

TRÓJKI TULCZYJEWA W MECHANICE I TEORII POLA

Autoreferat

(1) imię i nazwisko: **Katarzyna Grabowska**

(2) posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

W latach 1990-1995 odbyłam studia magisterskie na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Dyplom magisterski uzyskałam w sierpniu 1995 r. na podstawie pracy magisterskiej pod tytułem *Niezależne od układu odniesienia sformułowanie mechaniki Newtonowskiej*, napisanej pod kierunkiem dr hab. Pawła Urbańskiego, prof. UW.

W latach 1995-2001 byłam słuchaczką studiów doktoranckich w Katedrze metod Matematycznych Fizyki na wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Stopień doktora uzyskałam w styczniu 2001 r. na podstawie rozprawy doktorskiej pod tytułem *Symetrie i zasady zachowania w teorii pola - aspekt geometryczny*, przygotowanej pod kierunkiem dr hab. Pawła Urbańskiego, prof. UW.

(3) Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

Od 1 marca 2001 jestem zatrudniona na stanowisku adiunkta w Katedrze Metod Matematycznych Fizyki na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego.

(4) Jako osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.) wybieram jednotematyczny cykl sześciu publikacji pod wspólnym tytułem **Trójki Tulczyjewa w mechanice i teorii pola**.

Publikacje składające się na rozprawę

- (1) Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski, Paweł Urbański, *Geometrical Mechanics on algebroids*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **3** (2006), 559-575.
- (2) Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski, P. Urbański, *AV-differential geometry: Euler-Lagrange equations*, J. Geom. Phys., **57** (2007), 1984-1998.
- (3) Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski *Variational calculus with constraints on general algebroids* J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 175204 (25pp).
- (4) Katarzyna Grabowska, *Lagrangian and Hamiltonian formalism in field theory: a simple model*, J. Geom. Mech., **2** (2010), 375-395.
- (5) Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski *Dirac Algebroids in Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, J. Geom. Phys., **61** (2011), 2233-2253.
- (6) Katarzyna Grabowska, *A Tulczyjew triple for classical fields*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 145207.

W powyższych pracach zaproponowane i rozwinięte są nowe metody geometryczne w zakresie mechaniki i klasycznej teorii pola, dotyczące lagranżowskiego i hamiltonowskiego opisu tych teorii. Opierając się na rachunku wariacyjnym w rozumieniu Tulczyjewa, konstruujemy uogólnienia trójki Tulczyjewa, umożliwiające ideowo prosty i jednolity opis bardzo wielu układów fizycznych w rozmaitych konfiguracjach: z więzami i bez więzów, z lagranżjanami regularnymi i singularnymi itp., a także redukcje tych układów względem symetrii. Istotną zaletą tego opisu, odróżniającą go od większości prac w tej dziedzinie, jest jego kompletność: nie ograniczamy się do równań Eulera-Lagrange'a rozumianych jako definiujące punkty krytyczne funkcjonau działania, ale bierzemy pod uwagę również wartości brzegowe, kodujące informację o pędach, oraz konstruujemy odpowiednie przestrzenie i dynamiki fazowe. Podejście to prowadzi do lepszego zrozumienia formalizmów Hamiltona we wszystkich tych sytuacjach.

Nasze prace w dziedzinie mechaniki analitycznej wykorzystują i rozwijają narzędzia związane z pojęciem algebroidu Liego oraz najrozmaitszych jego uogólnień. Przyczyniają się one także do lepszego zrozumienia pojęć i struktur matematycznych, wykorzystywanych w opisie lagranżowskim i hamiltonowskim. Szczególnie istotne okazały się struktury podwójne, takie jak struktura podwójnej wiązki wektorowej, podwójnej wiązki afiniczno-wektorowej i podwójnej wiązki afinicznej. W teorii pola, nasze prace nad wykorzystaniem dwoistości afinicznej otwierają nowe możliwości rozwijania teorii z uwzględnieniem lagranżjanów zależnych od wyższych dżetów pól.

Opis

1. KLASYCZNA TRÓJKA TULCZYJEWA

W tradycyjnym ujęciu mechaniki analitycznej znane są dwa klasyczne sposoby opisu dynamiki układów mechanicznych: lagranżowski i hamiltonowski [1]. Treścią opisu hamiltonowskiego jest wyprowadzenie równań fazowych, tzn. równań na krzywe w przestrzeni pędów badanego układu. Opis lagranżowski, pochodzący od Kleina [19], służy do wyprowadzenia równań Eulera-Lagrange'a w sposób geometryczny, tzn. bez użycia rachunku wariacyjnego, ale z wykorzystaniem naturalnych struktur wiązki kostycznej i wiązki stycznej do różnorodności konfiguracyjnej.

Niech Q oznacza różnorodność konfiguracyjną opisywanego układu. Przy braku więzów, wiązka styczna TQ jest *przestrzenią prędkości*, zaś wiązka kostyczna T^*Q jest *przestrzenią pędów*, nazywaną inaczej *przestrzenią fazową* układu. Opis hamiltonowski związany jest z przestrzenią fazową, zaś opis lagranżowski z przestrzenią prędkości. W dalszym ciągu używać będziemy następującej notacji: τ_Q jest kanoniczną projekcją $\tau_Q : TQ \rightarrow Q$, przyporządkowującą wektorowi stycznemu jego punkt zaczepienia, zaś $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$ jest odpowiednim odwzorowaniem dla wiązki kostycznej. Wiązka kostyczna wyposażona jest w kanoniczną formę symplektyczną ω_Q .

Równanie Eulera-Lagrange bez uwzględnienia sił zewnętrznych dla układu opisywanego lagranżjanem pierwszego rzędu, a więc będącym funkcją na przestrzeni prędkości, jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Może zatem być rozumiane jako podzbiór w przestrzeni T^2Q elementów stycznych drugiego rzędu. Z powodów praktycznych, równanie drugiego rzędu traktujemy często jak szczególnego rodzaju równanie pierwszego rzędu na przestrzeni prędkości. Geometrycznie oznacza to, że przestrzeń elementów stycznych drugiego rzędu T^2Q ma naturalne zanurzenie w iterowaną wiązkę styczną TTQ , przy którym elementy T^2Q identyfikowane są z wektorami TTQ spełniającymi warunek $T\tau_Q(v) = \tau_{TQ}(v)$. Wektory takie noszą nazwę wektorów *holonomicznych*. Innymi słowy,

oczekujemy, że równanie Eulera-Lagrange'a reprezentowane będzie przez pole wektorowe na TQ , którego wartości leżą w zbiorze wektorów holonomicznych.

Treścią lagranżowskiego opisu w mechanice analitycznej jest sposób otrzymywania tego równania z lagranżjanu przy użyciu kanonicznych struktur wiązki stycznej i kostycznej. Z każdym lagranżjanem L , będącym funkcją na wiązce stycznej, związane jest odwzorowanie $\lambda : TQ \rightarrow T^*Q$, zadane przez różniczkę dL liczoną wzdłuż włókna. Obserwujemy mianowicie, że jak w każdej wiązce wektorowej, wektory styczne do włókna T_qQ mogą być identyfikowane z elementami tego włókna. Obcięcie różniczki $dL(v_q)$ do wektorów stycznych do włókna T_qQ w punkcie v_q może więc być identyfikowane z pewnym elementem wiązki dualnej T^*Q . Element ten oznaczamy $\lambda(v_q)$, definiując w ten sposób odwzorowanie λ , nazywane *odwzorowaniem Legendre'a*, a także, nieco na wyrost, *transformacją Legendre'a*.

Tradycyjny formalizm lagranżowski stosować możemy w sytuacji, kiedy otrzymane w powyższy sposób odwzorowanie Legendre'a jest lokalnym dyfeomorfizmem. Mówimy wtedy, że lagranżjan jest *regularny*. Jeszcze wygodniejsza sytuacja ma miejsce, gdy λ jest globalnym dyfeomorfizmem - wtedy lagranżjan nazywa się *hiperregularnym*. Posługując się odwzorowaniem λ , możemy przeciągnąć kanoniczną formę symplektyczną ω_Q z wiązki kostycznej na wiązke styczną, otrzymując formę $\omega_L = \lambda^*\omega_Q$. Jeśli lagranżjan jest regularny, forma ω_L jest symplektyczna, może więc zostać użyta do wygenerowania hamiltonowskiego pola wektorowego z odpowiednio dobranej funkcji. Funkcją tą jest tak zwana funkcja energii $E(v) = \langle \lambda(v), v \rangle - L(v)$. Pole hamiltonowskie X_E pochodzące od tej funkcji, jest poszukiwanym polem wektorowym odpowiadającym równaniu Eulera-Lagrange'a. Oczywiście, sprawdzić trzeba, czy pole to reprezentuje równanie różniczkowe drugiego rzędu, tzn. czy jego obraz leży w zbiorze wektorów holonomicznych. Tradycyjnie sprawdza się to przy pomocy endomorfizmu $S : TTQ \rightarrow TTQ$, który wektorowi X_v , stycznemu do TQ w punkcie v , przyporządkowuje podniesienie pionowe rzutu stycznego $T\tau_Q(X)$ do punktu v . Pole wektorowe X na TQ reprezentuje równanie różniczkowe drugiego rzędu, jeśli $S(X(v)) = \nabla(v)$, gdzie $\nabla(v)$ jest wartością pola Liouville'a w punkcie v , a więc pionowym podniesieniem wektora v do punktu v . Zarówno S jak i ∇ są kanonicznie zdefiniowane na wiązce stycznej. Wadą takiego sposobu otrzymywania równania Eulera-Lagrange'a jest to, że może być on zastosowany jedynie dla lagranżjanów regularnych. Nie poddaje się on także łatwemu uogólnianiu w bardziej skomplikowanych przypadkach, na przykład, kiedy przestrzenią konfiguracyjną jest algebroid Liego a nie wiązka styczna. Komplikacje pojawiają się także, gdy mamy do czynienia z układami z więzami.

Treścią hamiltonowskiego sformułowania mechaniki analitycznej jest wyprowadzenie równania różniczkowego pierwszego rzędu na krzywe w przestrzeni fazowej układu. Równanie to jest reprezentowane przez hamiltonowskie pole wektorowe X_H na wiązce kostycznej, odpowiadające hamiltonianowi $H : T^*Q \rightarrow M$. W sytuacji, gdy lagranżjan jest hiperregularny, hamiltonian otrzymać można z funkcji energii E , biorąc $H(p) = E(\lambda^{-1}(p))$. Pokazać można wtedy, że pola wektorowe X_H i X_E są związane poprzez odwzorowanie λ , tzn. $\lambda_*X_E = X_H$. Tradycyjne sformułowanie lagranżowskie mechaniki analitycznej jest więc równoważne hamiltonowskiemu dla układów z lagranżjanem hiperregularnym.

Powyższe tradycyjne sformułowania napotykają na szereg trudności w sytuacji, gdy pod uwagę trzeba wziąć więzy oraz w sytuacji, kiedy układ opisywany jest lagranżjanem, który nie jest regularny. Zauważyć należy, że nawet tak podstawowy układ jak swobodna cząstka relatywistyczna wymaga użycia nieregularnego lagranżjanu. Nie jest także łatwo uwzględnić w takim opisie siły zewnętrzne.

Alternatywny sposób rozumienia mechaniki lagranżowskiej i hamiltonowskiej zaproponowany został przez W. M. Tulczyjewa w serii prac [27, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37] oraz w monografii [38]. Sformułowanie Tulczyjewa jest, z jednej strony, niezwykle proste i eleganckie, a z drugiej, całkowicie ogólne i łatwo rozszerzające się na przypadek algebroidalny. Źródłem pojęć i konstrukcji używanych w teorii Tulczyjewa jest rachunek wariacyjny, a dokładniej jego zastosowanie do układów statycznych. Odpowiednia interpretacja pozwala użyć go także w przypadku dynamiki a nawet teorii pola. Tutaj przedstawimy jedynie niektóre elementy teorii Tulczyjewa, niezbędne z punktu widzenia dalszej prezentacji.

