (tesselacjom) sfery S^3 [12]. Mają one symetrię regularnego, czterowymiarowego hiperczworościanu wpisanego w S^3 , a czarne dziury znajdują się na jego wierzchołkach. Sieci mają 5, 8, 16, 24, 120 lub 600 czarnych dziur. Zauważmy, że nie ma tutaj możliwości zmieniania rozmiarów komórki. Zamiast rodzin sieci krystalicznych o różnych rozmiarach, jakie znamy z przestrzeni płaskiej, mamy do dyspozycji tylko skończoną liczbę możliwych konfiguracji.

W [H2] rozważam wraz ze współautorką sieć z ośmioma czarnymi dziurami na S^3 i badam numerycznie pełną, trójwymiarową ewolucję tego modelu. Narzędzia do ewolucji numerycznej czarnych dziur dostępne są od 2011 roku [51]. Zostały stworzone do modelowania zlania się podwójnych czarnych dziur, aby badać emitowane przy okazji fale grawitacyjne [35]. Stworzenie wzorców takich sygnałów było niezbędnym krokiem przy detekcji pierwszego sygnału grawitacyjnego przez LIGO i inne obserwatoria.

Próbując bezpośrednio zastosować do sieci czarnych dziur kody napisane do badania zlewania się czarnych dziur napotykałyśmy na poważny problem. Kody te napisano zakładając asymptotycznie płaskie warunki brzegowe, a sieci wymagają bardziej skomplikowanych warunków periodycznych. Stosunkowo łatwo je nałożyć w przypadku sieci płaskich, sześciennych, w których kształt pojedynczej komórki to sześciąt ze ścianami spotykającymi się pod kątem prostym, ale w ogólniejszej sytuacji jest to trudne [52]. Na szczęście znaleźliśmy sposób na obejście tego problemu i numeryczne badanie ewolucji sieci ośmiu czarnych dziur bez nakładania explicite warunków brzegowych.

Sposób oparty jest na obserwacji, że dane początkowe opisane powyżej można równoważnie potraktować jako dane skonstruowane metodą Lichnerowicza na \mathbf{R}^3 . Jeśli bowiem rozpatrzmy S^3 jako sferę jednostkową w \mathbf{R}^4 zadaną warunkiem $(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = 1$, wtedy odwzorowanie rzutu stereograficznego P

$$x^i = \frac{2X^i}{1 - X^4}, \quad (12)$$

gdzie x^i to kartezjańskie współrzędne na \mathbf{R}^3 , jest konforemne, czyli pchnięcie γ_{ij}^S spełnia

$$P_* \gamma_{ij}^S = (|\vec{x}|^2/4 + 1)^{-2} \delta_{ij}. \quad (13)$$

Załóżmy do tego, że jedna z osobliwości ϕ , np. α_1 , znajduje się dokładnie w punkcie $X = (1, 0, 0, 0)$. Nie leży on w dziedzinie P (został „odwzorowany do nieskończoności”). W takiej sytuacji metryka fizyczna γ_{ij} zrzucona do \mathbf{R}^3 przyjmuje postać

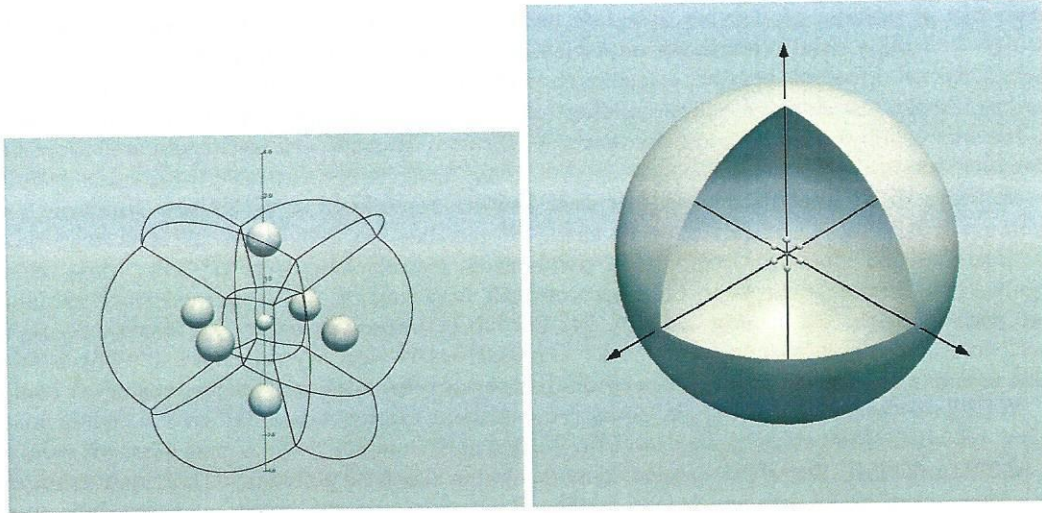
$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^S &= \psi^4 \gamma_{ij}^S = (\alpha_1)^4 \tilde{\psi}^4 \delta_{ij} \\ \tilde{\psi}(\vec{x}) &= 1 + \sum_{i=2}^N \frac{2\alpha_i \sqrt{1 + |\vec{n}_i|^2/4}}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{n}_i|}, \end{aligned} \quad (14)$$

czyli standardowych, asymptotycznie płaskich danych początkowych Lichnerowicza z $N - 1$ czarnymi dziurami w punktach \vec{n}_i , z dokładnością do globalnego przeskalowania przez stałą. Przeskalowanie to można wyeliminować skalując odpowiednio współrzędne kartezjańskie².

Dane początkowe tego typu można wprowadzić bezpośrednio do kodu EinsteinToolkit. W naszym przypadku mają one postać danych na \mathbf{R}^3 z siedmioma osobliwościami w punktach

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{N}}_2 &= (0, 0, 0), \\ \vec{\mathcal{N}}_3 &= (2, 0, 0), \\ \vec{\mathcal{N}}_4 &= (-2, 0, 0), \\ \vec{\mathcal{N}}_5 &= (0, 2, 0), \\ \vec{\mathcal{N}}_6 &= (0, -2, 0), \end{aligned} \quad (15)$$

²W równania (21), (23) i (24) w pracy [H2] wkradł się drobny błąd: zamiast 4 w mianowniku powinno być $4A_i^2$.



Rysunek 1: Ilustracja po lewej: Początkowe położenia siedmiu czarnych dziur reprezentowanych przez powierzchnie minimalne otaczające nakłucia oraz krawędzie komórek elementarnych regularnej sieci ośmiu czarnych dziur. Ośmiem identycznych komórek elementarnych w postaci kwazi-sześcianów na S^3 zostało rzutowane stereograficznie na \mathbf{R}^3 i stąd ich zniekształcenie. Ilustracja po prawej: Ósma powierzchnia minimalna wokół siedmiu czarnych dziur.

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{N}}_7 &= (0, 0, 2), \\ \vec{\mathcal{N}}_8 &= (0, 0, -2)\end{aligned}$$

z parametrami masowymi $m_2 = 4M$ and $m_3, \dots, m_7 = 4\sqrt{2}M$, gdzie M jest ustaloną jednostką masy. Rozwiązanie razem z powierzchniami minimalnymi przedstawione jest na Rys. 1. Zauważmy, że czarna dziura α_1 , na pierwszy rzut oka niewidoczna w tym rozwiązaniu, jest w nim obecna. Pojawia się ona gdy zbadamy powierzchnie minimalne w tym rozwiązaniu: odpowiada jej powierzchnia minimalna obejmująca wszystkie pozostałe czarne dziury. Choć nie jest to oczywiste ani na rysunku, ani z postaci jawnej rozwiązania podanej powyżej, wszystkie osiem czarnych dziur jest identyczne, a dowolna para może zostać zamieniona miejscami przy użyciu odpowiedniej izometrii. Wymaga to jednak uwzględnienia czynnika konforemego (14).

Zbadaliśmy kinematyczne i dynamiczne efekty backreaction dla tego rozwiązania. Geodezyjną długość krawędzi komórki elementarnej D_{edge} przyjęliśmy za miarę skali modelu i użyliśmy (wraz z jego znikającą pochodną po czasie w $t = 0$) aby dofitować odpowiedni model FLRW z pyłem. Efekty kinematyczne mają postać poprawki do całkowitej masy układu: masa efektywna jest o ok. 25% większa niż suma mas ADM czarnych dziur, zgodnie z rezultatami z [12] (tam jednak fitowanie modelu FLRW dokonane jest w inny sposób).

Wyniki numerycznej ewolucji tego układu przedstawione są na Rys. 7 w pracy [H2]. Zauważmy, że model jest symetryczny ze względu na odwrócenie czasu $t \rightarrow -t$, więc ewolucja „w przód” daje pełną informację o nim. Ewolucja numeryczna trwała do czasu $t = 150M$ czasu współrzędnościowego, potem zamierała ona w pobliżu czarnych dziur z powodu własności użytych warunków cechowania. Nie jest to zaskoczeniem, gdyż te warunki, wzięte z pracy [53], wprowadzone zostały do badania zlewania się czarnych dziur i wiadomo, że zwalniają one ewolucję w pobliżu nakłuc (osobliwości) prawie do zatrzymania utrzymując ją w obszarze odległym. Późniejsze eksperymenty z ich modyfikacją wykonane przez E. Bentivegnę i I. Hintera pozwoliły ją pchnąć nieco dalej, ale wyniki nie zostały dotąd opublikowane.

Jeszcze przed zatrzymaniem ewolucji, ok. $t = 80M$, błąd numeryczny znacznie wzrósł i w związku z tym kolejne punkty nie zostały uwzględnione na wykresie. Do tego momentu ewolucja D_{edge} , wyrażona przez czas własny obserwatorów gaussowskich τ , zgadza się z ewolucją modelu FLRW z pyłem z dokładnością do 1%, co jest bliskie dokładności numerycznej całej symulacji. Nie zaobserwowaliśmy więc dynamicznych efektów backreaction, mimo że model znajduje się poza granicą stosowalności przybliżenia liniowego.

