centrum fizyki teoretycznej
POLSKA AKADEMIA NAUK

Al. Lotników 32/46
02-668 Warszawa
Prof. dr JERZY KIJOWSKI
TEL: (48-22) 847-09-20
FAX: (48-22) 843-13-69
E-MAIL: kijowski@cft.edu.pl

6 Maja 2013 roku

Prof. dr hab. Teresa Rząca-Urban
Dziekan Wydziału Fizyki
Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Hoża 69
00-681 WARSZAWA

**Recenzja dorobku naukowego i rozprawy habilitacyjnej
dr Katarzyny Grabowskiej**

Dr Katarzyna Grabowska jest fizykiem matematycznym analizującym struktury geometryczne pojawiające się w naturalny sposób w klasycznej mechanice i teorii pola. To właśnie z takich badań powstała współczesna geometria różniczkowa, której podstawowych pojęć i praw nimi rządzących nie „wymyślano" przecież w abstrakcyjnej próżni, kierując się jakąś subiektywną estetyką, lecz odkrywano je jako algorytmy prowadzące w najprostszy sposób do rozwiązywania konkretnych problemów fizycznych. Takie wzajemne oddziaływanie fizyki i matematyki nie jest jednostronne: wielkie idee matematyczne Riemanna, Christoffela, Bianchi'ego czy Ricci'ego miały ogromny wpływ na fizyków i doprowadziły między innymi do sformułowania przez Alberta Einsteina współczesnej teorii grawitacji, zwanej ogólną teorią względności.

I choć w fizyce matematycznej potrzebne są badania nastawione na szybkie wyniki, których celem jest doskonalenie technicznych aspektów dobrze znanych nam teorii, to koniecznie powinny one być uzupełnione wysokiej klasy analizą „podciągającą tabory" naszego aparatu pojęciowego służącego do sformułowania poprawnego opisu otaczającej nas rzeczywistości fizycznej. Do tego właśnie nurtu należy zaliczyć badania naukowe prowadzone przez kandydatkę.

Dr Grabowska jest autorem lub współautorem 15 prac naukowych, z których większość została opublikowana w bardzo dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym, jak: *Journal of Geometry and Physics*, *Annals of Global Analysis and Geometry*, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *Journal of Physics A*, czy w końcu *Reports on Mathematical Physics*. Prace są nieźle cytowane – w sumie doliczyłem się ponad 180 cytowań w Google Scholar, co jest dobrym wynikiem w tej dziedzinie nauki (kandydatka podaje liczbę 75 cytowań w Web of Knowledge, jednak baza ta jest wyjątkowo nieprzyjazna wobec nauki polskiej, m. in. ignorując ogromną większość artykułów opublikowanych w najszacowniejszym polskim piśmie z fizyki matematycznej jakim jest – oczywiście zarówno „filadelfijskie" jak i „impakt-faktorowe" – *Reports on Mathematical Physics*). Są to prace obszerne, bynajmniej nie przyczynkowe, zawierające zazwyczaj oryginalne sformułowanie ważnego problemu i jego eleganckie rozwiązanie.

Rozprawa habilitacyjna, zatytułowana „Trójki Tulczyjewa w mechanice i teorii pola" składa się z sześciu artykułów opublikowanych w latach 2006 – 2012 w bardzo dobrych czasopismach. Cztery z nich są współautorskie, a współautorami są prof. Paweł Urbański z Uniwersytetu Warszawskiego oraz prof. Janusz Grabowski z Instytutu Matematycznego PAN. Fakt ten nie osłabia w sposób istotny wagi rozprawy, gdyż wkład habilitantki w powstanie tych prac był dominujący, co znalazło wyraz w odpowiednich oświadczeniach.