Skoncentrujmy się na początek na najprostszym przypadku autonomicznej mechaniki analitycznej. Przestrzenią fazową, a więc przestrzenią pędów dla układu, którego konfiguracje tworzą rozmaitość Q , jest przestrzeń totalna wiązki kostycznej T^*Q . Przestrzeń prędkości TQ nazywana jest w tym kontekście *przestrzenią konfiguracji infinitezimalnych*. Treścią lagranżowskiego (w ujęciu infinitezimalnym) i hamiltonowskiego opisu układu jest uzyskanie równań różniczkowych opisujących krzywe w przestrzeni fazowej. Niezwykle istotnym narzędziem jest pewien diagram, nazywany *trójką Tulczyjewa*, który koduje pełną informację o strukturach geometrycznych wiązki stycznej i kostycznej. W wersji uproszczonej, diagram ten ma postać

$$(1) \quad T^*T^*Q \xleftarrow{\beta_Q} TT^*Q \xrightarrow{\alpha_Q} T^*TQ .$$

Prawa strona trójki związana jest ze sformułowaniem lagranżowskim. Odwzorowanie α_Q jest odwzorowaniem dualnym do kanonicznej inwolucji $\kappa_Q : TTQ \rightarrow TTQ$, będącej izomorfizmem dwóch różnych struktur wiązki wektorowej, $T\tau_Q$ i τ_{TQ} , istniejących na TTQ . Obie wiązki, T^*TQ i TT^*Q , są *podwójnymi wiązkami wektorowymi*, tzn., podobnie jak TTQ , wyposażone są w dwie zgodne struktury wiązki wektorowej [28, 20, 14]. Odwzorowanie α_Q jest morfizmem podwójnych wiązek wektorowych. Obie wiązki są także wyposażone w kanoniczne struktury symplektyczne. Na T^*TQ jest to struktura ω_{TQ} , jak na każdej wiązce kostycznej. Struktura symplektyczna na TT^*Q jest podniesiona z T^*Q , tzn. jest to $d_T\omega_Q$. Odwzorowanie α_Q zachowuje strukturę symplektyczną, tzn. jest symplektomorfizmem.

Lewa strona trójki związana jest ze sformułowaniem hamiltonowskim. Odwzorowanie β_Q pochodzi od kanonicznej formy symplektycznej ω_Q , dokładniej $\beta_Q(v) = \omega(v, \cdot)$. Odwzorowanie to jest dyfeomorfizmem, morfizmem podwójnych wiązek wektorowych i symplektomorfizmem. Trójka Tulczyjewa uzupełniona o struktury podwójnych wiązek wektorowych ma postać

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} & T^*T^*Q & \xleftarrow{\beta_Q} & TT^*Q & \xrightarrow{\alpha_Q} & T^*TQ \\ \pi_{T^*Q} \swarrow & & & \tau_{T^*Q} \swarrow & & \zeta \swarrow \\ T^*Q & \xleftarrow{\xi} & T^*Q & \xrightarrow{id} & T^*Q & \xrightarrow{\pi_{TQ}} & T^*Q \\ \pi_Q \searrow & & \pi_Q \searrow & & \pi_Q \searrow & & \pi_Q \searrow \\ & TQ & \xleftarrow{id} & TQ & \xrightarrow{id} & TQ & \xrightarrow{id} & TQ \\ \tau_Q \swarrow & & \tau_Q \swarrow & & \tau_Q \swarrow & & \tau_Q \swarrow \\ & Q & \xleftarrow{id} & Q & \xrightarrow{id} & Q & \xrightarrow{id} & Q \end{array}$$

Układ mechaniczny opisywany jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, które może być reprezentowane przez pole wektorowe, ale może także mieć postać uwikłaną, tzn. być innym niż obraz pola wektorowego podzbiorem przestrzeni TT^*Q . Podzbiór ten

nazywać będziemy *dynamiką fazową* i oznaczać \mathcal{D} . W wielu przypadkach dynamika fazowa jest podrozmaitością lagranżowską ze względu na formę symplektyczną $d_{T^*Q}L$. W najprostszym przypadku bez więzów lagranżowskich, gdy układ opisany jest lagranżjaniem $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, dynamikę fazową otrzymujemy jako przeciwobraz $\mathcal{D} = \alpha_Q^{-1}(N_L)$ względem α_Q podrozmaitości lagranżowskiej $N_L = dL(TQ)$, generowanej w T^*TQ przez lagranżjan. Co istotne, nie ma w tym podejściu znaczenia, czy lagranżjan jest regularny czy też nie.

Tę samą dynamikę można wygenerować w sposób hamiltonowski, tzn. jako przeciwobraz względem β_Q pewnej podrozmaitości lagranżowskiej $N_H \subset T^*T^*Q$. Jeśli jednak \mathcal{D} nie jest obrazem pola wektorowego, N_H nie jest obrazem różniczki żadnego hamiltonianu i może być potrzebne użycie obiektu generującego bardziej skomplikowanego niż pojedyncza funkcja na przestrzeni fazowej. Może to być funkcja na podrozmaitości, bądź rodzina funkcji (tzw. *rodzina Morse'a*). Istnieje zawsze ogólna rodzina funkcji na T^*Q , parametryzowana przez punkty TQ , generująca N_H , mianowicie

$$h : T^*Q \times_Q TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(p, v) = \langle p, v \rangle - L(v).$$

W konkretnych przypadkach, rodzina ta może zostać zredukowana i zastąpiona prostszym obiektem generującym. W pracy [41] znaleźć można kilka przykładów układów fizycznych opisywanych nieregularnymi lagranżjanami, dla których znaleziono właściwy opis hamiltonowski. Korzystając ze zdefiniowanej dynamiki $\mathcal{D} \subset TT^*Q$, wyprowadzić można także równania Eulera-Lagrange'a. Są to równania drugiego rzędu, których rozwiązaniami są trajektorie układu, czyli krzywe w Q . Równanie Eulera-Lagrange'a jest więc podzbiorem $E_L \subset T^2Q$. Oznaczając przez $T^2\pi_Q$ kanoniczne rzutowanie $T^2\pi_Q : T^2T^*Q \rightarrow T^2Q$, otrzymujemy

$$E_L = T^2\pi_Q(PD),$$

gdzie $PD = TD \cap T^2T^*Q$. Opis lagranżowskiej mechaniki analitycznej, zaproponowany przez Tulczyjewa, jest nie tylko bardziej ogólny niż tradycyjny, pochodzący od Kleina, ale także ideowo prostszy i zbudowany na solidnych geometrycznych podstawach mających źródło w rachunku wariacyjnym, dzięki czemu dobrze poddaje się dalszym uogólnieniom.

Treścią prezentowanej rozprawy habilitacyjnej są konstrukcje trójki Tulczyjewa w sytuacjach bardziej ogólnych niż opisana powyżej.

W pracy (1) zawarta jest konstrukcja trójki Tulczyjewa związanej ze sformułowaniem mechaniki na algebroidach, zaś w pracy (3) omawiamy rachunek wariacyjny, który leży u podstaw tej trójki oraz dyskutujemy układy z różnego rodzaju więzami.

W wielu przypadkach, w mechanice klasycznej okazuje się, że opis niezależny od układu odniesienia wymaga użycia struktur afinicznych. Jest tak nawet w nieskomplikowanym, wydawałoby się, przypadku jednej cząstki w czasoprzestrzeni Newtona. W pracy (2) konstruujemy afiniczny odpowiednik trójki Tulczyjewa. Wymaga to stworzenia afinicznej wersji geometrii różniczkowej, w której funkcje na rozmaitości zastąpione są przez cięcia jednowymiarowych wiązek afinicznych.

W pracy (5) zdefiniowane jest pojęcie algebroidu Diraca, umożliwiające skonstruowanie trójki Tulczyjewa w sposób, który pozwala na zawarcie w ramach jednego formalizmu układów bez więzów i układów z więzami nieholonomicznymi.

Prace (4) i (6) poświęcone są konstrukcji trójki Tulczyjewa w klasycznej teorii pola. W pracy (4) przedstawiono prostszy przypadek, kiedy pola są odwzorowaniami z \mathbb{R}^n w pewną rozmaitość M , zaś w pracy (6) opisano przypadek ogólny, gdy pola są cięciami pewnego rozwłóknienia. Przypadek ogólny także wymaga użycia geometrii afinicznej. W dalszym ciągu bardziej szczegółowo przedstawimy wyniki zawarte w poszczególnych pracach.

2. REDUKCJE LAGRANŻOWSKIE, CZYLI MECHANIKA NA ALGEBROIDACH

W pracy [46] Weinstein postawił problem znalezienia opisu mechaniki analitycznej (mając na myśli geometryczne wyprowadzenie równań typu Eulera-Lagrange'a) w sytuacji, kiedy lagranżjan jest funkcją na ogólnym algebroidzie Liego. Potrzeba skonstruowania mechaniki opartej na strukturze algebroidu wynika z faktu, iż redukcja układu lagranżowskiego względem pewnego rodzaju symetrii zazwyczaj wyprowadza nas z dobrze znanego środowiska wiązki stycznnej. Jest to lagranżowski odpowiednik lepiej znanej redukcji układów hamiltonowskich, która prowadzi do ogólnych, niesymplektycznych nawiasów Poissona. Najbardziej znanym przykładem takiej sytuacji jest mechanika bryły sztywnej. Przestrzenią konfiguracyjną jest tu grupa $SO(3)$. Ponieważ swobodny lagranżjan $L : TSO(3) \rightarrow \mathbb{R}$ nie zależy *de facto* od położenia na grupie, po redukcji otrzymujemy układ na algebrze Liego $\mathfrak{so}(3)$ tej grupy, która jest przykładem algebroidu Liego.

Zgodnie z tradycyjną definicją, *algebroidem Liego* nazywamy wiązkę wektorową $\tau : E \rightarrow M$ wyposażoną w nawias Liego $[\cdot, \cdot]$ określony na cięciach tej wiązki. Dodatkowym elementem struktury jest odwzorowanie kotwicy $\rho : E \rightarrow TM$, będące morfizmem wiązek wektorowych nad identycznością na M , przeprowadzające nawias cięć w nawias Liego pól wektorowych i spełniające warunek

$$[X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y$$

dla dowolnych cięć X, Y wiązki τ i funkcji $f \in C^\infty(M)$. Podstawowymi przykładami algebroidów Liego są wiązka stycznna TM z nawiasem Liego pól wektorowych i identycznością w roli kotwicy oraz algebra Liego \mathfrak{g} grupy Liego, traktowana jako wiązka nad jednopunktową rozmaitością z zerową kotwicą. Innym znanym przykładem jest tzw. algebroid Atiyah'a związany z wiązką główną i teorią cechowania.

Problem postawiony przez Weinsteina (i, w pewnym zakresie, przez Libermann [21]) został podjęty przez wielu matematyków i fizyków. Na uwagę zasługują szczególnie prace Martíneza [23, 24, 25], w których przedstawił on interesującą wersję mechaniki lagranżowskiej. Wersja ta, oparta na metodzie Kleina, wymagała jednak użycia skomplikowanych obiektów geometrycznych, w szczególności zastąpienia algebroidu Liego i wiązki do niego dualnej przez ich prolongacje. Formalizm Kleina wykorzystuje bowiem dodatkowe struktury charakterystyczne dla wiązki stycznnej, takie jak kanoniczny endomorfizm S , których nie ma na dowolnym algebroidzie Liego.