Prócz tego zbadaliśmy zachowanie zewnętrznych powierzchni marginalnie złapanych (marginally outer trapped surfaces, MOTS) reprezentujących brzeg czarnej dziury. Obliczyliśmy odległość geodezyjną

M. Korzyński

D_{hor} między MOTS-ami dwóch sąsiednich czarnych dziur. Ta wielkość na pierwszy rzut oka może wydawać się dobrym kandydatem na alternatywną definicję skali tego modelu, ale okazało się, że nie może ona pełnić tej funkcji. Jej pierwsza pochodna w czasie nie znika bowiem w $t = 0$ pomimo tego, że w danych początkowych czarne dziury nie poruszają się względem siebie. Wydaje się to sprzeczne z własnością symetrii zmiany kierunku upływu czasu, o której wspominaliśmy. Rozwiązanie paradoksu jest proste, jeśli uświadomimy sobie, że śledziliśmy *przyszłościowe* MOTS. Dane początkowe skonstruowane w tej pracy zawierają powierzchnie marginalnie złapane, które są powierzchniami bifurkacji podobnymi do powierzchni bifurkacji znanych z geometrii Schwarzschilda. Horyzonty przyszłościowy i przeszłościowy MOTS-ami maleje więc z prędkością 2 nawet dla $t = 0$. To zupełnie inne zachowanie niż w przypadku czynnika skali dla zamkniętego modelu FLRW, który osiąga dla $t = 0$ maksimum.

[H2] to, o ile mi wiadomo, pierwsza praca dyskutująca numeryczną ewolucję sieci czarnych dziur. Jest to więc pionierska praca w dziedzinie numerycznych, relatywistycznych symulacji niejednorodnych modeli kosmologicznych. Potem ten kierunek badań podjęły inne grupy [54, 55, 56, 57] (patrz również [58], gdzie autorzy wykorzystali rachunek Reggego zamiast typowych symulacji numerycznych). [H2] była więc cytowana przez wszystkie kolejne prace o numerycznej ewolucji sieci czarnych dziur oraz inne prace dotyczące niejednorodnych modeli kosmologicznych. Została również zacytowana w pracach przeglądowych dotyczących numerycznej OTW oraz niejednorodnych modeli kosmologicznych [35, 34, 59]. Jej główne wyniki można podsumować następująco:

- Głównym efektem backreaction dla regularnej sieci ośmiu czarnych dziur na S^3 jest kinematyczny efekt w postaci renormalizacji masy. Ewolucja w czasie jest z dużą dokładnością zgodna z modelem FLRW z pyłem.
- W przeciwieństwie do długości krawędzi komórki elementarnej odległość między sąsiednimi czarnymi dziurami, rozumiana jako odległość między powierzchniami marginalnie złapanymi, nie daje się zastosować jako miara skali modelu, gdyż dla małych czasów zachowuje się ona zupełnie inaczej niż czynnik skali w modelu FLRW.

W następnej pracy poświęconej sieciom czarnych dziur [H3] zajęliśmy się płaską siecią sześcienną. Jak stwierdziliśmy powyżej, taka sieć nie może być stacjonarna nawet dla jednego momentu czasu. Konstrukcja danych początkowych wymaga więc nieznikającej krzywizny zewnętrznej, a więc równanie więzów skalarnych nie będzie już miało postaci liniowego równania eliptycznego. Konstrukcja wykonana została numerycznie metodą zapożyczoną z pracy [60], z kilkoma usprawnieniami [61]. W naszych danych początkowych ślad krzywizny zewnętrznej był dodatni i stały w pobliżu ścian komórki elementarnej, a znikał wewnątrz ustalonej sfery na środku tej komórki. Pomiędzy tymi dwoma stałymi rozciągał się obszar przejściowy. Na samym środku znajdowała się osobliwość typu nakłucia $\frac{m}{r}$. Konstrukcja danych początkowych pozwalała na wybór parametru masowego m centralnej czarnej dziury, wartości śladu tensora krzywizny na ścianach komórki elementarnej i długość jej krawędzi. Równanie więzów skalarnych rozwiązywane było metodą relaksacji. Zauważmy, że otrzymany czynnik konforemny przeskalowuje wszystkie wielkości, więc ich fizyczne wartości w danych początkowych są nieco inne od założonych na początku.

W pracy [H3] zbadaliśmy ewolucję czterech zestawów danych początkowych z różnymi wartościami masy czarnej dziury m . Ewolucja numeryczna trwała dosyć długo, choć znów na pewnym etapie kod tracił numeryczną dokładność. Niezbędna była modyfikacja standardowego warunku cechowania typu β -tracker. Każdą z symulacji prowadziliśmy dla trzech różnych rozdzielczości siatki numerycznej. Ich porównanie pokazało numeryczną zbieżność pierwszego rzędu do pewnego momentu zależnego od danych początkowych, potem zbieżność wyraźnie się psuła.

Podobnie jak w pracy [H2] przedyskutowaliśmy ewolucję w czasie długości krawędzi komórki elementarnej. Jej ewolucja znów zgodna była z modelem FLRW z pyłem oprócz nałożonych na nią szybkich oscylacji. Ich powodem były prawdopodobnie wzbudzone mody promieniowania grawitacyjnego. To częsta sytuacja w numerycznej OTW przy badaniu poruszających się układów czarnych dziur z danymi początkowymi stworzonymi metodą konforemna [62]. Nie pojawiły się w [H2], gdyż geometria danych tam użytych była prostsza, a ponadto dane były symetryczne ze względu na odwrócenie czasu. W symulacjach zderzeń czarnych dziur takie mody szybko wypromieniowywane są do nieskończoności. W naszym przypadku, z periodycznymi warunkami brzegowymi zamiast asymptotycznie płaskich, to zajęć nie może i wzbudzone fale pozostają wewnątrz komórki.

W przeciwieństwie do [H2], praca [H3] nie jest pierwszą pracą dyskutującą numeryczną symulację sześcienną sieci czarnych dziur. Dwa tygodnie przed ukończeniem naszego preprintu na arXiv pojawiła się praca Yoo, Okawy i Nakao [54]. Analiza wyników w [H3] jest jednak szersza niż [54].

Najważniejsze wyniki pracy [H3] można podsumować następująco:

- Głównym efektem backreaction w sześciennych sieciach czarnych dziur skonstruowanych metodami z [60, 61] jest znów kinematyczny efekt renormalizacji masy.
- Ewolucja rozwiązania w czasie jest bliska odpowiednio dofitowanemu modelowi FLRW z pyłem, oprócz szybkich oscylacji nałożonych na ekspansję. Ich przyczyną są prawdopodobnie fale grawitacyjne wzbudzone wewnątrz komórki elementarnej.
- Efektywne ciśnienie, czyli dynamiczne backreaction, szybko i nieregularnie oscyluje wokół zera. Amplituda oscylacji porównywalna jest z efektywną gęstością energii, ale oscylacje te dla długich czasów uśredniają się do zera.

4.7 Praca [H4] – granica kontinuum i backreaction w sferycznych modelach kosmologicznych z czarnymi dziurami typu Lindquista-Wheelera

Publikacja [H4] to najbardziej zaawansowana matematycznie praca z całego cyklu i prawdopodobnie najbardziej nowatorska. Jak stwierdziliśmy powyżej, istnieje jedynie 6 możliwych regularnych sieci czarnych dziur na S^3 . To nie wystarczy jeśli interesuje nas granica kontinuum, czyli co się dzieje, gdy liczba czarnych dziur staje się tak duża, że można je traktować jako kontinuum, tak, jak robi się to z płynami w teorii kinetycznej. Dlatego w tej pracy rozważyłem czasowo symetryczne dane początkowe typu Lindquista-Wheelera dane równaniem (11), ale z *dowolną* liczbą czarnych dziur oraz *dowolnymi* położeniami i masami. Zająłem się dwiema kwestiami:

1. W jakim sensie i pod jakimi warunkami metryka danych początkowych dąży do metryki zamkniętego modelu FLRW w momencie maksymalnego rozszerzenia?
2. Jaka jest różnica między całkowitą masą tego modelu, czyli sumą mas ADM obecnych czarnych dziur, a efektywną masą uzyskaną przez przyporządkowanie mu w odpowiedni sposób gruboziarnisto uśrednionego modelu FLRW ?

Uśredniania i fitowania modelu FLRW można dokonać bardzo prosto uśredniając czynnik konforemny ψ przy użyciu standardowej formy objętości η na S^3 :

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3} \psi \eta,$$

gdzie $2\pi^2$ to objętość jednostkowej sfery S^3 . Zauważmy, że osobliwości w funkcji Greena w (11) są typu $\frac{1}{\lambda}$, czyli całkwalne w wymiarze 3, a więc powyższa całka jest zbieżna.

Najważniejszy wynik pracy [H4] zawarty jest w dwóch nierównościach. Pierwsza z nich, Twierdzenie 3.1, szacuje odchylenie w jednym punkcie p czynnika konforemnego (a zatem całej metryki q_{ij}) od średniej:

$$\frac{|\Phi(p) - \langle \Phi \rangle|}{\langle \Phi \rangle} \leq C_\epsilon U_\epsilon(E, \lambda_{\min}). \quad (16)$$

Druga, Twierdzenie 3.2, szacuje bezwymiarowy deficyt masy, czyli różnicę między masą całkowitą a efektywną, otrzymaną z uśrednionej metryki, podzieloną przez tęże masę efektywną³

$$\frac{|M_{eff} - M_{tot}|}{M_{eff}} \leq C_\epsilon W_\epsilon \left(E, \frac{\alpha_{\max}}{\alpha}, \delta_{\max}, \delta_{\min} \right) + \frac{\alpha_{\max}}{\alpha} \quad (17)$$

Oba oszacowania zależą od parametrów opisujących mikroskopowy rozkład czarnych dziur. W szczególności funkcja $U(E, \lambda_{\min})$ z (16) zależy od odległości od najbliższego nakłucia λ_{\min} i zmodyfikowanej rozbieżności czasowej (cap discrepancy) E . Ta druga wielkość określa jak równo czarne dziury rozłożone są na sferze. Jest ona pokrewna standardowej rozbieżności czasowej znanej z literatury. Jest ona globalnym górnym oszacowaniem na różnicę między objętością dowolnej czaszy na S^3 mierzoną formą η a objętością mierzoną miarą skoncentrowaną w punktach x_i . Dla dostatecznie jednorodnych rozkładów czarnych dziur zbiega ona do 0 wraz ze wzrostem liczby czarnych dziur. Oszacowanie (16) zależy od

³Zwracam uwagę na błąd druku w pracy [H4]: w mianowniku równań (24) oraz definicji σ_M na stronie 8 zamiast M_{tot} powinno być M_{eff} .