I tak w pracy „Geometrical mechanics on algebroids" (Journ. Geometr. Meth. Mod. Phys. **3** (2006), 559-575; autorzy: K. Grabowska, J. Grabowski, P. Urbański) został zaproponowany całkowicie nowy opis tzw. *mechaniki na algebroidach Liego*, zainicjowanej przez wielką francuską matematyczkę P. Liebermann a potem rozwiniętej przez A. Weinsteina i wielu innych autorów. Struktury tego rodzaju powstają w sposób naturalny np. poprzez redukcję zwykłego układu lagranżowskiego ze względu na symetrię. Operacja taka prowadzi często do struktur, które przestają „żyć" na wiązce stycznej. Okazuje się, że zastępuje ją wtedy w naturalny sposób pewien obiekt o strukturze *algebroidu Liego*, stanowiący dualną wersję liniowej struktury Poissona na wiązce wektorowej. Omawiana praca zawiera alternatywną definicję algebroidu jako pewnego morfizmu podwójnych wiązek wektorowych T^*E i TE^* oraz zastosowanie jej do opisu badanej mechaniki. Ciekawym wynikiem pracy jest obserwacja, że do generowania dynamiki z lagranżjanu nie jest potrzebna tożsamość Jacobiego dla odpowiedniego nawiasu a wystarcza nieco uboższa struktura (tzn. algebroid nie musi być Liego).

Zaproponowany w pracy formalizm pozwala uniknąć skomplikowanego języka związanego z prolongacjami algebroidów Liego, używanego wcześniej przez badaczy zajmujących się podobnymi problemami. Formalizm ten pozwala na uniwersalne i proste generowanie dynamiki fazowej dla wszystkich lagranżjanów, również singularnych. W stosunku do klasycznej trójki Tulczyjewa ma on tę dodatkową zaletę, że jest zamknięty za względu na redukcje lagranżowskie.

Naturalną kontynuację powyższych rozważań zawiera trzecia praca z cyklu stanowiącego rozprawę: „Variational calculus with constraints on general algebroids" (J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 175204, 25pp.); autorzy: K. Grabowska, J. Grabowski). Pokazuje się w niej, że w kontekście algebroidów można używać języka wariacyjnego, jeśli tylko prawidłowo zrozumie się podstawowe pojęcia takie jak *dopuszczalne trajektorie* i *dopuszczalne wariacje*. W ten sposób, mechanika na algebroidach przestaje być geometryczną abstrakcją, lecz wpisuje się w całe spektrum teorii wariacyjnych. Dodatkową zaletą tego formalizmu jest jego domkniętość ze względu na redukcje. Jak już wcześniej zauważył J. Marsden ze swoimi współpracownikami, redukcje teorii wariacyjnych prowadzą do nowych klas wariacji dopuszczalnych, całkowicie różnych od klasycznego rozumienia wariacji. Jest to koncepcyjnie najtrudniejsza część teorii, ale otrzymana wariacyjnie dynamika całkowicie zgadza się z tą, którą uzyskuje się na drodze czysto geometrycznej. Klasycznym przykładem jest tutaj redukcja klasycznego układu lagranżowskiego dla bryły sztywnej do układu na algebrze Liego $so(3, R)$, będącego szczególnym przypadkiem dynamiki na algebroidzie Liego.

Szczególnie interesujące są wyniki dotyczące więzów. Wychodzi się tu z obserwacji, że więzy to nie tylko podzbiór dopuszczalnych konfiguracji ale także, a może przede wszystkim, podzbiór dopuszczalnych przesunięć wirtualnych. W literaturze, rozróżnienie między więzami wakonomicznymi, holonomicznymi i nieholonomicznymi opiera się zazwyczaj na analizie samego zbioru dopuszczalnych konfiguracji, podczas gdy należałoby raczej zwracać uwagę na sposób konstrukcji dopuszczalnych wariacji. Tego rodzaju obserwacje są trudne, jeśli badamy jedynie układy na wiązkach stycznych, gdzie prędkości i wariacje infinitezymalne są reprezentowane przez te same obiekty, mianowicie wektory styczne. W ogólniejszych przypadkach, kiedy trzeba wybierać między różnymi możliwymi sposobami uogólniania klasycznych konstrukcji, prędkości i przesunięcia wirtualne stają się rozróżnialne geometrycznie. Prowadzi to do zasadniczego uproszenia pojęciowego teorii.