W pracy [15] przedstawiona jest alternatywna definicja algebroidu Liego oraz pewne jej uogólnienie nazywane *ogólnym algebroidem*. Okazuje się bowiem, że struktura algebroidu Liego na wiązce E może zostać zakodowana w pewnym morfizmie podwójnych wiązek wektorowych $\varepsilon : T^*E \rightarrow TE^*$, działającym nad identycznością na E^* . Odpowiedni diagram, uwzględniający strukturę podwójnej wiązki wektorowej, ma postać

$$\begin{array}{ccccc}
 T^*E & \xrightarrow{\varepsilon} & TE^* & & \\
 \pi_E \searrow & & \tau_{E^*} \searrow & & \tau_\pi \searrow \\
 & E & \xrightarrow{\rho} & TM & \\
 T^*\tau \swarrow & \tau \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
 E^* & \xrightarrow{id} & E^* & & \\
 \pi \searrow & & \pi \searrow & & \tau_M \searrow \\
 & M & \xrightarrow{id} & M &
 \end{array}$$

Odwzorowanie ρ w powyższym diagramie pełni rolę kotwicy. Struktura algebroidu Liego na wiązce $\tau : E \rightarrow M$ zadaje jednoznacznie liniową strukturę Poissona Λ na wiązce dualnej $\pi : E \rightarrow M$. Używając alternatywnej definicji, uzyskujemy tę strukturę składając ε z kanonicznym izomorfizmem $\mathcal{R}_E : T^*E^* \rightarrow TE^*$, tzn. definiujemy odwzorowanie $\tilde{\Lambda} = \varepsilon \circ \mathcal{R}_E$. Dowolny morfizm podwójnych wiązek wektorowych ε nad identycznością na E^* zadaje na wiązce τ strukturę ogólnego algebroidu. Algebroid ten nazywany *skosnym*, jeśli odpowiednie odwzorowanie $\tilde{\Lambda}$ związane jest z pewnym polem biwektorowym Λ na E^* . Jeśli, dodatkowo, pole to zadaje strukturę Poissona, to algebroid jest algebroidem Liego. W nowym języku, struktura algebroidu na wiązce stycznej opisana jest nie nawiasem, lecz odwzorowaniem α_M^{-1} , a odpowiednia struktura Poissona (kanoniczna na T^*M) pochodzi od odwzorowania β_M^{-1} . Są to odwzorowania, które odgrywały kluczową rolę w lagranżowskim i hamiltonowskim opisie mechaniki według Tulczyjewa. Pierwsza z prac, (1), stanowiących rozprawę habilitacyjną, poświęcona jest lagranżowskiemu i hamiltonowskiemu opisowi mechaniki na ogólnych algebroidach. Algebroidalna wersja trójki Tulczyjewa ma postać

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} & T^*E^* & \xrightarrow{\tilde{\Lambda}} & TE^* & \xleftarrow{\varepsilon} & T^*E & \xleftarrow{dL} & E \\ & \uparrow \pi_{E^*} & & \uparrow \tau_{E^*} & & \uparrow T^*\tau & & \uparrow \pi_E \\ E^* & & \xrightarrow{\rho} & E & \xrightarrow{\rho} & TM & \xleftarrow{\rho} & E \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & M & \xrightarrow{\quad} & M & \xleftarrow{\quad} & M & & M \end{array}$$

Lagranżjan $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ definiuje podrozmaitość lagranżowską N_L w T^*E , która w przypadku bez więzów jest obrazem różniczki lagranżjanu, $N_L = dL(E)$. Dynamika fazowa $\mathcal{D} = \varepsilon(N_L) \subset TE^*$ może być rozumiana jako inkluzja różniczkowa, będąca warunkiem na krzywe fazowe, tzn. krzywe w E^* . Podobnie jak w przypadku wiązki stycznej, lagranżjan definiuje odwzorowanie Legendre'a, przyporządkowujące pędy nieskończenie małym konfiguracjom:

$$\lambda : E \rightarrow E^*, \quad \lambda(e) = T^*\tau(dL(e)) = \tau_{E^*}(\varepsilon(dL(e))).$$

Analogicznie jak w sytuacji klasycznej, odwzorowanie Legendre'a jest pionową pochodną lagranżjanu.

Hamiltonowska strona trójki Tulczyjewa związana jest z odwzorowaniem $\tilde{\Lambda}$. Podobnie jak w przypadku lagranżowskim, dynamikę, interpretowaną jako inkluzja różniczkowa, otrzymujemy, biorąc obraz podrozmaitości lagranżowskiej generowanej przez funkcję $H : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ względem $\tilde{\Lambda}_\varepsilon$, czyli obraz hamiltonowskiego pola wektorowego Λ_H dla tensora Λ i hamiltonianu H . Pytanie, czy dla danej dynamiki \mathcal{D} , otrzymanej z lagranżjanu, istnieje opis hamiltonowski, sprowadza się *de facto* do pytania, czy \mathcal{D} jest obrazem pola wektorowego i czy pole to jest hamiltonowskie względem tensora Λ .

Możemy także, jak w przypadku klasycznym, rozważać obiekty generujące, bardziej ogólne niż pojedyncza funkcja. Wybór obiektu generującego jest znacznie bardziej swobodny niż w sytuacji, kiedy Λ odpowiada strukturze symplektycznej, ze względu na możliwość degeneracji Λ (a co za tym idzie degenerację ε). Jednak nadal prawdziwe jest twierdzenie następujące (Lemat 1, str 569).

Twierdzenie 1. Jeśli lagranżjan $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ jest hiperregularny, tzn. odpowiadające mu odwzorowanie Legendre'a jest dyfeomorfizmem, to podrozmaitość lagranżowska $N_L =$

$dL(E)$ jest obrazem, względem odwzorowania \mathcal{R}_E , podrozmaitości $dH(E^*)$ dla funkcji $H : E^* \rightarrow E$, danej wzorem

$$(4) \quad H(\varphi) = \langle (\varphi, \lambda^{-1}(\varphi)) - L(\lambda^{-1}(\varphi)) \rangle.$$

Innymi słowy, w przypadku lagranżjanu hiperregularnego, mamy równoważny opis hamiltonowski z hamiltonianem (4).

Struktura algebroidu pozwala także uzyskać analog równania Eulera-Lagrange'a, które teraz musi być rozumiane jako równanie na krzywe w E , a nie, tradycyjnie, na krzywe w M . Rozważamy dwie wersje równania. Pierwsza z nich odpowiada inkluzji różniczkowej

$$E_L^1 = \mathbb{T}\lambda^{-1}(\mathcal{D}).$$

Rozwiązaniami E_L^1 są krzywe w E , których obrazy względem λ są rozwiązaniami dynamiki fazowej. Taka konstrukcja odpowiada konstrukcji równania Eulera-Lagrange'a, zaproponowanej przez de Leona i Lacombe w pracy [22].

Druga propozycja to

$$E_L^2 = \{v \in \mathbb{T}E : \mathbb{T}(\varepsilon \circ dL)(v) \in \mathbb{T}^2E^*\} = \mathbb{T}\lambda^{-1}(\mathbb{T}^2E^*).$$

Rozwiązaniami tego równania są krzywe w E o tej własności, że styczne podniesienie ich obrazu względem odwzorowania Legendre'a λ jest równe ich obrazowi względem $\varepsilon \circ dL$. Oczywiście jest, że równanie E_L^2 jest bardziej restrykcyjne niż E_L^1 , tzn. $E_L^2 \subset E_L^1$. W lokalnych współrzędnych (x^a, y^i) na E , gdzie (x^a) są współrzędnymi na M , zaś (y^i) – liniowymi współrzędnymi we włóknach, dostajemy równania

$$(5) \quad \frac{dx^a}{dt} = \rho_k^a(x)y^k, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y^j}(x, y) \right) = c_{ij}^k(x)y^i \frac{\partial L}{\partial y^k}(x, y) + \sigma_j^a(x) \frac{\partial L}{\partial x^a}(x, y),$$

w całkowitej zgodzie z zaproponowanymi w [24, 25, 46]. Tutaj, $\rho_k^a(x)$ są współrzędnymi kowektoru $\rho : E \rightarrow \mathbb{T}M$, zaś $\sigma_j^a(x)$ i $c_{ij}^k(x)$ pozostałymi 'strukturalnymi funkcjami' algebroidu. Warto zauważyć, że równanie $\frac{dx^a}{dt} = \rho_k^a(x)y^k$ oznacza, iż krzywe $\gamma(t)$, będące rozwiązaniem E_L^2 , są automatycznie *dopuszczalne*, tzn. wektor styczny $\dot{\gamma}(t)$ do ich rzutu $\underline{\gamma}(t) = \tau \circ \gamma(t)$ na M jest równy $\rho(\underline{\gamma}(t))$. W przypadku klasycznym, $E = \mathbb{T}M$, oznacza to, że γ jest podniesieniem stycznym $\underline{\gamma}$ i, ponieważ $y = \dot{x}$, równania (5) redukują się do standardowych równań Eulera-Lagrange'a drugiego rzędu na krzywe $x(t)$ w konfiguracjach,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^a}.$$

Dla hiperregularnego lagranżjanu, równania E_L^2 i E_L^1 są identyczne. Praca (1) zawiera także algebroidalną wersję twierdzenia Noether.

3. RACHUNEK WARIACYJNY NA ALGEBROIDACH

W pracy (3) dyskutujemy wariacyjne podstawy lagranżowskiego opisu mechaniki w sytuacji, gdy lagranżjan jest funkcją na algebroidzie $\tau : E \rightarrow M$. Umożliwia to włączenie do teorii układów z więzami. Postawienie problemu wariacyjnego na algebroidzie wymaga, jak zwykle, zdefiniowania przestrzeni trajektorii (konfiguracji) \mathcal{M} , przestrzeni wszystkich możliwych wariacji $\mathbb{T}\mathcal{M}$, a także funkcjonału działania W określonego na \mathcal{M} . Następnie należy wyróżnić trajektorie dopuszczalne $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ oraz wariacje dopuszczalne $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}\mathcal{M}$.

W przypadku $E = \mathbb{T}M$ bez więzów, trajektoriami są krzywe w $\mathbb{T}M$, a wariacjami krzywe w $\mathbb{T}\mathbb{T}M$ określone na ustalonym odcinku czasu $[t_0, t_1]$. Dopuszczalne trajektorie powstają jako prolongacje styczne krzywych w M , natomiast dopuszczalne wariacje konstruowane są z homotopii krzywych w M , tzn. odwzorowań $\chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$.

Istotną rolę w konstrukcji dopuszczalnych wariacji odgrywa odwzorowanie $\kappa_M : TTM \rightarrow TTM$. Mianowicie, jeśli $\delta\gamma : \mathbb{R} \rightarrow TM$ jest wariacją krzywej $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, to dopuszczalna wariacja dopuszczalnej krzywej (prolongacji stycznej γ) $\dot{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow TM$ jest postaci $\kappa \circ \delta\gamma : \mathbb{R} \rightarrow TTM$.