M. Korzyński

dodatniej potęgi E i od ujemnej potęgi λ_{\min} , czyli oszacowanie różnicy metryk daleko od najbliższej czarnej dziury jest ciaśniejsze niż w jej pobliżu.

Funkcja $W_\varepsilon(E, \frac{\alpha_{\max}}{\alpha}, \delta_{\max}, \delta_{\min})$ z równania (17) zależy także od E , ale także od ilorazu największego parametru masowego α_i i sumy wszystkich α_i oraz największej i najmniejszej odległości między dwoma nakłuciami δ_{\max} i δ_{\min} . Zależność od tej ostatniej wielkości jest również poprzez ujemną potęgę, a więc oszacowanie jest słabsze gdy dowolna para czarnych dziur zbliży się do siebie. Zbieżność bezwymiarowego deficytu masy do 0 zależy więc od szybkości zbieżności E i δ_{\min} do 0: ta ostatnia musi zbiegać do 0 dostatecznie wolno w porównaniu do E gdy $N \rightarrow \infty$.

W pracy [H4] prezentuję również nieskończony ciąg rozwiązań o rosnącej liczbie czarnych dziur N , w którym można stosunkowo prosto oszacować szybkość zbiegania E i δ_{\min} do 0, a potem użyć nierówności (16-17) aby opisać geometrię tych rozwiązań i dowieść, że bezwymiarowy deficyt masy znika w granicy (asymptotyczna addytywność mas). Pokazuję też, że to samo rozwiązanie z niewielką modyfikacją (bliskie pary czarnych dziur zamiast pojedynczych) posiada bardzo podobną geometrię, ale masy poszczególnych czarnych dziur nie są asymptotycznie addytywne. Dla zmodyfikowanych rozwiązań bowiem δ_{\min} zbiega znacznie szybciej do 0 i nierówność (17) nie ogranicza deficytu masy dla dużych N .

Praca [H4] to, o ile mi wiadomo, pierwsza praca, w której udowodniono ścisły, nieperturbacyjny wynik dotyczący backreaction i granicy kontinuum w OTW w formie nierówności. Praca prezentuje również nowatorskie metody dowodów. Dowody nierówności (16-17) opierają się na spostrzeżeniu, że obie wielkości σ_M i σ_Φ można wyrazić jako sumę wyrazów prostych do oszacowania oraz wyrazu w formie różnicy między średnią objętościową z funkcji Greena (10), zdefiniowaną poprzez całkę, i ważoną średnią jej wartości w punktach x_i . Ważona średnia jest podobna do sumy częściowej w definicji całki Riemanna i w związku z tym można oczekiwać, że różnica między obydwoma średnimi będzie zdążać do 0 gdy liczba N dąży do nieskończoności.

Problem szacowania takich wyrażeń znany jest w matematyce w kontekście teorii całkowania kwazi-Monte Carlo [63, 64, 65, 66]. Jest on stosunkowo łatwy dla funkcji regularnych, ale znacznie trudniejszy gdy funkcja posiada całkwalne osobliwości, jak (10) [63, 67, 68, 69]. Żaden z wyników znanych z literatury nie daje się bezpośrednio zastosować do dowodu nierówności (16-17), musiałem więc wypracować własne metody. Dowód korzysta z tożsamości Koksmy-Hlawki dla funkcji nieograniczonych. Wypracowane metody mogą znaleźć zastosowanie poza dziedziną backreaction i OTW, w teorii całkowania kwazi-Monte Carlo.

Praca [H4] została dostrzeżona w społeczności relatywistów zajmujących się problematyką backreaction. Wkrótce po jej opublikowaniu Clifton przedstawił pracę, w której dyskutował backreaction konfiguracji otrzymanych metodą obrazów [70]. Liu i Williams rozważali potem sieci czarnych dziur korzystając z rozmaitych metod przybliżonych i rachunku Reggego [71, 58], cytując przy tym [H4]. Ponadto wyniki [H4] zostały przytoczone przez obie strony debaty o backreaction między Greenem i Waldem z jednej strony i Buchertem ze współpracownikami z drugiej [17, 20]. Podany w [17] przykład kulki z łożyska kulkowego i jego dyskusja mają sporo punktów wspólnych z wynikami [H4]. Praca została wyróżniona przez Classical and Quantum Gravity jako CQG Highlight 2013/2014 w dziedzinie kosmologii.

Główne wyniki pracy [H4] można podsumować następująco:

- Nieskończone ciągi czasowo symetrycznych danych początkowych na S^3 z czarnymi dziurami jako jedynymi źródłami pola grawitacyjnego mogą posiadać granicę kontinuum gdy liczba czarnych dziur dąży do nieskończoności. Tą granicą jest zamknięty model FLRW z ciągłym i jednorodnym rozkładem materii. Zbieżność wymaga jednorodnego rozkładu czarnych dziur na sferze. Kryterium zbieżności dotyczy zmodyfikowanej rozbieżności czasowej między miarą standardową na S^3 a miarą zlokalizowaną na nakłuciach.
- Zbieżność tensora metrycznego do granicy kontinuum nie jest punktowa, lecz dość skomplikowana: tensor metryczny pozostaje mocno zniekształcony dla dowolnego N w obszarze bliskim każdej z czarnych dziur, czyli w odległości skończonej liczby promieni Schwarzschilda. Kiedy N dąży do nieskończoności czarne dziury i obszary zniekształcone gęsto pokrywają rozwiązanie. Jednak w obszarze dalekim od najbliższej czarnej dziury metryka zbiega do metryki FLRW. Co więcej, to obszary dalekie wyczerpują asymptotycznie całą sferę S^3 , a obszary bliskie stają się dla dużych N pomijalne.
- Istnienie granicy kontinuum nie oznacza automatycznie znikanie backreaction, czyli względnej różnicy między sumą mas ADM czarnych dziur i masą odpowiedniego rozwiązania FLRW. Niezbędny jest dodatkowy warunek na mikroskopowe rozmieszczenie czarnych dziur, mianowicie nie mogą one zbyt zbliżyć się do siebie. W [H4] wymagamy, aby minimalna odległość między dowolną parą czarnych dziur nie spadała zbyt szybko z N .

- Efekt backreaction wywołany jest gromadzeniem się materii w skupiska w małych skalach. Łatwo zrozumieć fizyczne powody czemu tak jest: gromadzenie się materii oznacza większą grawitacyjną energię wiązania, którą w OTW musimy wziąć pod uwagę jako źródło pola grawitacyjnego w wielkich skalach („grawitacja grawituje”).
- Można dowodzić nierówności szacujących backreaction w OTW korzystając z technik zaczerpniętych z teorii miary i teorii całkowania kwazi-Monte Carlo.

4.8 Praca [H5] – zagnieżdżone struktury

Wielkoskalowa dystrybucja materii we Wszechświecie jest zagnieżdżona: wielkie ściany (walls) utworzone są z filamentów, każda z nich z gromad galaktyk, a te z kolei zrobione są z pojedynczych galaktyk. Sytuacja jest więc mocno odmienna od uproszczonych modeli dyskutowanych w [H2-H4], gdzie istniała dobrze zdefiniowana, makroskopowa skala jednorodności, skala mikroskopowa ustalona przez mikroskopowe obiekty (np. czarne dziury) i brak struktur na skalach pośrednich. W [H5] rozważyłem więc sytuację, gdy materia jest jednorodna na skali jednorodności R_{hom} , ale poniżej jej struktura znajduje się na wszystkich skalach aż do skali najdrobniejszych niejednorodności R_{min} . Celem pracy było zbadanie jak efekty backreaction zależą od rozkładu materii w tym przypadku, kiedy powinniśmy się spodziewać, że będą one znaczące i które parametry charakteryzujące rozkład odgrywają największą rolę przy szacowaniu tych efektów.

Praca [H5] ma formę podobną do [H4]: badam w niej pewne ściśle rozwiązania Einsteina o specjalnej, uproszczonej geometrii. W przeciwieństwie do [H4] rozwiązania, które badam, nie są próżniowe, lecz wypełnione pyłem. Należą one do uogólnionych modeli typu Swiss-cheese, otrzymanych przez dopasowanie wycinka rozwiązania FLRW z rozwiązaniem Schwarzschilda. Konstrukcja przebiega następująco: najpierw zszywamy *zewnątrzne* rozwiązanie Schwarzschilda z *wewnętrznym* rozwiązaniem przedstawiającym jednorodną kulę pyłu o geometrii rozwiązania FLRW (patrz Rys. 2). Takie zszywanie do standardowa konstrukcja, opisana w wielu podręcznikach [72, 73]. Następnie wycinamy wewnątrz kuli pewną liczbę kulistych pustek, czyli obszarów o geometrii Schwarzschilda umieszczonych *wewnątrz* obszaru FLRW. Wewnątrz tych pustek z kolei wszywamy sfery wypełnione jednorodnie pyłem o większej gęstości. Ich rozmiar dobrany jest w taki sposób, aby przestrzenny tensor metryczny był zmniejszoną, idealnie przeskalowaną kopią początkowej kuli pyłu. Ten ostatni krok możemy powtarzać dla coraz mniejszych kul zagęszczenia pyłu tyle razy ile chcemy, otrzymując w ten sposób niemal samopodobny, fraktalny rozkład materii i pole grawitacyjne.