Następną pracą z tej serii jest artykuł „Dirac algebroids in Lagrangian and Hamiltonian mechanics" (J. Geom. Phys. **61** (2011), 2233-2253); autorzy: K. Grabowska, J. Grabowski). Porządkuje ona pewien chaos panujący w literaturze dotyczącej układów z lagranżjanami osobliwymi, dla których załamuje się konwencjonalny sposób konstruowania opisu hamiltonowskiego, sama zaś dynamika – rozumiana jako równanie różniczkowe na trajektorie w przestrzeni fazowej – nie musi sprowadzać się do postaci pola wektorowego. Jeszcze więcej bałaganu występuje w literaturze dotyczącej układów z więzami, zwłaszcza nieholonomicznymi. O ile wszyscy zgadzają co do prawidłowej postaci równań Eulera-Lagrange'a, to już propozycje opisu uwzględniającego przestrzeń fazową są bardzo różne u różnych autorów, i to zazwyczaj bardzo skomplikowane. Omawiana praca zawiera oryginalną propozycję unifikacji, stanowiącej jednolity i uniwersalny opis bardzo różnych układów mechanicznych, zarówno regularnych i nieregularnych, z więzami i bez więzów. Podstawowe narzędzie stanowi tutaj tzw. *struktura Diraca*, traktowana jako relacja uogólniająca odwzorowanie przyporządkowujące różniczce Hamiltonianu hamiltonowskie pole wektorowe. Pojęcie takiej struktury zostało wprowadzone w literaturze już wcześniej, jako narzędzie do badania całkowalności, jednak jej liniowość nie była nigdy dotąd rozważana, zapewne dlatego, iż jej poprawne sformułowanie możliwe jest tylko w języku *podwójnych wiązek wektorowych*. Taka podwójna wiązka wektorowa została tu zdefiniowana jako rozmaitość wyposażona w dwie, zgodne ze sobą, struktury wiązki wektorowej. Użycie tego pojęcia pozwala w sposób elegancki sformułować warunek zgodności rozmaitych struktur „żyjących" na wiązce wektorowej z liniową strukturą tej wiązki. I taką właśnie sytuację napotykamy w przypadku struktury Diraca. Definicja liniowej struktury Diraca, czyli *algebroidu Diraca*, prosta i naturalna, ale jednocześnie bardzo bogata jeśli chodzi o potencjalne zastosowania, jednoczy wyjątkowe cechy struktury liniowej z geometrią Poissonowską i presymplektyczną.

Praca zwiera wiele wartościowych przykładów. Na uwagę zasługuje zwłaszcza opis układu lagranżowskiego zredukowanego ze względu na symetrię (co powoduje konieczność użycia języka algebroidów) i poddanego więzom nieholonomicznym (co powoduje konieczność użycia struktury Diraca).

Nieco innych aspektów tej problematyki dotyczy artykuł „AV-differential geometry: EulerLagrange equations" (J. Geom. Phys. **57** (2007), 1984-1998); autorzy: K. Grabowska, J. Grabowski, P. Urbański). Zawiera on interesującą próbę uwzględnienia niezmienniczości mechaniki Newtonowskiej względem wyboru inercjalnego układu odniesienia. Obserwując, że energia i pęd transformują się w sposób afiniczny przy zmianie inercjalnego układu odniesienia, autorzy dochodzą do wniosku, że należy je połączyć w jeden obiekt, niezależny już od wyboru układu odniesienia, jako elementu przypadkowego, nie mającego związku z „istotą rzeczy". I to właśnie stanowi motywację przeprowadzonej w tej pracy konstrukcji afinicznej wersji „trójki Tulczyjewa" dla układów, dla których język afiniczny pozwala na uwolnienie się od konkretnego układu odniesienia. Konstrukcję tą prowadzi się w kontekście algebroidów Liego i ich uogólnień, które w wersji afinicznej zastąpione są przez tzw. *affgebroidy*. Zarówno hamiltonowska jak i lagranżowska strona trójki mają charakter afiniczny, przy czym zarówno hamiltonian jak i lagranżjan układu są interpretowane jako cięcia pewnych 1-wymiarowych wiązek afinicznych (AV-wiązek). Taka interpretacja jest zgodna z faktem, że również w konwencjonalnym opisie wielkości te są zawsze zdefiniowane z dokładnością do stałej, a wiec przyjmują „wartości afiniczne".