W środowisku algebroidalnym, krzywe dopuszczalne są to takie krzywe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$, dla których prolongacja styczna $\dot{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow TM$ ich rzutu $\underline{\gamma}$ na M spełnia warunek $\dot{\gamma} = \rho \circ \gamma$. Konstrukcja wariacji dopuszczalnych z homotopii dopuszczalnych krzywych związana jest ściśle z problemem całkowania algebroidów Liego [5]. W kontekście ogólnych algebroidów koncepcja ta nastęrcza jednak trudności. W tej sytuacji, korzystamy z metody zbliżonej do klasycznej, definiując wariacje infinitezymalne z użyciem morfizmu κ_ε . Należy jednak mieć na uwadze, że w kontekście algebroidalnym izomorfizm κ_M zastąpiony jest przez relację $\kappa_\varepsilon : TE \dashrightarrow TE$, dualną do ε . Dopuszczalne wariacje definiujemy, używając κ_ε , z pionowych wariacji krzywych dopuszczalnych, tzn. pionowych pól wektorowych wzdłuż krzywych. W przypadku algebroidów Liego metoda ta prowadzi do znanych infinitezymalnych homotopii dopuszczalnych krzywych, pozwala jednak opisać dopuszczalne wariacje dla szerszej klasy algebroidów. Korzystając ze zdefiniowanych elementów struktury, opisujemy rachunek wariacyjny na ogólnym algebroidzie i wyprowadzamy równania Eulera-Lagrange'a, które okazują się być zgodne z otrzymanymi wcześniej w sposób geometryczny równaniami E_L^2 .

Często zdarza się, że rozpatrując uogólnienia pewnych teorii uzyskujemy nowe spojrzenie na ich klasyczne wersje. Tak jest i w tym przypadku. Okazuje się, że poprawne opisanie układów z więzami wymaga nie tylko określenia podzbioru dopuszczalnych konfiguracji, ale także podzbioru dopuszczalnych wariacji tych konfiguracji. Można powiedzieć, że więzy nakładamy nie na konfiguracje, ale na wariacje. Same warunki, jakie spełniać muszą konfiguracje, nie definiują jeszcze poprawnie problemu wariacyjnego. Jeśli $\Sigma \subset E$ jest podzbiorem dopuszczalnych konfiguracji, to łatwo jest wskazać przynajmniej dwa sposoby konstruowania dopuszczalnych wariacji krzywych leżących w Σ : możemy brać wszystkie dopuszczalne wariacje, które są styczne do Σ , możemy także konstruować dopuszczalne wariacje z wariacji wertykalnych stycznych do Σ przy pomocy κ_ε . Pierwszy sposób odpowiada w klasycznym przypadku więzom zwanym *wakonomicznymi*, podczas gdy drugi to klasyczne więzy *nieholonomiczne*. Można mówić także o więzach *holonomicznych* w sytuacji, kiedy wariacje otrzymane na sposób nieholonomiczny okazują się styczne do Σ . Dla każdego z rodzajów więzów wyprowadzamy równania Eulera-Lagrange'a zarówno w sposób wariacyjny jak i geometryczny, tzn. nie odwołując się do rachunku wariacyjnego.

Jednym z istotnych wniosków wpływających z teorii wariacyjnej w kontekście algebroidów jest spostrzeżenie, że to właśnie struktura algebroidu jest podstawowym narzędziem geometrycznym, pozwalającym konstruować dynamikę fazową układu oraz równania Eulera-Lagrange'a. W klasycznym przypadku, $E = TM$, nie zwraca się na to uwagi, gdyż struktura wiązki stycznej i kostycznej traktowana jest jako naturalny element teorii. Okazuje się jednak, że to właśnie odwzorowanie α_M , lub, równoważnie, κ_M , które kodują kanoniczną strukturę algebroidu na TM , odgrywają kluczową rolę w formalizmach Lagrange'a i Hamiltona, co pozwala na stosunkowo łatwe uogólnienia na przypadek innych algebroidów.

Jako przykład układu z więzami wakonomicznymi opisujemy różniczkową wersję *zasady maksimum Pontryagina*, podstawowego narzędzia teorii optymalnego sterowania. Teorię związaną z więzami nieholonomicznymi ilustrujemy przykładem kuli poruszającej się po obracającym się stole.

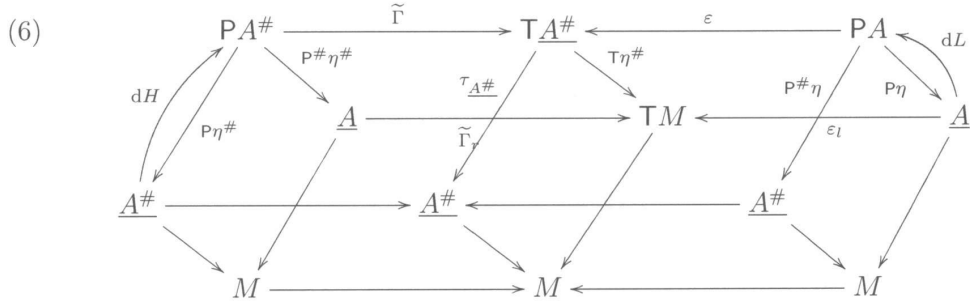
4. OPIS NIEZALEŻNY OD OBSERWATORA

Geometrycznie poprawny i niezależny od układu odniesienia opis wielu teorii fizycznych, np. klasycznej mechaniki nieautonomicznej, mechaniki cząstki naładowanej, czy nawet niezależny od układu odniesienia opis dynamiki cząstki w czasoprzestrzeni Newtona, wymaga użycia struktur afinicznych w miejsce znanych struktur wektorowych. Geometria afiniczna pojawia się naturalnie: wystarczy zauważyć, że w czasoprzestrzeni Newtona pęd cząstki transformuje się z układu do układu w sposób afiniczny, powinien więc być matematycznie reprezentowany przez obiekt o charakterze afinicznym. Rozwiązania tego rodzaju pojawiały się w pracach Tulczyjewa i Urbańskiego [44, 42, 39, 45]. Niezależny od układu odniesienia opis mechaniki analitycznej w czasoprzestrzeni Newtona znaleźć można w [13]. W pracy (2), stanowiącej część rozprawy habilitacyjnej, podjęliśmy zadanie opisanie trójki Tulczyjewa w przypadku afinicznym. We wcześniejszym artykule [12], stworzyliśmy podstawy teorii nazwanej *geometrią wartości afinicznych*. Idea tej teorii opiera się na zastąpieniu funkcji na rozmaiłości przez cięcia jednowymiarowej wiązki afinicznej, modelowanej na wiązce trywialnej $pr_1 : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Cięcia tej wiązki, to jakby funkcje o wartościach afinicznych, więc wiązkę tę nazwaliśmy *wiązką wartości afinicznych*.

W geometrii wartości afinicznych, wiązka kostyczna zastępowana jest przez tak zwaną *wiązkę fazową*. Niech $\zeta : Z \rightarrow M$ oznacza wiązkę wartości afinicznych. W zbiorze par (x, σ) , gdzie x jest punktem M a σ cięciem wiązki ζ , wprowadzamy relację równoważności, według której pary (m, σ) i (m', σ') są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy $m = m'$ oraz $d(\sigma - \sigma')(m) = 0$. Zauważmy, że różnica cięć wiązki wartości afinicznych jest funkcją na rozmaiłości bazowej, wiadomo więc co oznacza znikanie jej różniczki. Zbiór klas równoważności względem powyższej relacji ma naturalną strukturę rozmaiłości. Wyposażony jest także w kanoniczny rzut na rozmaiłość bazową M . Jako wiązka nad M , jest to wiązka afiniczna modelowana na wiązce kostycznej, z kanoniczną strukturą symplektyczną. Przestrzeń totalną tej wiązki oznaczamy PZ , a samą wiązkę nazywamy *wiązką fazową*.

Istotną rolę w geometrii wartości afinicznych odgrywają także *specjalne wiązki afiniczne*, czyli wiązki afiniczne, których modelowe wiązki wektorowe wyposażone są w wyróżnione nieznikające cięcia v_A . W kategorii takich wiązek mamy naturalne pojęcie *dualności*. Niech $\eta : A \rightarrow M$ będzie specjalną wiązką afiniczną a A^\dagger wiązką wektorową, której włóknami są funkcje afiniczne na włóknach wiązki A . Wprowadzamy także oznaczenie $V(A)$ na wektorową wiązkę, modelową dla A . *Afiniczną wiązką dualną* $A^\#$ nazywamy podwiązkę A^\dagger tych funkcji afinicznych, których część liniowa obliczona na v_A daje 1. Modelową wiązką dla $A^\#$ jest wektorowa podwiązka w wiązce A^\dagger składająca się z tych funkcji afinicznych, których część liniowa obliczona na v_A daje 0. Wiązka modelowa zawiera wyróżnione cięcie: funkcję 1_A stałą na A i równą 1. Oznacza to, że $(A^\#, 1_A)$ jest specjalną wiązką afiniczną. Z każdą specjalną wiązką afiniczną związana jest pewna wiązka wartości afinicznych, której bazą jest $\underline{A} = A/\langle v_A \rangle$.

Załóżmy teraz, że lagranżjan jest cięciem wiązki wartości afinicznych, związanej ze specjalną wiązką afiniczną A . Z tego rodzaju sytuacją mamy do czynienia np. w mechanice na czasoprzestrzeni Newtona. Odpowiednim narzędziem do opisu takiej sytuacji jest następująca afiniczna trójka Tulczyjewa:



Wiązki PA i $PA^\#$ są podwójnymi wiązkami afinicznymi, zaś wiązka $TA^\#$ jest podwójną wiązką afiniczno-wektorową. Odwzorowanie ε zadaje na wiązce A strukturę *specjalnego affgebroidu*, która inaczej może być zdefiniowana jako nawias afiniczno-liniowy $[\cdot, \cdot]_\varepsilon$:

$$[\cdot, \cdot]_\varepsilon : \text{Sec}(A) \times \text{Sec}(V(A)) \rightarrow \text{Sec}(V(A)),$$

wraz z morfizmami $\varepsilon_l : A \rightarrow TM$, $\varepsilon_r : V(A) \rightarrow TM$, spełniającymi następujące warunki.

Po pierwsze, nawias jest *specjalny*, tzn.

$$[a, X + v_A]_\varepsilon = [a + v_A, X]_\varepsilon = [a, X]_\varepsilon.$$

Ponadto,

$$[a, gX]_\varepsilon = g[a, X]_\varepsilon + (\varepsilon_l \circ a)(g)X,$$

$$[a + fY, X]_\varepsilon = (1 - f)[a, X]_\varepsilon + f[a + Y, X]_\varepsilon - (\varepsilon_r \circ X)(f)Y,$$

gdzie a jest cięciem A , X, Y są cięciami $V(A)$, a f, g są funkcjami na M .

Zauważmy, że diagram (6) jest afiniczną wersją diagramu (3). Odwzorowanie $\tilde{\Gamma}$ związane jest z afinicznym tensorem $\tilde{\Gamma} \in \text{Sec}(\tilde{TA}^\# \otimes_{A^\#} TA^\#)$. Tensor ten zadaje nawias między cięciami wiązki wartości afinicznych, związanej z $A^\#$, i funkcjami na $A^\#$, o wartościach w $A^\#$.

Wiązka \tilde{TZ} , występująca powyżej, to kolejny przykład konstrukcji charakterystycznej dla geometrii wartości afinicznych. Jeśli $\zeta : Z \rightarrow M$ jest wiązką wartości afinicznych, to jest ona także wiązką główną ze względu na działanie grupy $(\mathbb{R}, +)$. Niech $\tilde{TZ} \rightarrow M$ będzie wiązką wektorową, powstałą przez podzielenie TZ przez styczne działanie grupy. Jest to specjalna wiązka wektorowa, której wyróżnione cięcie pochodzi od nieskończonego działania algebry \mathbb{R} na Z .