Niech N oznacza stopień zagnieżdżenia konstrukcji, czyli liczbę iteracji ostatniego kroku konstrukcji. Możemy porównać masę ADM rozwiązania M_{ADM} , mierzoną w dużej odległości od początkowej kuli pyłu, i masą całkowitą M_{tot} , zdefiniowaną tym razem jako całka z gęstości masy pyłu. Konstrukcja kolejnych pustek i zagęszczeń nie ma wpływu na M_{ADM} , ale zmienia masę całkowitą, którą możemy wyrazić poprzez szereg

$$M_{tot}^{(N)} = M_{tot}^{(0)} + \Delta M_{tot}^{(1)} + \dots + \Delta M_{tot}^{(N)}, \quad (18)$$

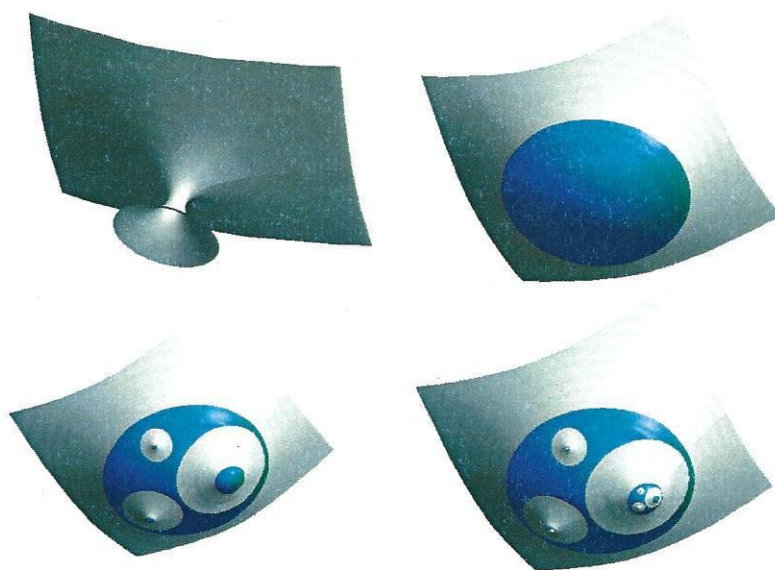
w którym $\Delta M_{tot}^{(k)}$ to poprawka związana z k -tym krokiem konstrukcji. Dzięki samopodobieństwu rozkładu masy szereg ten jest geometryczny, a więc daje się ściśle zsumować, patrz równanie (37) w [H5]. Względny deficyt masy $x = \frac{M_{tot} - M_{ADM}}{M_{ADM}}$, proporcjonalny do scałkowanej po objętości backreaction w składowej T_{00} tensora gęstości energii-pędu, daje się wyrazić jako funkcja parametrów opisujących rozkład masy: bezwymiarowego parametru zwartości (compactness) ε początkowej kuli materii, zdefiniowanego jako iloraz jej masy w jednostkach geometrycznych i rozmiaru, całkowity ułamek objętości α wycięty z kuli pyłu w każdym kroku oraz stopień zagnieżdżenia N .

W przybliżeniu newtonowskim deficyt masy musi zniknąć, gdyż masa mierzona w dużej odległości od ciała powiązana jest z masą całkowitą prawem Gaussa. Każda różnica między nimi to efekt nieliniowy OTW. Dla obiektów bez zagnieżdżonej struktury, jak na przykład jednorodna kula materii, jest ona w pierwszym rzędzie proporcjonalna do parametru zwartości ε :

$$x(\varepsilon) = C_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (19)$$

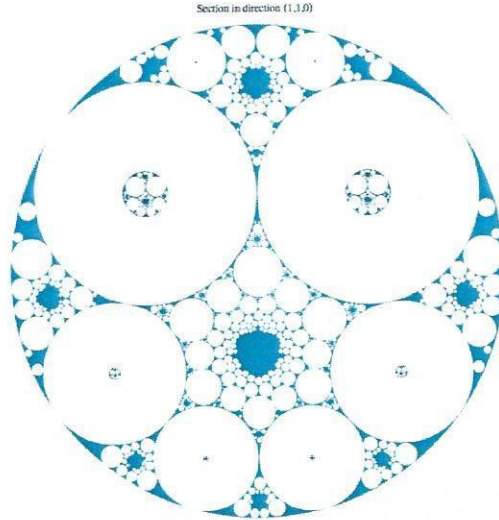
gdzie C_1 to stała zależna od geometrii rozwiązania. Zauważmy, że ze względu na samopodobieństwo przedstawionego rozwiązania parametr zwartości ε początkowej kuli pyłu jest identyczny jak parametr zwartości każdego pomniejszonego zagęszczenia. Tak więc ε jest uniwersalną stałą wskazującą jak mocno nieliniowa (relatywistyczna) jest dana struktura rozkładu materii.

M. Korzyński



Rysunek 2: Konstrukcja multiskalowej piany na poziomie danych początkowych, rysunek bez jednego wymiaru. Rozwiązanie Schwarzschilda przedstawione jako paraboloida Flamma (lewy górny róg). Paraboloida zostaje rozcięta wzdłuż okręgu, do pozostałej dziury dopasowujemy niebieską kulistą czaszę, tworząc metrykę q_0 (prawy górny róg). Następnie dopasowujemy kilka lejkowatych części Schwarzschilda do kilku usuniętych z rozwiązania kul. Lejki znów obcinamy wzdłuż odpowiednich kół i dopasowujemy do nich kuliste czasze (lewy dolny róg). Miejsca, gdzie ucinamy lejkowate paraboloidy wybrane jest tak, aby czasze obejmowały ten sam kąt byłowy, co początkowa czasza. Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie q_1 . Ten krok powtarzamy dla każdej ze zmniejszonych czasz, co daje metrykę q_2 (prawy dolny róg). Zauważmy częściowe samopodobieństwo konstrukcji.

M. Korzyński



Rysunek 3: Rozwiązanie z dużym efektem backreaction mimo bardzo słabo relatywistycznych niejednorodności. Kuliste pustki tworzą apollońskie wypełnienie kuli.

W pracy [H5] pokazałem rozkład pustek i zagęszczeń (patrz Rys. 3), w którym deficyt masy ma postać

$$x = C_2 N \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (20)$$

gdzie N to stopień zagnieżdżenia, a C_2 to inna stała zależna od szczegółów geometrii rozwiązania. Oczywiście bez względu na to, jak małe jest ε , możemy jego małą wartość zrekompensować biorąc odpowiednio duże N . Jest tak pomimo tego, że dla bardzo małego ε każda z pustek i zagęszczeń wydaje się leżeć w obszarze stosowalności przybliżenia newtonowskiego, gdzie efekty backreaction są pomijalne. Powodem ich dużej wartości jest kumulacja małych wkładów od niejednorodności na skalach pośrednich między skalą najmniejszych niejednorodności R_{min} a skalą początkowej kuli pyłu R_{hom} . Deficyt masy x z równania (20) można wyrazić w następującej formie:

$$x = C_3 \varepsilon D + O(\varepsilon^2) \quad (21)$$

gdzie D to bezwymiarowa *głębokość struktury*, czyli logarytm ilorazu skali R_{hom} do R_{min} :

$$D = \ln \frac{R_{hom}}{R_{min}}. \quad (22)$$

D jest więc ważnym parametrem bezwymiarowym charakteryzującym rozkład masy i wielkość efektów backreaction w zagnieżdżonych strukturach.

Pokazuję w pracy [H5], że wyniki opisane powyżej są niezależne od czasu i cechowania. Ciekawe jest zestawienie ich ze stwierdzeniami Ishibashi i Walda z [15]. Autorzy odrzucają w tej pracy pomysł, by backreaction mogło wyjaśnić przyspieszoną ekspansję Wszechświata, argumentując następująco: “*Wskazujemy, że nasz Wszechświat wydaje się być bardzo dobrze opisany na wszystkich skalach przez newtonowską perturbację modelu FLRW. (Jest to w pełni zgodne z faktem, że na codzień spotykamy [kontrast gęstości] $\delta\rho/\rho > 10^{30}$.) Jeśli Wszechświat jest dobrze opisany przez zaburzoną newtonowsko metrykę FLRW, to efekty backreaction niejednorodności w dynamice Wszechświata są zaniedbywalne.*” Oczywiście model-zabawka z pracy [H5] pokazuje, że sam fakt, iż niejednorodności na wszystkich skalach dają się opisać przez zaburzenia newtonowskie nie gwarantuje, że całkowite backreaction jest zaniedbywalne. Aby oszacować nieliniowe efekty gruboziarnistego uśredniania potrzebne jest bardziej subtelne podejście, w którym uwzględnia się głębokości struktury kosmologicznej. Paradoksalne własności opisanego wyżej modelu ilustrują też fundamentalną różnicę między gruboziarnistym uśrednianiem zagnieżdżonych struktur multiskalowych a niejednorodnościami o jednej, zadanej skali, takimi jak w pracach [H2-H4].

Pracę [H5] zacytował Buchert i współpracownicy w artykule [20] jako przykład sytuacji, w której formalizm Greena-Walda nie ma zastosowania. Została ona także dostrzeżona przez innych autorów

M. Korzyński

piszących o efektach backreaction w niejednorodnych modelach Wszechświata [25, 74, 32], a także w pracy przeglądowej MacCalluma [75].