Na końcu omówię dwa artykuły będące autorstwa samej habilitantki. Pierwszy z nich („Lagrangian and Hamiltonian formalism in field theory: a simple model"; J. Geom. Mech **2** (2010) 375-395), ma charakter przygotowawczy do badań przeprowadzonych w głównej części rozprawy i zawiera analizę modelu „zabawkowego" („toy model"), jakim jest statyka obiektów dwuwymiarowych, dla której konstruuje się „trójkę Tulczyjewa".

Najważniejszą częścią recenzowanej rozprawy (a więc jej „daniem głównym") jest praca „A Tulczyjew triple for classical fields" (J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 145207; 35pp), autorstwa Katarzyny Grabowskiej. Zdobyte przy analizie układów mechanicznych doświadczenia autorka stosuje tu do teorii pola. Praca zawiera bardzo ważną konstrukcję uogólnienia pewnych struktur pojawiających się w rachunku wariacyjnym całek pojedynczych na przypadek całek wielokrotnych. I tutaj autorka bierze jako punkt wyjścia bliskie jej sposobowi myślenia, a ostatnio bardzo spopularyzowane, podejście poprzez tzw. *trójki Tulczyjewa.* Zaproponowana w pracy metoda pozwala na pracę z dowolnym Lagranżjanem, również singularnym (ale pierwszego rzędu różniczkowego!), gdzie transformacja Legendre'a prowadzi na ogół do tzw. *rodziny Morse'a*, jako obiektu generującego w mechanice hamiltonowskiej.

Lagranżowska strona skonstruowanej „trójki", wyprowadzona z rachunku wariacyjnego, jest tu standardowa. Natomiast doświadczenia autorki z opisem afinicznym pozwalają jej w oryginalny sposób skonstruować także stronę hamiltonowską teorii, przy czym uwzględniony został fakt, iż hamiltonian jest cięciem pewnej wiązki afinicznej, a nie funkcją (o wartościach w zbiorze gęstości). Jak to się często zdarza przy przejściu od teorii prostych do bardziej ogólnych, także i tutaj autorka zaobserwowała kilka ciekawych, nowych zjawisk. Na przykład fakt, że konfiguracje infinitezymalne i wariacje są obiektami „innego gatunku geometrycznego" pozwolił na głębsze zbadanie związku między przestrzenią fazową a przestrzenią konfiguracyjną oraz inne spojrzenie na transformację Legendre'a. Wszelkie struktury podobne do symplektycznej (formy symplektyczne i presymplektyczne o wartościach wektorowych) pojawiają się tu w sposób naturalny i wynikają z używanego języka wariacyjnego.

Wyniki te są eleganckie i prowadzą do znacznego postępu w badaniach matematycznej struktury teorii pól fizycznych. Uważam, że jest to bardzo dobra rozprawa habilitacyjna.

Biorąc pod uwagę oryginalność i wagę wyników naukowych zawartych w rozprawie, uwzględniając przy tym oświadczenia współautorów o decydującym wkładzie habilitantki w wyniki zawarte w publikacjach współautorskich stwierdzam, że praca habilitacyjna dr Katarzyny Grabowskiej spełnia wszystkie wymagania zawarte w ustawie o stopniach naukowych i wnoszę o dopuszczenie jej autorki do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Z poważaniem

J. Kijowski

Jerzy Kijowski