W wersji afinicznej odnajdujemy wszystkie elementy opisu dynamiki, które pojawiły się wcześniej w wersji wektorowej. Lagranżjan, będący cięciem wiązki wartości afinicznych, definiuje podrozmaitość lagranżowską $N_L \subset PA$, która jest obrazem afinicznej różniczki lagranżjanu. Dynamikę \mathcal{D} otrzymujemy jako obraz N_L względem ε . Dynamika fazowa, jako podzbiór wiązki stycznej, jest równaniem różniczkowym (być może uwikłanym) na krzywe w $A^\#$. Ostatnia przestrzeń interpretowana jest jako afiniczna przestrzeń fazowa. Afiniczne odwzorowanie Legendre'a

$$\lambda : \underline{A} \rightarrow \underline{A}^\#, \quad \lambda = P^\# \eta \circ dL$$

przyporządkowuje pędy konfiguracjom nieskończonego. W przypadku, kiedy λ jest dyfeomorfizmem, tzn. kiedy lagranżjan jest hiperregularny, dynamika jest obrazem hamiltonowskiego pola wektorowego, generowanego przez hamiltonian będący cięciem wiązki wartości afinicznych związanej z $A^\#$. W pozostałych przypadkach możemy szukać bardziej skomplikowanego obiektu generującego.

W teorii afinicznej konstruujemy także równanie Eulera-Lagrange'a. Jest ono równaniem na krzywe w \underline{A} , zatem stanowi podzbiór $\mathbb{T}\underline{A}$. Oznaczając przez $\tilde{\lambda}$ złożenie $\tilde{\lambda} = \varepsilon \circ dL$, równanie Eulera-Lagrange'a zapisujemy jako

$$E_L = \mathbb{T}\tilde{\lambda}^{-1}(\mathbb{T}^2\underline{A}^\#).$$

Rozwiązaniami tego równania są krzywe γ w \underline{A} takie, że styczne podniesienie krzywej $\lambda \circ \gamma$ jest równe $\tilde{\lambda} \circ \gamma$. Jako ilustracje przedstawionej teorii, posłużyły mechanika cząstek naładowanych i mechanika cząstki w czasoprzestrzeni Newtona.

5. WIĘZY NIEHOLONOMICZNE I ALGEBROIDY DIRACA

Praca (5) rozprawy habilitacyjnej stanowi naturalną kontynuację wyników otrzymanych w (1), (2) i (3). W pracy tej wprowadzamy pojęcie *algebroidu Diraca*, które stanowi naturalne uogólnienie, z jednej strony, struktury Diraca na rozmaitości M , zdefiniowanej przez Dorfman [6] i studiowanej przez Couranta [4], a z drugiej, struktury algebroidu na wiązce liniowej. Oryginalnie, struktura Diraca zaproponowana została jako narzędzie w teorii układów całkowalnych z więzami. W ostatnim czasie pojęcie to zostało także wykorzystane w mechanice analitycznej [47] do opisu układów ze nieregularnym lagranżjanem.

Definicja algebroidu Diraca powstała w wyniku kilku istotnych obserwacji. Studiując coraz bardziej skomplikowane układy w mechanice i teorii pola przekonujemy się, że właściwym obiektem, z którym należy pracować, są nie odwzorowania takie jak α_M, β_M , czy pochodzące od struktur Poissona, ale relacje zachowujące naturalne struktury wiązek. Przykładem relacji o istotnym znaczeniu jest relacja $\kappa : \mathbb{T}E \rightarrow \mathbb{T}E$, będąca algebroidalną wersją kanonicznej inwolucji κ_M na $\mathbb{T}TM$. Jeśli spojrzymy na sposób definiowania kanonicznego izomorfizmu wiązek \mathbb{T}^*E i \mathbb{T}^*E , to zauważymy, że używamy tu *de facto* pewnej relacji symplektycznej, generowanej przez kanoniczną ewaluację między wiązką wektorową a wiązką dualną. Aspekt relacyjny jest jeszcze bardziej widoczny w wersji afinicznej tego samego rachunku, gdzie definiujemy kanoniczny izomorfizm między $\mathbb{P}A^\#$ a $\mathbb{P}A$. Z relacjami mamy też do czynienia w konstrukcji trójki Tulczyjewa w klasycznej teorii pola.

Drugą istotną obserwacją jest to, że liniowość struktur (symplektycznej, Poissona, konksji itp.) może być wygodnie wypowiedziana w języku morfizmów podwójnych wiązek wektorowych. Obserwacja ta poczyniona została już w pracy [20]. W szczególności, struktura ogólnego algebroidu jest szczególnego rodzaju morfizmem podwójnych wiązek wektorowych.

Niech $\mathbb{T}E = \mathbb{T}E^* \oplus_{E^*} \mathbb{T}^*E^*$ oznacza sumę Whitney'ego wiązek \mathbb{T}^*E^* i $\mathbb{T}E^*$. Wiązka ta, zwana czasem *wiązką Pontriagina*, posiada strukturę podwójnej wiązki wektorowej, gdy $\tau : E \rightarrow M$ jest wiązką wektorową, oraz kanoniczną formę symetryczną. Druga struktura wiązki wektorowej jest rozwłóknieniem nad $TM \oplus_M E$. *Algebroidem Diraca* nazywamy maksymalną izotropową podwiązkę D wiązki $\mathbb{T}E$, która jest podwójną podwiązką wektorową, tzn. jest podwiązką nie tylko ze względu na rzut na E^* , ale także na $TM \oplus_M E$. Mówiąc 'podwiązka wektorowa', czy 'podwójna podwiązka wektorowa', mamy na myśli podwiązkę w sensie zdefiniowanym w [14], tzn. podwiązkę nad podrozmaitością. Jeśli podwiązka D jest podwiązką Diraca, tzn. jest zamknięta ze względu na tzw. *nawias Couranta*, to strukturę tę nazywamy *algebroidem Diraca-Liego*. Poniższe diagramy opisują strukturę podwójnej wiązki wektorowej w $\mathbb{T}E$ oraz zawartej w niej podwójnej podwiązki

D , reprezentującej algebroid Diraca,

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{T}E^* \oplus_{E^*} \mathbb{T}^*E^* & \\ \tau_1 \swarrow & \uparrow \cup & \searrow \tau_2 \\ E^* & E^* \oplus_M \mathbb{T}^*M & \mathbb{T}M \oplus_M E \\ & \downarrow \pi & \\ & M & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & D & \\ \tau_1^D \swarrow & \uparrow \cup & \searrow \tau_2^D \\ Ph_D & C_D & Vel_D \\ & \downarrow \pi^D & \\ & M_D & \end{array}$$

Przykładem algebroidu Diraca jest wykres odwzorowania $\tilde{\Pi}$ odpowiadającego dowolnemu liniowemu polu biwektorowemu Π na wiązce wektorowej E^* . Jeśli pole to jest tensorem Poissona, to mamy do czynienia z algebroidem Diraca-Liego. Podobnie, jeśli $\tilde{\omega} : \mathbb{T}E^* \rightarrow \mathbb{T}^*E^*$ jest odwzorowaniem związanym z liniową 2-formą na wiązce wektorowej, jego wykres jest algebroidem Diraca. Jeśli dodatkowo forma ω jest zamknięta (czyli mamy do czynienia ze strukturą presymplektyczną), to powyższy wykres jest algebroidem Diraca-Liego. Szczególnymi przykładami powyższych struktur jest wykres odwzorowania β_M .

Wiązki bazowe Ph_D i Vel_D podwiązki D nazywane są, odpowiednio, *wiązką fazową* i *wiązką prędkości (relacją kotwicy)*. Istotnie, jeśli algebroid Diraca zadany jest przez skośny algebroid, to wiązka Vel_D jest wykresem odwzorowania kotwicy. W pracy (5) poświęcamy sporo miejsca na analizę struktury algebroidu Diraca, która okazuje się zaskakująco bogata. Okazuje się na przykład, że wiązka $C_D \subset \mathbb{T}^*M \oplus_M E^*$, czyli tzw. *rdzeń* podwójnej wiązki wektorowej D , jest anihilatorem wiązki Vel_D . Konstruujemy także lokalne współrzędne dostosowane do struktury podwiązki D .

Algebroid Diraca zadaje w sposób naturalny relację $\beta_D : \mathbb{T}^*E^* \rightrightarrows \mathbb{T}E^*$, która w konstrukcji trójki Tulczyjewa zastępuje odwzorowanie β_M . Złożenie tej relacji z kanonicznym izomorfizmem \mathcal{R}_E zadaje relację $\varepsilon_D : \mathbb{T}^*E \rightrightarrows \mathbb{T}E^*$. Odpowiednia wersja trójki Tulczyjewa reprezentowana jest diagramem podobnym do (3), w którym część odwzorowań zastąpiono relacjami:

$$(8) \quad \begin{array}{ccccc} & \mathbb{T}^*E^* & \xrightarrow{\beta_D} & \mathbb{T}E^* & \xleftarrow{\varepsilon_D} & \mathbb{T}^*E & \xleftarrow{dL} & E \\ & \uparrow \pi_{E^*} & & \uparrow \tau_{E^*} & & \uparrow \tau_E & & \uparrow \pi_E \\ E^* & \xrightarrow{id_{Ph_D}} & E^* & \xrightarrow{id_{Ph_D}} & E^* & \xrightarrow{\rho_D} & E & \\ & \downarrow \pi_{E^*} & & \downarrow \tau_{E^*} & & \downarrow \tau_E & & \downarrow \pi_E \\ & M & \xrightarrow{id_{Ph_D}} & M & \xrightarrow{id_{Ph_D}} & M & \xrightarrow{\rho_D} & E \end{array}$$

Proces generowania dynamiki z lagranżjanu lub hamiltonianu przebiega podobnie jak w poprzednich przypadkach, z tą jedynie różnicą, że zamiast odwzorowań używamy relacji. Dynamika wygenerowana z lagranżjanu jest więc podzbiorem $\mathbb{T}E^*$ równym $\varepsilon_D(dL(E))$. Zwróćmy uwagę, że w tym przypadku dynamika na ogół nie jest podrozmaitością lagranżowską. Relację Legendre'a, odpowiednik odwzorowania Legendre'a, otrzymujemy składając relacje: $\lambda_D = \tau_{E^*} \circ \varepsilon_D \circ dL$. Okazuje się, że relacja ta jest odwzorowaniem na dziedzinie na ogół mniejszej niż E . Dziedzinę tę nazywamy *dziedziną Eulera-Lagrange'a*, ponieważ w tym właśnie zbiorze leżą obrazy krzywych będących rozwiązaniami odpowiedniego równania Eulera-Lagrange'a. Dynamika wygenerowana z hamiltonianu ma podobną postać

jako podzbiór $\beta_D(dH(E^*))$. W wielu fizycznych przypadkach dynamika konkretnego układu może być wygenerowana zarówno z lagranżjanu jak i z hamiltonianu. Z oczywistych względów, wybór obiektu generującego jest swobodniejszy niż we wcześniejszych sytuacjach.

Oznaczmy przez \tilde{L}_D złożenie $\tilde{L}_D = \varepsilon_D \circ dL$. Równanie Eulera-Lagrange'a uzyskać możemy biorąc przeciwobraz zbioru wektorów holonomicznych na E^* względem prolongacji stycznej relacji odwrotnej do \tilde{L}_D , tzn

$$E_L = \mathbb{T}\tilde{L}_D^{-1}(\mathbb{T}^2E^*).$$

Rozwiązaniami równania Eulera-Lagrange'a są krzywe w E , których wartości należą do dziedziny Eulera-Lagrange'a, i które są w relacji \tilde{L}_D z pewną krzywą dopuszczalną w $\mathbb{T}E^*$, a więc prolongacją krzywej z E^* .

W przypadku hiperregularnego lagranżjanu, tzn. takiego, że odwzorowanie λ , zadane przez jego pochodną pionową, jest dyfeomorfizmem, dynamika wygenerowana z lagranżjanu ma także opis hamiltonowski z funkcją Hamiltona jako obiektem generującym. Hamiltonian odpowiadający hiperregularnemu lagranżjanowi ma postać taką jak zwykle, tzn. $H(p) = \langle p, \lambda^{-1}(p) \rangle - L(\lambda^{-1}(p))$.