Główne wyniki pracy [H5] można podsumować następująco:

- W zagnieżdżonych strukturach, w których zagęszczenia o zadanej skali zawierają w sobie mniejsze struktury, całkowity efekt backreaction ma formę sumy wkładów ze wszystkich skal pośrednich od skali najdrobniejszych struktur do skali jednorodności.
- Wielkość tych wkładów jest proporcjonalna do bezwymiarowego parametru zwartości ε każdej ze struktur o zadanej skali. Jeśli ε jest małe, to struktury te da się opisać przybliżeniem newtonowskim przynajmniej tak długo, dopóki *rozpatrujemy je oddzielnie, nie biorąc pod uwagę reszty rozwiązania*. Ich efekty backreaction są więc małe. Jednak jeśli stopień zagnieżdżenia jest odpowiednio duży, to całkowity efekt backreaction może się okazać znaczny, bo małe wkłady zsumują się do dużej wielkości. Może tak się zdarzyć nawet wtedy, kiedy na każdej skali niejednorodności są słabo relatywistyczne. W przedstawionym, kwazi-fraktalnym rozwiązaniu każdy fragment jest izometryczny (identyczny) z pomniejszoną kopią rozwiązania odpowiadającego bardzo słabo relatywistycznej kuli pyłu. Duży efekt backreaction jest więc efektem emergentnym i globalnym, nie da się go wyjaśnić lokalną obecnością silnych pól grawitacyjnych.
- W pierwszym rzędzie rozwinięcia w ε efekt backreaction jest proporcjonalny do iloczynu ε i głębokości struktury D . Ten drugi parametr jest więc istotny przy opisywaniu zagnieżdżonych rozkładów materii.
- Problem backreaction w zagnieżdżonych strukturach można badać metodą perturbacyjną stosowaną wraz z metodami grupy renormalizacji.

4.9 Praca [H6] – ewolucja sieci czarnych dziur wzdłuż krzywych o lokalnej, dyskretnej symetrii obrotowej i odbiciowej

Praca [H6] to reakcja na publikację Cliftona, Gregorisa i Tavakola z 2013 roku [56], w której autorzy zaproponowali sposób na zbadanie ewolucji czasowej regularnych sieci czarnych dziur na S^3 . Pomysł polegał na zbadaniu równań Einsteina wzdłuż pewnych wyróżnionych krzywych na powierzchniach stałego czasu. Tymi krzywymi są osie dyskretnej symetrii obrotowych rozwiązania, czyli obrotów tworzących dyskretną podgrupę pełnej grupy $U(1)$. Ponadto rozwiązanie jest symetryczne ze względu na odbicia względem niektórych hiperpłaszczyzn zawierających te osie. W pracy [56] autorzy wyprowadzają próżniowe równania Einsteina wzdłuż krzywych o dyskretnej symetrii obrotowej i odbiciowej (curves of local discrete rotational and reflection symmetry, LDRRS). Według autorów próżniowe równania Einsteina w punktach należących do krzywych LDRRS zupełnie odprzegają się od reszty rozwiązania. Okazuje się bowiem, że sprowadzają się one do lokalnych układów równań różniczkowych zwyczajnych (od tej pory równań CGRT) gdy wyrazimy je we współrzędnych gaussowskich. Co więcej, otrzymany układ równań daje się rozwiązać przez kwadratury. Można więc śledzić ewolucję czasową tych modeli dla dowolnie dużych czasów przy użyciu komputera typu desktop wzdłuż stosunkowo dużej rodziny specjalnych krzywych. Nie jest też trudno zbadać własności optyczne takich sieci wzdłuż krzywych LDRRS, np. zależności przesunięcia ku czerwieni i odległości jasnościowej dla obserwatorów i obiektów leżących na takiej krzywej. Oczywiście taki wynik, gdyby okazał się prawdziwy, ogromnie uprościłby numeryczne badanie sieci czarnych dziur.

W tym samym okresie moi współpracownicy E. Bentivegna i I. Hinder testowali kod do śledzenia geodezyjnych zerowych i rozwiązywania równań optycznych wzdłuż nich podczas numerycznych symulacji na klastrach komputerowych. Jako jeden z testowanych przypadków wybraliśmy regularne sieci czarnych dziur na S^3 . Dostyć szybko dostrzegliśmy rozbieżność między wynikami pełnych symulacji numerycznych a tymi, które otrzymaliśmy rozwiązując równania CGRT. Po dłuższym czasie wykluczaliśmy możliwość błędów w naszym kodzie i przyjrzeliliśmy się bliżej równaniom CGRT. Postanowiliśmy je wyprowadzić z równań ADM (autorzy [56] korzystają w swojej pracy z mniej znanego sformułowania równań Einsteina van Elsta i Ugglia [76], opartego na reperach ortonormalnych).

Po kilku tygodniach skomplikowanych manipulacji równaniami nabraliśmy pewności, że wynik CGRT jest błędny. Autorzy nałożyli warunki krzywej LDRRS na wszystkie obiekty geometryczne i pokazali, że wielkości wektorowe i tensorowe muszą przyjmować specjalną postać. Ponadto ze względu na symetrię odbiciową rotacja dowolnej wielkości tensorowej musi zniknąć wzdłuż krzywej LDRRS. Aby wyprowadzić równania CGRT musimy zróżniczkować po czasie równania ADM i wyprowadzić równanie na pochodną po czasie trójwymiarowego tensora Ricciego. Otrzymane równanie, razem z oryginalnymi równaniami

ADM zredukowanymi przez warunki krzywej LDRRS, tworzą zamknięty układ równań różniczkowych zwyczajnych poza jednym wyrazem. Wyraz ten jest proporcjonalny do rotacji magnetycznej części tensora Weyla H_{ij} . Nie posiada on swojego niezależnego równania ewolucji w tym rzędzie pochodnej metryki po czasie. Clifton i współpracownicy argumentują, że ze względu na symetrię odbiciową wyraz ten musi zniknąć. Nie jest to jednak prawda, gdyż H_{ij} nie jest tensorem, a pseudotensorem, obiektem o innej parzystości, otrzymanym przez zwięźenie tensora Weyla z formą objętości. H_{ij} można też wyrazić jako rotację tensora krzywizny zewnętrznej. O ile rotacja tensora faktycznie musi zniknąć wzdłuż krzywej LDRRS, o tyle rotacja rotacji tensora wcale nie musi. Sprawiający kłopoty wyraz nie znika więc tożsamościowo, a równania CGRT nie domykają się.

Co ciekawe, dodatkowy człon znika wraz z dwiema pierwszymi pochodnymi dla użytych przez nas czasowo symetrycznych danych początkowych. W związku z tym różnica między prawdziwym rozwiązaniem a rozwiązaniem równań CGRT narasta bardzo powoli, jak t^6 . Aby potwierdzić naszą hipotezę, że magnetyczna część tensora Weyla ma wpływ na ewolucję metryki wzdłuż krzywej LDRRS porównaliśmy w symulacjach anomalie w równaniach CGRT z wartością rotacji tensora Weyla. Uzyskaliśmy dobrą zgodność. Ponadto obliczyliśmy ściśle wyrażenie na pierwszą nieznikającą pochodną dodatkowego członu dla naszych danych początkowych i porównaliśmy z numerycznie obliczoną pochodną z rozwiązania numerycznego⁴. Wartości również zgodziły się w ramach błędu numerycznego.

Główne wyniki pracy [H6] można podsumować następująco:

- Pełne równania Einsteina wzdłuż krzywych LDRRS sprowadzają się do układu równań różniczkowych zwyczajnych zawierających w ogólności rotację magnetycznego tensora Weyla H_{ij} . Nie musi ona zniknąć wzdłuż takiej krzywej, jak sugerowano w [56], a więc równania nie domykają się.
- W przypadku modelu sieci z ośmioma czarnymi dziurami z pracy [H2] magnetyczny tensor Weyla znika dla danych początkowych i różnica między rozwiązaniem właściwym a rozwiązaniem uproszczonego układu CGRT z rotacją tensora Weyla przyrównaną do 0 narasta tylko jak t^6 dla małych czasów.
- Mimo to nie da się nic wnioskować o zachowaniu takich modeli dla dużych czasów bez pełnych numerycznych symulacji 3+1.

4.10 Podsumowanie i propozycje przyszłych kierunków badań

Prace [H1-H6], pomimo bardzo odmiennych metod, reprezentują różne podejścia do tego samego problemu backreaction i kwestii gruboziarnistego uśredniania w OTW. Są też głosami w dziesięcioletniej już debacie o efektach gruboziarnistego uśredniania w kosmologii. Prace [H4] i [H5] są prawdopodobnie najważniejsze z całego cyklu ze względu na wagę wyników i nowatorskie metody matematyczne zastosowane w nich. Obie dotyczą fundamentalnych kwestii związanych ze stosowaniem równań Einsteina do bardzo niejednorodnych rozkładów materii. Praca [H4] wyjaśnia pojęcie granicy kontinuum i przybliżenia pyłu w OTW i wprowadza do problemu ściśle metody matematyczne. Pokazuje jak „najlepiej dopasowana” metryka FLRW pojawia się w naturalny, choć nieco skomplikowany sposób w granicy kontinuum, ilustrując możliwe rozwiązanie „fitting problem” Ellisa i Stoegera. Omówiony przykład jest bardziej precyzyjną ilustracją skąd bierze się w OTW wygładzona metryka efektywna niż przykład kulki z łożyska z pracy Greena i Walda [17] (został on z resztą dostrzeżony w tej pracy i następnych). Wyjaśnia również, że backreaction w formie poprawki do efektywnej masy jest czymś niezależnym od problemu istnienia granicy kontinuum lub „najlepszego dopasowania” metryki FLRW. W pracy [H5] z kolei pokazałem, że backreaction ma charakter emergentny i kolektywny: pojawia się nawet wtedy, gdy niejednorodności na każdej skali, rozpatrywane w oderwaniu od reszty, są bardzo słabo relatywistyczne.

Badania numeryczne w pracach [H2, H3, H6], choć oparte na bardzo uproszczonych modelach, są istotnym krokiem naprzód w dziedzinie pełnych relatywistycznych numerycznych symulacji niejednorodnych modeli kosmologicznych i tworzenia struktury. Ten rodzaj badań z dużym prawdopodobieństwem zdominuje dziedzinę kosmologii w ciągu najbliższych dekad, dostarczając metod interpretacji coraz dokładniejszych danych obserwacyjnych. Mają one szanse odegrać w kosmologii rolę podobnie doniosłą, jaką odegrały symulacje zderzeń czarnych dziur dla astronomii fal grawitacyjnych. Planuję więc kontynuować współpracę z numerycznymi relatywistami w tej dziedzinie.

Wyniki i metody zaprezentowane w powyższych pracach otwierają nowe kierunki badań w numerycznej i matematycznej OTW. Oczywiście kontynuacją pracy [H4] są uogólnienia wyników do bardziej

⁴Wynik zawierał tysiące członów, więc rachunki zostały wykonane w programie do obliczeń symbolicznych Mathematica. Redukcja wyniku do prostszej postaci przy użyciu rozmaitych tożsamości zajęła parę godzin pracy komputera.

skomplikowanych danych początkowych asymptotycznie płaskich (czasowo symetrycznych, o stałej krzywiznie średniej-CMC lub jeszcze ogólniejszych). W przypadku obu prac [H4-H5] chciałbym rozszerzyć formalizm tak, aby obejmował on też czasową ewolucję danych początkowych i ciśnieniowe efekty back-reaction, podobnie jak w pracy [24], ale przy użyciu ogólniejszych metod.

Wreszcie wyniki pracy [H1] wskazują, że kwazi-lokalne wielkości skonstruowane z geometrii brzegu obszaru uśredniania dają się zastosować do gruboziarnistego uśredniania pełnych równań Einsteina, nie tylko równań ruchu materii.

5 Inne osiągnięcia naukowe

a) Dane bibliometryczne wg. Web of Science (stan z 18 kwietnia 2016)

liczba publikacji: 14 + 1 preprint

h-index (indeks Hirscha): 7

całkowita liczba cytowań: 106

całkowita liczba cytowań bez autocytaowań: 95

całkowity impact factor (suma dwuletnich IF z roku publikacji, dane z 2014 roku użyte do publikacji z 2015): 40.454

b) Inne tematy badań, nie ujęte w cyklu publikacji

Wyniki badań opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora:

- **Normalna konforemna koneksja Cartana.** Jest to temat mojej pracy magisterskiej. Badania wykonałem pod kierownictwem mojego promotora prof. J. Lewandowskiego. Dotyczą one geometrii konforemnej, czyli geometrii rozmaitości wyposażonych w tensor metryczny zadany z dokładnością do przeskalowania w każdym punkcie. Obliczyliśmy prąd Yanga-Millsa normalnej konforemnej koneksji Cartana, czyli uogólnienia koneksji metrycznej znanej z geometrii Riemanna. W wymiarze 4 pokazaliśmy, że prąd, który jest w naturalny sposób niezmiennikiem geometrii konforemnej, znika tożsamościowo z wyjątkiem części proporcjonalnej do tensora Bacha, innego znanego wcześniej niezmiennika [77]. Jak wiadomo, znikanie tensora Bacha jest warunkiem koniecznym by metryka była konforemnie równoważna Einsteinowskiej. Rozpatrzyliśmy potem geometrie o redukowalnej normalnej konforemnej koneksji Cartana w sygnaturze $(-, +, +, +)$, otrzymane z metryk o zerowym wektorze Killinga i typu Pietrowa N , zwane metrykami Feffermana. Znaleźliśmy wszystkie przykłady metryk Feffermana ze znikającym tensorem Bacha [77]. Metryki tego typu interesują matematyków, gdyż dostarczają przykładu metryk o znikającym tensorem Bacha, ale nie będących jednocześnie konforemnie einsteinowskimi, dowodząc w ten sposób konieczności dodatkowego warunku, aby była zadana metryka była konforemnie einsteinowska (nasz przykład nie był jednak pierwszy w literaturze przedmiotu, patrz [78]).
- **Izolowane i dynamiczne horyzonty.** Tematyka mojej pracy doktorskiej. Razem z prof. J. Lewandowskim i T. Pawłowskim uogólniliśmy pojęcie izolowanego horyzontu na dowolny wymiar. Izolowane i dynamiczne horyzonty to uogólnienie pojęcia horyzontu czarnej dziury Schwarzschilda lub Kerra na sytuacje odpowiednio stacjonarne i zależne od czasu. Uogólniliśmy pierwsze prawo termodynamiki czarnych dziur do wyższych wymiarów [79]. Ponadto w standardowym wymiarze i sygnaturze 3+1 wprowadziłem formalizm opisujący geometrię izolowanego lub dynamicznego horyzontu w sposób niezależny od sygnatury, przy użyciu tego samego zespołu zmiennych [80]. To nietrywialne zadanie, gdyż izolowane horyzonty, opisujące brzeg czarnej dziury w równowadze z otoczeniem, są powierzchniami zerowymi, a dynamiczne, opisujące czarne dziury dokonujące akrecji materii lub promieniowania, są przestrzenne. Wprowadziłem również definicję momentu pędu czarnej dziury bez symetrii osiowej [81]. Definicja korzysta z rozkładu konforemnej metryki na metrykę „okrągłej” sfery oraz czynnik konforemny (uniformizacja powierzchni o topologii S^2). Moment pędu określony jest jako kwazi-lokalna wielkość, wartość kanonicznego generatora odpowiednio zdefiniowanych obrotów horyzontu.
- **Krzywe rotacji w relatywistycznych modelach galaktyk.** W 2005 roku napisałem pierwszą pracę wskazującą błąd w relatywistycznym modelu galaktyki zaproponowanym przez Cooperstocka i Tieu [82]. Model wywołał sporo kontrowersji wśród badaczy pracujących nad mechaniką galaktyk i

ciemną materią. Miał on wyjaśniać płaskie krzywe rotacji galaktyk przez poprawki relatywistyczne w układach grawitacyjnie związanych, bez odwoływania się do ciemnej materii. Pokazałem w pracy [83], że zaproponowany przez nich model zawiera cienki dysk egzotycznej materii, który modyfikuje krzywe rotacji. Wskazałem tym samym, że model jest błędny. Oryginalna praca Cooperstocka i Tieu nie została opublikowana, a więc moja polemiczna praca również nie. Wynik ukazał się potem w pracy pokonferencyjnej [84].

Badania prowadzone lub opublikowane po otrzymaniu stopnia doktora:

- **Model depresji synaptycznej Tsodyksa-Markrama.** Projekt z dziedziny biologii teoretycznej i neurosciece. We współpracy z J. Mazurkiewicz (J. Jędrzejewską-Szmek) i J. Zygierewiczem opracowałem sposób regularyzacji równań różniczkowych zwyczajnych opisujących odpowiedź synapsy na pobudzenie. Projekt dotyczył krótkoterminowej depresji opisanej modelem Tsodyksa-Markrama. Pomogłem znaleźć analityczną formę rozwiązania opisującego odpowiedź na zlokalizowany w czasie bodziec w postaci delty Diraca [85].
- **Równania Einsteina-Własowa: zasada wariacyjna oraz rozwiązania osiowo symetryczne.** We współpracy z matematykami L. Anderssonem, M. Ansorgiem i J. Hennigiem pracowałem nad równaniami Einsteina z materią w postaci bezkolizyjnego pyłu opisywanego relatywistycznym równaniem Własowa. Główne wyniki: wyprowadzenie równań Einsteina-Własowa z zasady wariacyjnej i numeryczne badanie osiowo symetrycznych rozwiązań stacjonarnych (nieopublikowane do tej pory).
- **Numeryczne metody znajdowania izometrycznych zanurzeń powierzchni o topologii S^2 o dodatniej krzywiznie w \mathbb{R}^3 .** We współpracy z M. Jasiulkiem zaproponowaliśmy numeryczną metodę znajdowania izometrycznego zanurzenia powierzchni o dodatniej krzywiznie i topologii S^2 w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej [86]. Wiadomo, że takie zanurzenie istnieje i że jest jedyne z dokładnością do ruchów euklidesowych i odbić [48]. Nasz algorytm oparty jest na dowodzie istnienia zanurzenia Nirenberga [87]. Pozwala na znalezienie zanurzenia o ile powierzchnia nie oddala się za bardzo od okrągłej sfery. Zastosowanie napisanego kodu to wizualizacja rozmaitych powierzchni pojawiających się w numerycznej OTW oraz gruboziarniste uśrednianie ruchu płynu w kosmologii [H1].

c) Nagrody i wyróżnienia

- Projekt *“Nonlinear effects of general relativity in the coarse-graining of inhomogeneous gravitational fields and matter sources”* zakwalifikowany do drugiego etapu konkursu ERC Starting Grant 2015, czyli rozmowy kwalifikacyjnej (panel PE1-matematyka). Otrzymuje ocenę B (brak finansowania).
- Praca [H4] wybrana przez komitet redakcyjny Classical and Quantum Gravity jako CQG Highlight 2013/2014 w dziedzinie kosmologii, czyli jeden z najlepszych artykułów jeśli chodzi o zainteresowanie środowiska, wagę wyników i nowatorskość. Autora poproszono też o napisanie krótkiego wstępu do pracy do strony internetowej CQG Plus.
- Nagroda im. Juliusza Łukasiewicza dla najlepszego ucznia II LO im. Stefana Batorego w dziedzinie nauk ścisłych, 1998
- Trzeci etap polskiej Olimpiady Fizycznej (1997) i Olimpiady Matematycznej (1998) dla uczniów szkół średnich
- Raz druga i dwukrotnie trzecia nagroda w Konkursie Fizycznym Politechniki Warszawskiej dla uczniów szkół średnich (1996-1998)

d) Kierowanie projektami badawczymi

- 2012-2014: Kierownik projektu *“The role of small-scale inhomogeneities in general relativity and cosmology”* Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w ramach programu HOMING PLUS, współfinansowanego przez UE
- 2006: Roczny grant promotorski Ministerstwa Nauki i Informatyzacji dla doktorantów

e) Udział w projektach badawczych

- 2007: Udział w grantie MISTRZ Fundacji na rzecz Nauki Polskiej promotora prof. J. Lewandowskiego

f) Wystąpienia i konferencje

Zaproszone wystąpienia konferencyjne:

- lipiec 2016: 14th Marcel Grossmann Meeting, Rzym. *"Nonlinear effects and coarse-graining in general relativity"* - dwudziestominutowe wystąpienie otwierające sesję równoległą.