Zaletą trójki Tulczyjewa skonstruowanej z użyciem algebroidu Diraca jest jej uniwersalność oraz możliwość włączenia więzów nieholonomicznych wprost do geometrii układu. Innymi słowy, przy pomocy algebroidów Diraca możemy nie tylko opisać większość znanych układów mechanicznych, ale opis ten jest niewrażliwy na nałożenie więzów, tzn. obecność więzów zmienia tylko nieco algebroid Diraca na *indukowany przez więzy*, pozostawiając resztę procedury bez zmian. Na przykład, jeżeli startujemy z ustalonego algebroidu Diraca D , to więzy reprezentowane są przez podwiązkę V wiązki Vel_D . Algebroid Diraca, indukowany przez więzy, ma postać

$$D^V = (\tau_2^D)^{-1}(V) + V^0,$$

gdzie $V^0 \subset E^* \oplus_M \mathbb{T}^*M$ jest anihilatorem podwiązki V , i uogólnione formalizmy Lagrange'a i Hamiltona dla D^V dają dynamikę fazową oraz równania Eulera-Lagrange'a dla układu z tymi więzami.

W pracy (5) opisujemy także afiniczny odpowiednik algebroidu Diraca oraz przypadek więzów afinicznych. Ogólność naszej metody ilustruje dobór przykładów. Omawiamy układ z lagranżjanem określonym na skośnym algebroidzie, zasadę maksimum Pontryagina jako przykład więzów wakonomicznych, przypadek presymplektyczny, układ z lagranżjanem zależnym od czasu, układ z więzami nieholonomicznymi. Konkretnie rachunki we współrzędnych przedstawiamy dla przykładu dysku toczącego się bez poślizgu. Wszystkie te różnorodne przykłady dają się opisać przy pomocy tego samego typu struktury – algebroidu Diraca. Także redukcja ze względu na symetrie nie wymaga zmiany używanego języka.

6. KLASYCZNA TEORIA POLA

Prace (4) i (6) rozprawy habilitacyjnej poświęcone są konstrukcji trójki Tulczyjewa w klasycznej teorii pola. Podstawą mechanicznej trójki Tulczyjewa jest wariacyjny opis układów statycznych. Rachunek wariacyjny jest szczególnie użytecznym narzędziem w statyce, ponieważ wszystkie pojęcia i konstrukcje matematyczne, stanowiące jego elementy, mają proste i naturalne interpretacje fizyczne. Rachunek wariacyjny jest też używany w dynamice. Tradycyjnie jednak poprzestaje się na wykorzystaniu go do wyprowadzenia równań Eulera-Lagrange'a. Dogłębna analiza zastosowania rachunku wariacyjnego w mechanice

stała się podstawą lagranżowskiego i hamiltonowskiego opisu mechaniki stworzonego przez Tulczyjewa. Pojęcia takie jak pęd i przestrzeń fazowa mają w tej teorii także pochodzenie wariacyjne. W pracach (4) i (6) stosujemy tę samą filozofię do konstrukcji lagranżowskiego i hamiltonowskiego opisu klasycznej teorii pola. W pracy (4) analizujemy topologicznie najprostszy przypadek, który nazwać by można statyką obiektów wielowymiarowych, gdzie zamiast krzywych na rozmaitości (jak w dynamice) rozważamy odwzorowania z dysku $D \subset \mathbb{R}^n$ do rozmaitości M . Uogólnienie symplektycznego opisu mechaniki na przypadek obiektów wielowymiarowych rozważane było już przez Günthera [16]. Matematyczne podstawy tej teorii znaleźć można również w pracach [2, 3]. Nasze podejście do lagranżowskiego i hamiltonowskiego opisu klasycznej teorii pola jest jednak inne. Podobnie jak w mechanice, nie używamy formalizmu Kleina, co pozwala uniknąć kłopotów związanych m.in. ze zdegenerowanymi lagranżjanami. Przede wszystkim jednak, systematycznie konstruujemy wszystkie obiekty geometryczne, opierając się na ideach zaczerpniętych z wariacyjnego opisu statyki. Ze względu na prostotę prezentacji, szczegółowe rachunki prowadzimy dla przypadku $n = 2$, gdyż uogólnienie dla dowolnego n jest natychmiastowe.

Analizę rozpoczynamy od podejścia wariacyjnego, które umożliwia prawidłowe zidentyfikowanie przestrzeni fazowej oraz rozpoznanie struktur geometrycznych, potrzebnych do konstrukcji lagranżowskiej strony trójki Tulczyjewa. Przestrzeń fazowa okazuje się być przestrzenią $T^*M \otimes (\mathbb{R}^2)^* \simeq T^*M \times_M T^*M$. W skrócie, tę przestrzeń fazową oznaczamy będziemy $\overset{2}{T}^*M$. Jest ona wiązką wektorową. Wiązka nieskończenie małych konfiguracji to wiązka dualna $TM \times_M TM = \overset{2}{T}M$. Uproszczona struktura topologiczna pozwala używać wiązek wektorowych, podwójnych wiązek wektorowych i dualności w sensie wektorowym do konstrukcji trójki Tulczyjewa. Tak nie jest w bardziej ogólnym przypadku, gdzie trzeba sięgnąć do geometrii afinicznej. Rolę odwzorowania κ_M , używanego do konstrukcji dopuszczalnych wariacji w mechanice, odgrywa odwzorowanie

$$\kappa : T \overset{2}{T}M \rightarrow \overset{2}{T}TM,$$

które jest izomorfizmem podwójnych wiązek wektorowych. Rachunek wariacyjny podpowiada także postać ewaluacji stycznej między przestrzenią pierwszych dżetów odwzorowań z \mathbb{R}^2 w przestrzeń fazową $(\overset{2}{T}\overset{2}{T}^*M)$ a przestrzenią wariacji konfiguracji nieskończenie małych $T \overset{2}{T}M$. Ewaluacja ta jest zdegenerowana, zatem oczekiwać należy, że relacja α , dualna do κ i stanowiąca lagranżowską część trójki Tulczyjewa, nie będzie izomorfizmem. Relacja α okazuje się być odwzorowaniem $\alpha : \overset{2}{T}\overset{2}{T}^*M \rightarrow T^*T^*M$, zachowującym strukturę podwójnej wiązki wektorowej.

Hamiltonowskie sformułowanie mechaniki związane jest z istnieniem struktury symplektycznej na wiązce kostycznej. Przestrzeń fazowa w naszym przypadku nie jest przestrzenią symplektyczną, tym niemniej można skonstruować odpowiednie odwzorowanie, dzięki któremu z różniczki hamiltonianu (będącego funkcją na $\overset{2}{T}^*M$) można otrzymać równania fazowe, opisujące konfiguracje fazowe układu. Odwzorowanie to konstruujemy na dwa sposoby. Jeden z nich wykorzystuje kanoniczny izomorfizm \mathcal{R} między $T^* \overset{2}{T}^*M$ i $T^* \overset{2}{T}M$, wynikający z faktu, iż wiązki $\overset{2}{T}^*M$ i $\overset{2}{T}M$ są dualnymi wiązkami wektorowymi. Odwzorowanie β jest więc złożeniem $\beta = \alpha \circ \mathcal{R}$. Ten sposób konstrukcji związany jest z pewnym sposobem interpretacji sformułowania hamiltonowskiego. Wedle tej interpretacji, sformułowanie hamiltonowskie jest rezultatem poszukiwania alternatywnego w stosunku do lagranżjanu sposobu generowania dynamiki. Wymaga to znalezienia innej niż $T^* \overset{2}{T}M$

wiązki kostycznej, która jest w relacji z przestrzenią zawierającą dynamikę. Interpretacja ta pochodzi od Tulczyjewa i związana jest z pojęciem *struktury Liouville'a* [43]. Drugi sposób konstrukcji odwzorowania β związany jest z kanonicznymi strukturami na wiązce fazowej. Okazuje się, że odpowiednikiem kanonicznej formy symplektycznej ω_M na T^*M jest kanoniczny tensor

$$\overset{2}{\omega}_M \in \text{Sec}(\overset{2}{T}^* \overset{2}{T}^* M \otimes T^* \overset{2}{T}^* M).$$

Ze względu na izomorfizm

$$\overset{2}{T}^* \overset{2}{T}^* M \otimes T^* \overset{2}{T}^* M \simeq T^* \overset{2}{T}^* M \otimes T^* \overset{2}{T}^* M \times_{T^* M} T^* \overset{2}{T}^* M \otimes T^* \overset{2}{T}^* M,$$

tensor ten może być przedstawiony jako para form symplektycznych, co wiąże odwzorowanie β ze strukturą polisymplektyczną. Skonstruowana w pracy (4) trójka Tulczyjewa ma postać

(9)

$$\begin{array}{ccccc}
 T^* \overset{2}{T}^* M & \xleftarrow{\beta} & \overset{2}{T} \overset{2}{T}^* M & \xrightarrow{\alpha} & T^* \overset{2}{T} M \\
 \pi_{T^* M} \searrow & & \tau_{T^* M}^2 \searrow & & \xi \searrow \\
 \overset{2}{T}^* M & \xleftarrow{id} & \overset{2}{T}^* M & \xrightarrow{id} & \overset{n}{T}^* M \\
 \pi_M^2 \searrow & & \pi_M^2 \searrow & & \pi_M^2 \searrow \\
 \overset{2}{T} M & \xleftarrow{id} & \overset{2}{T} M & \xrightarrow{id} & \overset{2}{T} M \\
 \tau_M^2 \searrow & & \tau_M^2 \searrow & & \tau_M^d \searrow \\
 M & \xleftarrow{id} & M & \xrightarrow{id} & M
 \end{array}$$

Równanie różniczkowe cząstkowe, na ogół w formie uwikłanej, którego rozwiązaniami są odwzorowania fazowe $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overset{2}{T}^* M$, otrzymujemy z lagranżjanu jako

$$\overset{2}{T} \overset{2}{T}^* M \supset \mathcal{D} = \alpha^{-1}(dL(\overset{2}{T} M)),$$

lub z hamiltonianu jako

$$\overset{2}{T} \overset{2}{T}^* M \supset \mathcal{D} = \beta^{-1}(dH(\overset{2}{T}^* M)).$$

Naszą teorię ilustrujemy przykładem związanym z bozonową teorią strun w wersji zaproponowanej przez Nambu.

Celem pracy (6) jest skonstruowanie trójki Tulczyjewa w klasycznej teorii pola w bardzo ogólnej sytuacji, tzn. kiedy pola są cięciami pewnego rozwłóknienia $\zeta : E \rightarrow M$ bez dodatkowej struktury. Źródłem używanych w pracy konstrukcji geometrycznych jest pełny rachunek wariacyjny z uwzględnieniem wyrazów brzegowych. Zwracamy szczególną uwagę na dobranie odpowiedniego języka matematycznego do opisu pojęć ważnych z punktu widzenia fizyki, np. przestrzeni fazowej, dynamiki fazowej, odwzorowania Legendre'a, hamiltonianu.