Wybór innych konferencji i workshopów

- listopad 2015: Druga konferencja Polskiego Towarzystwa Relatywistycznego POTOR, Warszawa, *"Coarse-graining of the Einstein equations: recent results"*
- lipiec 2014: Pierwsza konferencja POTOR, Spała, *"Nonlinear effects of general relativity from multi-scale structure"*
- marzec 2014: 4th Central European Relativity Seminar, ESI Wiedeń, *"Backreaction and continuum limit in a closed universe filled with black holes"*
- lipiec 2013: GR20/Amaldi 10, Warszawa *"Periodic lattices of black holes as inhomogeneous cosmological models"*
- grudzień 2012: Follow-up workshop "Dynamics in General Relativity: Black Holes and Asymptotics", ESI Wiedeń, *"Black hole lattices on S^3 and on \mathbf{R}^3 : initial data and evolution"*
- luty 2012: Warsztaty relatywistyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim, Kraków, wystąpienie o modelu ośmiu czarnych dziur na S^3
- lipiec 2011: Warsztaty relatywistyczne ESI, Wiedeń, współpraca z relatywistami z innych ośrodków, w tym Eloisą Bentivegną and Larsem Anderssonem
- wrzesień 2010: Warsztaty relatywistyczne w Edynburgu, 45-minutowe wystąpienie o gruboziarnistym uśrednianiu ruchu pyłu w OTW
- lipiec 2009: 12th Marcel Grossman Meeting, Paryż. Dwunastominutowe wystąpienie o gruboziarnistym uśrednianiu ruchu pyłu w OTW
- czerwiec 2009: Invisible Universe 2009, UNESCO Paris. Piętnastominutowe wystąpienie o gruboziarnistym uśrednianiu ruchu pyłu w OTW
- marzec 2009: 49th Kraków School of Theoretical Physics, Zakopane, marzec 2009. 45-minutowe wystąpienie o gruboziarnistym uśrednianiu ruchu pyłu w OTW
- lipiec 2006: 11th Marcel Grossmann Meeting, Berlin. Wystąpienie o izolowanych i dynamicznych horyzontach
- lipiec 2006: IRGAC 2006, Barcelona. 2nd International Conference on Quantum Theories and Renormalization Group in Gravity and Cosmology. Wystąpienie o modelu galaktyk Cooperstocka-Tieu
- czerwiec 2003: Konferencja "Gravitation: A Decennial Perspective", Center for Gravitational Physics and Geometry, PennState University, State College PA, USA. Trzydziestominutowe wystąpienie o wynikach pracy magisterskiej
- wrzesień 2002: Astro-Particle Physics Workshop podczas polsko-niemieckiej letniej akademii studenckiej w Krzyżowej. Godzinne wystąpienie o supernowej i neutrinach ze studentką Sylwią Lewicką.

Zaproszone wykłady na seminariach (wybór):

- Liczne wykłady na Seminarium Teorii Względności Wydziału Fizyki UW, w tym: kwiecień 2016: *"Backreaction and continuum limit in a closed universe filled with black holes"*

- październik 2009: seminarium kosmologiczne Instytutu Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu w Heidelbergu, „*Covariant coarse-graining of Einstein equations and the backreaction problem in cosmology*”
- październik 2013: Obserwatorium Astronomiczne UJ, Kraków, „*Numerical evolution of regular black hole lattices*”
- październik 2013: Instytut Fizyki UJ, Kraków, „*Backreaction and continuum limit in a closed universe filled with black holes*”
- kwiecień 2014: Max Planck Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute), Poczdam, „*Nonlinear effects of general relativity from multi-scale structure*”
- luty 2015: Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon, „*Non-linear effects and coarse-graining in general relativity*”
- maj 2015: Uniwersytet w Helsinkach, Wydział Fizyki, Zakład Fizyki Cząstek i Astrofizyki, „*Non-linear effects and coarse-graining in general relativity*”
- październik 2015: Instytut Fizyki UJ, Kraków, „*Nonlinear effects and coarse-graining in general relativity*”

g) Współpraca naukowa krajowa oraz zagraniczna

- 2001: Studencki projekt naukowy z prof. J. Stepaniak z Instytutu Problemów Jądrowych w Warszawie, w ramach współpracy VASA w dziedzinie fizyki wysokich energii i cyklotronów (The Svedberg Laboratory, Uppsala, Szwecja). Napisanie kodu do analizy danych w czasie kalibrowania detektorów
- 2010–: współpraca z numerycznymi relatywistami Eloizą Bentivegną (Max Planck Institute for Gravitational Physics, Poczdam i Uniwersytet w Katanii) oraz I. Hinderem (Max Planck Institute for Gravitational Physics, Poczdam) w dziedzinie niejednorodnych modeli kosmologicznych, a zwłaszcza sieci czarnych dziur i ich własności optycznych. Publikacje [H2, H3, H6] powstałe w wyniku tej współpracy stanowią część prezentowanego cyklu
- 2007–2008: Współpraca z biofizykami J. Jędrzejewską-Szmek (Mazurkiewicz) i J. Żygierewiczem z Uniwersytetu Warszawskiego, projekt na temat biologii teoretycznej
- 2008–2010: Współpraca z L. Anderssonem, M. Ansorgiem, J. Hennigiem (Max Planck Institute for Gravitational Physics, Poczdam) and G. Reinem (Uniwersytet w Bayreuth, Niemcy), praca nad równaniami Einsteina z bezkolizyjnymi równaniami ruchu materii Własowa

Literatura

- [1] Richard A. Isaacson. Gravitational radiation in the limit of high frequency. I. The linear approximation and geometrical optics. *Physical Review*, 166(5):1263, 1968.
- [2] Richard A. Isaacson. Gravitational radiation in the limit of high frequency. II. Non-linear terms and the effective stress tensor. *Physical Review*, 166(5):1272, 1968.
- [3] G.F.R. Ellis and W. Stoeger. The ‘fitting problem’ in cosmology. *Class. Quantum Grav.*, 4:1697–1729, 1987.
- [4] Chris Clarkson, G.F.R. Ellis, Julien Larena, and Umeh Obinna. Does the growth of structure affect our dynamical models of the universe? the averaging, backreaction, and fitting problems in cosmology. *Rep. Prog. Phys.*, 74:112901, 2011.
- [5] Syksy Rasanen. Light propagation in statistically homogeneous and isotropic dust universes. *JCAP*, 0902:011, 2009.
- [6] Syksy Rasanen. Light propagation in statistically homogeneous and isotropic universes with general matter content. *JCAP*, 1003:018, 2010.

- [7] Andrzej Krasinski and Krzysztof Bolejko. Exact Inhomogeneous Models and the Drift of Light Rays Induced by Nonsymmetric Flow of the Cosmic Medium. In *Proceedings, 13th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG13)*, pages 922–934, 2015.
- [8] Andrzej Krasinski and Krzysztof Bolejko. Drift of Light Rays Induced by Nonsymmetric Cosmic Flow: an observational test of homogeneity of the Universe + a few general comments on inhomogeneous models. In *Proceedings, 13th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG13)*, 2012. [Int. J. Mod. Phys.D22,0013(2013)].
- [9] Krzysztof Bolejko and Pedro G. Ferreira. Ricci focusing, shearing, and the expansion rate in an almost homogeneous Universe. *JCAP*, 1205:003, 2012.
- [10] Roustam Zalaletdinov. The Averaging Problem in Cosmology and Macroscopic Gravity. *Int.J.Mod.Phys.*, A23:1173–1181, 2008.
- [11] Johan Brannlund, Robert van den Hoogen, and Alan Coley. Averaging geometrical objects on a differentiable manifold. *Int.J.Mod.Phys.*, D19:1915–1923, 2010.
- [12] Timothy Clifton, Kjell Rosquist, and Reza Tavakol. An Exact quantification of backreaction in relativistic cosmology. *Phys. Rev.*, D86:043506, 2012.
- [13] Thomas Buchert. Dark Energy from Structure: A Status Report. *Gen.Rel.Grav.*, 40:467–527, 2008.
- [14] Syksy Rasanen. Dark energy from backreaction. *JCAP*, 0402:003, 2004.
- [15] Akihiro Ishibashi and Robert M. Wald. Can the acceleration of our universe be explained by the effects of inhomogeneities? *Class.Quant.Grav.*, 23:235–250, 2006.
- [16] Stephen R. Green and Robert M. Wald. A new framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology. *Phys.Rev.*, D83:084020, 2011.
- [17] Stephen R. Green and Robert M. Wald. How well is our universe described by an FLRW model? *Class.Quant.Grav.*, 31:234003, 2014.
- [18] Andrzej Krasinski. Accelerating expansion or inhomogeneity? a comparison of the Λ CDM and lemaître-tolman models. *Phys. Rev. D*, 89:023520, Jan 2014.
- [19] Andrzej Krasinski. Accelerating expansion or inhomogeneity? II. Mimicking acceleration with the energy function in the Lemaître-Tolman model. *Phys. Rev.*, D90(2):023524, 2014.
- [20] T. Buchert et al. Is there proof that backreaction of inhomogeneities is irrelevant in cosmology? 2015.
- [21] Stephen R. Green and Robert M. Wald. Comments on Backreaction. 2015.
- [22] Stephen R. Green and Robert M. Wald. A Simple, Heuristic Derivation of our "No Backreaction" Results. 2016.
- [23] Gregory A. Burnett. The high-frequency limit in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 30(1):90–96, 1989.
- [24] Daniel Baumann, Alberto Nicolis, Leonardo Senatore, and Matias Zaldarriaga. Cosmological Non-Linearities as an Effective Fluid. *JCAP*, 1207:051, 2012.
- [25] Viraj A. A. Sanghai and Timothy Clifton. Post-Newtonian Cosmological Modelling. *Phys. Rev.*, D91:103532, 2015.
- [26] Stephen R. Green and Robert M. Wald. Examples of backreaction of small scale inhomogeneities in cosmology. *Phys. Rev.*, D87(12):124037, 2013.
- [27] Krzysztof Bolejko, Marie-Noelle Celerier, and Andrzej Krasinski. Inhomogeneous cosmological models: Exact solutions and their applications. *Class. Quant. Grav.*, 28:164002, 2011.