Klasyczna teoria pola jest zazwyczaj kojarzona z geometrią multisymplektyczną. Literatura dotycząca struktur multisymplektycznych jest bardzo bogata. Koncepcja ta pojawiła się po raz pierwszy w pracach Tulczyjewa, Gawędzkiego, Szczyrby i Kijowskiego [7, 17, 18, 40]. Prace na ten temat kontynuowane były przez Gotay'a, Isenberga, Marsdena [8, 9, 10, 11] a także wielu innych autorów. Nasza konstrukcja lagranżowskiego i hamiltonowskiego opisu klasycznej teorii pola jest inna. Nie używamy formalizmu multisymplektycznego bezpośrednio, ale konstruujemy trójkę Tulczyjewa, posługując się, z jednej strony, rachunkiem wariacyjnym, a drugiej, korzystając z doświadczeń nabytych w

takie prac ze strukturami podwójnej wiązki wektorowej i podwójnej wiązki wektorowo-afinicznej. Nie koncentrujemy się na wyprowadzeniu równań Eulera-Lagrange'a, bo interesuje nas raczej przestrzeń fazowa i dynamika fazowa. Równania Eulera-Lagrange'a pojawiają się jako konsekwencje równań fazowych. Geometria afiniczna odgrywa szczególną rolę przy konstrukcji hamiltonowskiej strony trójki Tulczyjewa.

Punktem wyjścia naszej konstrukcji jest lokalnie trywialne rozwłóknienie $\zeta : E \rightarrow M$ nad rozmaitością M wymiaru m , którego cięcia reprezentują pola, i odpowiednia wiązka pierwszych dżetów J^1E cięć wiązki ζ , odgrywająca rolę konfiguracji nieskończenie małych. Jest to wiązka afiniczna nad E . Lagranżjan jest odwzorowaniem $L : J^1E \rightarrow \Omega^m$, gdzie $\Omega^k := \wedge^k T^*M$ oznacza wiązkę k -form na M . Przestrzenią fazową okazuje się być wiązka $\mathcal{P} = V^*E \otimes_E \zeta^*(\Omega^{m-1})$. Tutaj V^*E oznacza wiązkę dualną do podwiązki VE wektorów stycznych do E i pionowych względem rzutowania na M , natomiast $\zeta^*(\Omega^{m-1})$ oznacza 'pull-back' wiązki kowektorów względem rzutowania ζ . Dla uproszczenia notacji pomijamy w dalszym ciągu symbol pull-back'u, pisząc po prostu $\mathcal{P} = V^*E \otimes_E \Omega^{m-1}$. Lagranżowska część trójki Tulczyjewa stanowi odwzorowanie

$$\alpha : J^1\mathcal{P} \longrightarrow V^*J^1E \otimes_{J^1E} \Omega^m.$$

Jest to morfizm podwójnych wiązek wektorowo-afinicznych, związanych z rzutowaniami na \mathcal{P} i J^1E . Pionowa względem rzutowania na M różniczka lagranżjanu dL jest cięciem wiązki

$$V^*J^1E \otimes_{J^1E} \Omega^m \rightarrow J^1E,$$

a dynamika fazowa (w postaci niejawnej) jest podzbiorem $J^1\mathcal{P}$, otrzymanym jako przeciwobraz względem α obrazu różniczki dL , tzn. $\mathcal{D} = \alpha^{-1}(dL(J^1E))$.

Hamiltonowską stronę trójki stanowi odwzorowanie $\beta : J^1\mathcal{P} \rightarrow PJ^\dagger E$, gdzie $J^\dagger E$ jest wiązką dualną do J^1E w sensie afinicznym, tzn. wiązką afinicznych odwzorowań z J_e^1E do $\Omega_{\zeta(e)}^m$. Tutaj $PJ^\dagger E$ oznacza afiniczną wiązkę fazową, której elementami są klasy równoważności cięć jednowymiarowej wiązki afinicznej $\theta : J^\dagger E \rightarrow \mathcal{P}$, z włóknami modelowanymi na odpowiednich włóknach wiązki Ω^m . Afiniczna wiązka fazowa jest odpowiednikiem wiązki kostycznej. Hamiltonian jest cięciem wiązki θ . Jego afiniczna różniczka jest zatem odwzorowaniem $dH : \mathcal{P} \rightarrow PJ^\dagger E$. Dynamika fazowa powstaje jako przeciwobraz względem β obrazu różniczki dH , tzn. $\mathcal{D} = \beta^{-1}(dH(\mathcal{P}))$. Przestrzenie $PJ^\dagger E$ i $V^*J^1E \otimes_{J^1E} \Omega^m$ są kanonicznie izomorficzne. Odwzorowania α i β nie są jednak izomorfizmami. Konstrukcja trójki złożonej z izomorfizmów jest możliwa i wymaga przejścia do pewnej wiązki ilorazowej wiązki $J^1\mathcal{P}$. Tracimy jednak wtedy naturalną interpretację dynamiki fazowej jako równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu na cięciu wiązki fazowej. Diagram, reprezentujący trójkę Tulczyjewa dla klasycznej teorii, pola ma postać

$$(10) \quad \begin{array}{ccccc} & PJ^\dagger E & \xleftarrow{\beta} & J^1\mathcal{P} & \xrightarrow{\alpha} & V^*J^1E \otimes \Omega^m \\ & \swarrow P\theta & & \swarrow j^1(\tau \circ \pi) & & \swarrow \xi \\ \mathcal{P} & \xleftarrow{P\zeta} & \mathcal{P} & \xrightarrow{J^1\pi} & \mathcal{P} & \searrow \rho_{J^1E} \\ & \searrow \pi & & \searrow \pi & & \searrow \pi \\ & & J^1E & \xleftarrow{j^1\zeta} & J^1E & \xrightarrow{j^1\zeta} & J^1E \\ & \swarrow \pi & & \swarrow \pi & & \swarrow \pi \\ & & E & \xleftarrow{j^1\zeta} & E & \xrightarrow{j^1\zeta} & E \end{array}$$

Przestrzenie $PJ^{\dagger}E$ i $V^*J^1E \otimes_{J^1E} \Omega^m$ wyposażone są w kanoniczne 2-formy, które obcięte do włókien nad M są formami symplektycznymi o wartościach w Ω^m . Naturalną strukturą przestrzeni $J^1\mathcal{P}$ jest kanoniczna forma presymplektyczna o wartościach w Ω^m . Sama przestrzeń fazowa ma także kanoniczną strukturę, którą jest pewna 1-forma o wartościach w Ω^{m-1} . Ta 1-forma odgrywa podobną rolę co kanoniczna forma Liouville'a na T^*M . W ten sposób otrzymujemy dość kompletny obraz geometrii klasycznych teorii pola pierwszego rzędu.

(5) Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych uzyskanych po doktoracie

Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze uzyskane po doktoracie zawarte są w następujących publikacjach:

- (1) Janusz Grabowski, Katarzyna Grabowska, *The Lie algebra of a Lie algebroid* In: Lie algebroids and related topics in differential geometry (Warsaw, 2000), 43-50, Banach Center Publ., **54**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2001.
- (2) Jerzy Kijowski, Katarzyna Grabowska, *Canonical Gravity and Gravitational Energy*, Differential Geometry and its applications, Ed.: O. Kowalski, D. Krupka, J. Slovák, Opava, (2001) 261–274.
- (3) Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski, Paweł Urbański, *Lie Brackets on Affine Bundles*, Annals of Global Analysis and Geometry **24**, (2003), 101–130.
- (4) Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski, Paweł Urbański, *AV-differential geometry: Poisson and Jacobi structures*, J. Geom. Phys., **52** (2004), 398-446.
- (5) Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski, Paweł Urbański, *Frame-independent mechanics: geometry on affine bundles*, Travaux mathématiques, **16** (2005), 107–120.
- (6) Katarzyna Grabowska, Paweł Urbański, *AV-differential geometry and Newtonian mechanics*, Rep. Math. Phys., **58** (2006), 21-40.
- (7) Katarzyna Grabowska, Paweł Urbański, *AV-differential geometry and calculus of variations*, XV International Workshop on Geometry and Physics, 144-152, Publ. R. Soc. Mat. Esp. **11** R. Soc. Mat. Esp., Madrid, (2007)
- (8) Katarzyna Grabowska, Janusz Grabowski, Paweł Urbański, *The Schrödinger operator as a generalized Laplacian*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 145204 (20pp).

Jednym z klasycznych twierdzeń w geometrii różniczkowej jest twierdzenie Pursell'a i Shanks'a [29], które stwierdza, że algebra Liego gładkich pól wektorowych o zwartym nośniku na gładkiej rozmaitości M zawiera pełną informację o strukturze tej rozmaitości, tzn. odpowiednie algebry pól wektorowych na rozmaitościach M_1 i M_2 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy rozmaitości M_1 i M_2 są dyfeomorficzne. Znane są także podobne twierdzenia w innych szczególnych sytuacjach, na przykład dla hamiltonowskich pól wektorowych, pól niezmienniczych ze względu na działanie grupy itd. W pracy (1) analizujemy podobny problem w kontekście algebroidów Liego. Cięcia algebroidu Liego tworzą algebrę Liego, na ogół nieskończenie-wymiarową, której własności zbliżone są do własności algebry pól wektorowych na rozmaitości. Opisujemy ideały maksymalne oraz maksymalne skończenie kowymiarowe podalgebry oraz dowodzimy twierdzenia podobnego do twierdzenia Pursell'a-Shanks'a w przypadku, kiedy algebroid spełnia pewne dodatkowe warunki dotyczące niezdegenerowania odwzorowania kotwicy.

Praca (2) dotyczy pojęcia energii w teorii grawitacji. Zgodnie ze standardowym podejściem do transformacji Legendre'a, służącej do przejścia od opisu lagranżowskiego do opisu

hamiltonowskiego w teoriach wariacyjnych, hamiltonian w teorii grawitacji jest równy zero z dokładnością do wyrazów brzegowych. Z drugiej strony, wyrazy brzegowe w teoriach wariacyjnych są zazwyczaj zaniebawiane. Dotychczas proponowane rozwiązania tego problemu obejmują nakładanie dodatkowych warunków na funkcjonal energii, lub dokonywanie poprawek po stronie lagranżowskiej. Obie te metody są niesatysfakcjonujące, brak im bowiem uniwersalności i wystarczającego uzasadnienia. W pracy (2) proponujemy rozwiązanie tego problemu oparte na dogłębnej analizie równań Einsteina. Używamy takiej wersji kanonicznej teorii pola, w której nie zaniebawia się wyrazów brzegowych. W tym podejściu energia grawitacyjna jest wielkością kwazilokalną, zawartą w dwuwymiarowym zwartym brzegu. Całkowita energia uzyskiwana jest przy pomocy przejścia granicznego do nieskończoności przestrzennej lub zerowej. Otrzymane przez nas rezultaty nie zależą od wyboru zasady wariacyjnej - korzystać można zarówno z lagranżjanu Hilberta-Einsteina jak i z lagranżjanu afinicznego.

Prace (3), (4), (5), (6) i (7) poświęcone są geometrii wartości afinicznych. Geometria wartości afinicznych jest wersją geometrii różniczkowej, w której funkcje na rozmaitości zastąpione są przez cięcia jednowymiarowej wiązki afinicznej $\zeta : Z \rightarrow M$ modelowanej na wiązce trywialnej $pr_1 : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Okazuje się, że wiele konstrukcji pochodzących z tradycyjnej geometrii różniczkowej można powtórzyć w przypadku afinicznym. W ten sposób otrzymać można wiązkę fazową $PZ \rightarrow M$, która jest afinicznym odpowiednikiem wiązki kostycznej. Struktury afiniczne są naturalnym językiem w teoriach takich jak dynamika cząstki naładowanej [45], mechanika nieautonomiczna, tzn. z lagranżjanem zależnym od czasu i niezależnym od układu odniesienia opis dynamiki w czasoprzestrzeni Newtona.

W pracy (3) omawiamy algebraiczne i geometryczne struktury, które mogą stanowić użyteczne narzędzia do opisu powyższych teorii. Definiujemy afiniczny odpowiednik nawiasu Liego w kontekście przestrzeni afinicznej a także wiązki afinicznej, wprowadzamy pojęcie afinicznej struktury Poissona i *affgebroidu Liego* – afinicznego odpowiednika algebroidu Liego. Analizujemy związki między tymi strukturami oraz ich wektorowymi odpowiednikami. Używając pojęcia dwoistości afiniczno-wektorowej, dowodzimy twierdzenia, które mówi, iż każdy *affgebroid* Liego jest podwiązką w pewnym algebroidzie Liego. Obserwacja ta umożliwia zdefiniowanie afinicznego odpowiednika rachunku na formach typu rachunku Cartana.

W pracy (4) rozszerzamy wyniki uzyskane w pracy (3). W systematyczny sposób omawiamy w niej pojęcie wiązki wartości afinicznych (AV-wiązki) wraz z naturalnymi przykładami. Dyskutujemy także pojęcia specjalnej wiązki wektorowej, specjalnej wiązki afinicznej oraz związanych z nimi konstrukcji. W pracy (4) pojawia się także pojęcie dwoistości afinicznej w kategorii specjalnych wiązek afinicznych. Jeden z rozdziałów poświęcony jest obszernej analizie kanonicznych wiązek pojawiających się w geometrii wiązek afinicznych, tzn. wiązce fazowej, wiązce elementów kontaktowych, zredukowanej wiązce stycznej itd., oraz ich kanonicznych struktur. Wracamy także do sprawy afinicznych nawiasów Liego, afinicznych struktur Poissona i Jacobiego, przedstawiając ich kanoniczne modele. Teorię uzupełnia prezentacja jej zastosowań w kilku przykładach pochodzących z mechaniki klasycznej.

Prace (5) i (6) poświęcone są zastosowaniu teorii wartości afinicznych, opisanej w poprzednich artykułach. Szczegółowo omawiamy w nich lagranżowskie i hamiltonowskie sformułowania konkretnych teorii fizycznych: nieautonomicznej mechaniki analitycznej, mechaniki w czasoprzestrzeni Newtona w sformułowaniu jednorodnym i mechaniki w czasoprzestrzeni Newtona w sformułowaniu niejednorodnym. Praca (7) poświęcona jest wariacyjnym aspektom teorii afinicznych. Lagranżowski opis układów, dla których funkcje

Lagrange'a zastąpiono cięciem wiązki wartości afinicznych związany jest z afiniczną wersją rachunku wariacyjnego.

Doświadczenia nabyte w trakcie analizy niezależnych od układu odniesienia opisów różnych układów fizycznych pozwoliły nam spojrzeć inaczej na mechanikę kwantową, a zwłaszcza na równania Schrödingera. Jest rzeczą powszechnie znaną, że przy zmianie układu odniesienia funkcja falowa, będąca rozwiązaniem równania Schrödingera, transformuje się w sposób inny niż „zwykłe funkcje”. W pracy (8) rozwijamy ideę traktowania funkcji falowej jako cięcia pewnej jednowymiarowej zespolonej wiązki wektorowej, stowarzyszonej z wiązką główną z grupą strukturalną $U(1)$. Trywializacje tej wiązki związane są z inercjalnymi układami odniesienia w czasoprzestrzeni Newtona. Wyróżnione trywializacje stanowią istotny element struktury. Wiązkę główną z grupą strukturalną $U(1)$ i wyróżnionymi trywializacjami proponujemy nazwać *wiązką główną Schrödingera*. Na wiązce tej istnieje rachunek różniczkowy form (*form falowych*), blisko związany z odpowiednim algebroidem Atiyah'a, który prowadzi do naturalnego uogólnienia pojęcia operatora Laplace'a-Beltramiego związanego z tensorem metrycznym. Swobodny operator Schrödingera okazuje się być operatorem Laplace'a-Beltramiego stowarzyszonym z niezmienniczą pseudo-metryką na wiązce głównej Schrödingera. W pracy (8) pokazujemy również związek prezentowanej teorii z niezależnym od układu odniesienia opisem mechaniki klasycznej w czasoprzestrzeni Newtona, szczególnie z teorią Hamiltona-Jacobiego.

LITERATURA

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics* 2nd edn., Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1978)
- [2] A. Awane, *k-symplectic structures*, J. Math. Phys. **33** (1992), 4046-4052.
- [3] A. Awane, M. Goze: *Pfaffian Systems, k-symplectic Systems*, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht (2000).
- [4] T. J. Courant: *Dirac manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 631-661.
- [5] M. Crainic, R. L. Fernandes *Integrability of Lie brackets* Ann. of Math. **157** (2003), 575—620.
- [6] I. Y. Dorfman: *Dirac structures of integrable evolution equations*, Phys. Lett. A **125** (1987), no. 5, 240-246.
- [7] K. Gawędzki, *On the geometrization of the canonical formalism in the classical field theory*, Rep. Math. Phys. **3** (1972), 307—326.
- [8] M. J. Gotay, J. Isenberg, J. E. Marsden, *Momentum maps and classical relativistic fields, Part I: Covariant field theory*, arXiv:physics/9801019v2 (2004).
- [9] M. J. Gotay, J. Isenberg, J.E. Marsden, *Momentum maps and classical relativistic fields, Part II: Canonical analysis of field theories*. arXiv:math-ph/0411032v1 (2004).
- [10] M. J. Gotay, *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations I: Covariant Hamiltonian Formalism*, in Francaviglia, M., editor, *Mechanics, Analysis, and Geometry: 200 Years After Lagrange*, North Holland, Amsterdam, (1991) 203—235.
- [11] M. J. Gotay, *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations II. Space + time decomposition*, Differential Geom. Appl., **1** (1991), 375-390.
- [12] K. Grabowska, J. Grabowski, P. Urbański, *AV-differential geometry: Poisson and Jacobi structures*, J. Geom. Phys., **52** (2004), 398-446.
- [13] K. Grabowska, P. Urbański, *AV-differential geometry and Newtonian mechanics*, Rep. Math. Phys., **58** (2006), 21-40.
- [14] J. Grabowski, M. Rotkiewicz, *Higher vector bundles and multi-graded symplectic manifolds*, J. Geom. Phys., **59** (2009), 1285-1305.
- [15] J. Grabowski, P. Urbański, *Algebroids — general differential calculi on vector bundles*, J. Geom. Phys. **31** (1999) 111-141.
- [16] C. Günther, *The polysymplectic Hamiltonian formalism in field theory and calculus of variations I: The local case*, J. Differential Geom. **25** (1987), 23-53.
- [17] J. Kijowski, W. Szczyrba, *A canonical structure for classical field theories*, Commun. Math. Phys. **46** (1976), 183—206.

- [18] J. Kijowski, W. M. Tulczyjew, *A Symplectic Framework for Field Theories*, Lecture Notes in Physics, **107**, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1979).
- [19] J. Klein, *Espaces variationelles et mécanique*, Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), 1–124.
- [20] K. Konieczna, P. Urbański, *Double vector bundles and duality*, Arch. Math. (Brno), **35** (1999), 59–95.
- [21] P. Libermann, *Lie algebroids and mechanics*, Arch. Math. (Brno) **32** (1996), 147–162.
- [22] M. de León, E. Lacomba, *Lagrangian submanifolds and higher-order mechanical systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **22** (1989), 3809–3820.
- [23] M. de León, J. C. Marrero and E. Martínez, *Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), R241–R308.
- [24] E. Martínez, *Lagrangian mechanics on Lie algebroids*, Acta Appl. Math. **67** (2001) 295–320.
- [25] E. Martínez, *Geometric formulation of mechanics on Lie algebroids*, in Proc. VIII Fall Workshop on Geometry and Physics, Medina del Campo, 1999, Publicaciones de la RSME 2 (2001), 209–222.
- [26] E. Martínez, *Variational calculus on Lie algebroids*, preprint math-ph/0603028v2.
- [27] M. R. Menzio, W. M. Tulczyjew, *Infinitesimal symplectic relations and generalized Hamiltonian dynamics*, Ann. Inst. H. Poincaré, **28**, (1978), 349–367.
- [28] J. Pradines, *Fibrés vectoriels doubles et calcul des jets non holonomes* (French), Notes polycopiées, Amiens, (1974).
- [29] L. E. Pursell, M. E. Shanks, *The Lie algebra of a smooth manifold*, Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 468–472.
- [30] J. Śniatycki, W. M. Tulczyjew, *Generating Forms of Lagrangian Submanifolds*, Indiana University Mathematics Journal, **22**, (1972), 267–275.
- [31] W. M. Tulczyjew, *Hamiltonian systems, Lagrangian systems, and the Legendre transformation*, Symposia Mathematica, Vol. XIV (Convegno di Geometria Simplettica e Fisica Matematica, INDAM, Rome, 1973), 247–258. Academic Press, London, (1974).
- [32] W. M. Tulczyjew, *Hamiltonian systems, Lagrangian systems, and the Legendre transformation*, Symposia Math. **14**, (1974), 101–114.
- [33] W. M. Tulczyjew, *Relations symplectiques et les equations d’Hamilton-Jacobi relativistes*, C.R. Acad. Sc. Paris, **281**, (1975), 545–548.
- [34] W. M. Tulczyjew, *Sur la différentielle de Lagrange*, C. R. Acad. Sci. Paris. **280**, (1975), 1295–1298.
- [35] W. M. Tulczyjew, *Les sous-varietés Lagrangiennes et la Dynamique Hamiltonienne*, C.R. Acad. Sc. Paris, **283**, (1976), 15–18.
- [36] W. M. Tulczyjew, *Les sous-varietés Lagrangiennes et la Dynamique Lagrangienne*, C.R. Acad. Sc. Paris, **283**, (1976), 675–678.
- [37] W. M. Tulczyjew, *The Legendre Transformation*, Ann. Inst. H. Poincaré, **27**, (1977), 101–114.
- [38] W. M. Tulczyjew, *Geometric Formulation of Physical Theories*, Bibliopolis, (1989).
- [39] W. M. Tulczyjew, *Frame independence of analytical mechanics*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **119**, (1985), no. 5–6, 273–279.
- [40] W. M. Tulczyjew, *A symplectic framework for linear field theories*, Annali di Matematica pura ed applicata, **130**, (1982), 177–195.
- [41] W. M. Tulczyjew, P. Urbański: *A slow and careful Legendre transformation for singular Lagrangians*, The Infeld Centennial Meeting (Warsaw, 1998), Acta Phys. Polon. B **30**, (1999), 2909–2978.
- [42] W. M. Tulczyjew, P. Urbański: *An affine framework for the dynamics of charged particles*, Atti Accad. Sci. Torino, Suppl. n. 2 **126** (1992), 257–265.
- [43] W. M. Tulczyjew, P. Urbański: *Liouville structures*, Proc. 9th International Conference Geometry and Topology of Manifolds, Universitatis Iagiellonicae Acta Mathematica, **47**, (2009), 187–226.
- [44] P. Urbański, *Affine Poisson structure in analytical mechanics*, in *Quantization and Infinite Dimensional Systems*, J.-P. Antoine et al. (Eds.) Plenum Press, New York and London (1994), 123–129.
- [45] P. Urbański, *An affine framework for analytical mechanics*, In: *Classical and Quantum Integrability*, J. Grabowski et al. (Eds.), Banach Center Publications **59**, Warszawa (2003), 257–279.
- [46] A. Weinstein, *Lagrangian mechanics and groupoids*, Fields Inst. Comm. **7** (1996), 207–231.
- [47] H. Yoshimura, J. E. Marsden, *Dirac structures in Lagrangian Mechanics*, J. Geom. Phys., **57**, (2006) Part I 133–156, Part II, 209–250.

Włodzisław Urbański