- [28] Andrzej Krasiński. *Inhomogeneous Cosmological Models*. Cambridge University Press, 1997. Cambridge Books Online.
- [29] Roberto A. Sussman. Scalar Averaging in Szekeres Models. *Springer Proc. Phys.*, 157:407–414, 2014.
- [30] Roberto A. Sussman. Back-reaction and effective acceleration in generic LTB dust models. *Class. Quant. Grav.*, 28:235002, 2011.
- [31] Sebastian J. Szybka. On light propagation in Swiss-Cheese cosmologies. *Phys. Rev.*, D84:044011, 2011.
- [32] Mikko Lavinto and Syksy Rasanen. CMB seen through random Swiss Cheese. *JCAP*, 1510(10):057, 2015.
- [33] Krzysztof Bolejko and Marie-Noelle Celerier. Szekeres Swiss-Cheese model and supernova observations. *Phys. Rev.*, D82:103510, 2010.
- [34] Ulrich Sperhake. The numerical relativity breakthrough for binary black holes. *Class. Quant. Grav.*, 32(12):124011, 2015.
- [35] Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Carlos Herdeiro, and Ulrich Sperhake. Exploring New Physics Frontiers Through Numerical Relativity. *Living Rev. Relativity*, 18:1, 2015.
- [36] A. Lichnerowicz. L'integration des équations de la gravitation relativiste et le probleme des n corps. *J. Math. Pures Appl.*, 23(37), 1944.
- [37] Jr. York, James W. Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem. *Phys. Rev. Lett.*, 26:1656–1658, 1971.
- [38] Richard W. Lindquist and John A. Wheeler. Dynamics of a lattice universe by the schwarzschild-cell method. *Rev. Mod. Phys.*, 29(3):432–443, Jul 1957.
- [39] John Wheeler. The geometrostatic lattice cell. *Foundations of Physics*, 13:161–173, 1983. 10.1007/BF01889418.
- [40] Richard Schoen and Shing Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76, 1979.
- [41] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Comm. Math. Phys.*, 80(3):381–402, 1981.
- [42] Sergio Dain. Geometric inequalities for black holes. *Gen. Rel. Grav.*, 46:1715, 2014.
- [43] Timothy Clifton and Pedro G. Ferreira. Archipelagian Cosmology: Dynamics and Observables in a Universe with Discretized Matter Content. *Phys. Rev. D*, 80:103503, 2009.
- [44] Jean-Philippe Bruneton and Julien Larena. Dynamics of a lattice universe: the dust approximation in cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 29(15):155001, 2012.
- [45] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, and Kane O'Donnell. An Improved Treatment of Optics in the Lindquist-Wheeler Models. *Phys. Rev.*, D85:023502, 2012.
- [46] Frans Pretorius. Evolution of binary black hole spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, 95:121101, 2005.
- [47] László B. Szabados. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in gr: A review article. *Living Reviews in Relativity*, 7(4):10, 2004.
- [48] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 5. Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [49] Mikołaj Korzyński. Coarse-graining of inhomogeneous dust flow in General Relativity via isometric embeddings. *AIP Conf. Proc.*, 1241:973–980, 2010.
- [50] Niall Ó Murchadha and James W. York. Existence and uniqueness of solutions of the hamiltonian constraint of general relativity on compact manifolds. *Journal of Mathematical Physics*, 14(11):1551–1557, 1973.

- [51] Frank Löffler, Joshua Faber, Eloisa Bentivegna, Tanja Bode, Peter Diener, Roland Haas, Ian Hinder, Bruno C. Mundim, Christian D. Ott, Erik Schnetter, Gabrielle Allen, Manuela Campanelli, and Pablo Laguna. The Einstein Toolkit: A Community Computational Infrastructure for Relativistic Astrophysics. *Class. Quantum Grav.*, 29(11):115001, 2012.
- [52] Lee Lindblom, Bela Szilagyi, and Nicholas W. Taylor. Solving Einstein's equation numerically on manifolds with arbitrary spatial topologies. *Phys. Rev.*, D89(4):044044, 2014.
- [53] Miguel Alcubierre, Bernd Bruegmann, Peter Diener, Michael Koppitz, Denis Pollney, Edward Seidel, and Ryoji Takahashi. Gauge conditions for long term numerical black hole evolutions without excision. *Phys. Rev.*, D67:084023, 2003.
- [54] Chul-Moon Yoo, Hirotada Okawa, and Ken-ichi Nakao. Black Hole Universe: Time Evolution. *Phys.Rev.Lett.*, 111:161102, 2013.
- [55] Chul-Moon Yoo and Hirotada Okawa. Black hole universe with a cosmological constant. *Phys. Rev.*, D89(12):123502, 2014.
- [56] Timothy Clifton, Daniele Gregoris, Kjell Rosquist, and Reza Tavakol. Exact Evolution of Discrete Relativistic Cosmological Models. *JCAP*, 11:010, 2013.
- [57] Timothy Clifton, Daniele Gregoris, and Kjell Rosquist. Applications of black hole lattices in relativistic cosmology. *AIP Conf. Proc.*, 1693:070006, 2015.
- [58] Rex G. Liu and Ruth M. Williams. Regge calculus models of closed lattice universes. *Phys. Rev.*, D93(2):023502, 2016.
- [59] Lars Andersson. Cosmological models and stability. *Fundam. Theor. Phys.*, 177:277–303, 2014.
- [60] Chul-Moon Yoo, Hiroyuki Abe, Ken-ichi Nakao, and Yohsuke Takamori. Black Hole Universe: Construction and Analysis of Initial Data. *Phys.Rev.*, D86:044027, 2012.
- [61] Eloisa Bentivegna. Solving the Einstein constraints in periodic spaces with a multigrid approach. *Class. Quant. Grav.*, 31:035004, 2014.
- [62] Nigel Bishop, Denis Pollney, and Christian Reisswig. Initial data transients in binary black hole evolutions. *Class. Quant. Grav.*, 28:155019, 2011.
- [63] Art B. Owen. Quasi-monte carlo for integrands with point singularities at unknown locations. In Harald Niederreiter and Denis Talay, editors, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004*, pages 403–417. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [64] I.M. Sobol'. On quasi-monte carlo integrations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 47(2–5):103 – 112, 1998.
- [65] Michael Drmota and Robert F. Tichy. *Sequences, Discrepancies and Applications*. Springer-Verlag, 1997.
- [66] I.M. Sobol. *Mathematics and Computers in Simulations*, 47:103–112, 1998.
- [67] Jürgen Hartinger, Reinhold F. Kainhofer, and Robert F. Tichy. Quasi-monte carlo algorithms for unbounded, weighted integration problems. *Journal of Complexity*, 20(5):654 – 668, 2004. Dagstuhl 2002 - Festschrift for the 70th Birthday of Joseph F. Traub.
- [68] Elise de Doncker and Yuqiang Guan. Error bounds for the integration of singular functions using equidistributed sequences. *Journal of Complexity*, 19(3):259 – 271, 2003. Oberwolfach Special Issue.
- [69] I.M. Sobol'. Calculation of improper integrals using uniformly distributed sequences. *Soviet Mathematics Doklady*, 14:734–738, 1973.
- [70] Timothy Clifton. The Method of Images in Cosmology. *Class.Quant.Grav.*, 31:175010, 2014.
- [71] Rex G. Liu. Lindquist-Wheeler formulation of lattice universes. *Phys. Rev.*, D92(6):063529, 2015.
- [72] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*, chapter 23, page 607. 1973.

- [73] R.M. Wald. *General Relativity*, chapter 6. University of Chicago Press, 2010.
- [74] Sebastian J. Szybka and Michał J. Wyrębowski. Backreaction for Einstein-Rosen waves coupled to a massless scalar field. 2015.
- [75] Malcolm A. H. MacCallum. Milestones of general relativity: Hubble's law (1929) and the expansion of the universe. *Class. Quant. Grav.*, 32(12):124002, 2015.
- [76] Henk van Elst and Claes Uggla. General relativistic 1+3 orthonormal frame approach. *Classical and Quantum Gravity*, 14(9):2673, 1997.
- [77] Mikołaj Korzyński and Jerzy Lewandowski. The Normal conformal Cartan connection and the Bach tensor. *Class. Quant. Grav.*, 20:3745–3764, 2003.
- [78] Paweł Nurowski and Jerzy F Plebański. Non-vacuum twisting type-n metrics. *Classical and Quantum Gravity*, 18(2):341, 2001.
- [79] Mikołaj Korzyński, Jerzy Lewandowski, and Tomasz Pawłowski. Mechanics of multidimensional isolated horizons. *Class. Quant. Grav.*, 22:2001–2016, 2005.
- [80] Mikołaj Korzyński. Isolated and dynamical horizons from a common perspective. *Phys. Rev.*, D74:104029, 2006.
- [81] Mikołaj Korzyński. Quasi-local angular momentum of non-symmetric isolated and dynamical horizons from the conformal decomposition of the metric. *Class. Quant. Grav.*, 24:5935–5944, 2007.
- [82] Fred I. Cooperstock and S. Tieu. General relativity resolves galactic rotation without exotic dark matter. *Submitted to: Astrophys. J.*, 2005.
- [83] Mikołaj Korzyński. Singular disk of matter in the cooperstock and tieu galaxy model. 2005.
- [84] Mikołaj Korzyński. Can dark matter in galaxies be explained by relativistic corrections? *J. Phys.*, A40:7087–7092, 2007.
- [85] J. Mazurkiewicz, J. Żygierewicz, and M. Korzyński. Short term synaptic depression model—analytical solution and analysis. *J. Theor. Biol.*, 254(1):82–88, Sep 2008.
- [86] Michael Jasiulek and Mikołaj Korzyński. Isometric embeddings of 2-spheres by embedding flow for applications in numerical relativity. *Class. Quant. Grav.*, 29:155010, 2012.
- [87] Louis Nirenberg. The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. *Communications on pure and applied mathematics*, 6:337–394, 1953.

M. Korzyński