

Załącznik 2. Autoreferat

1 Imie i Nazwisko.

Rafał Demkowicz-Dobrzański

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/ artystyczne - z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

- 2007 r. Doktor nauk fizycznych w zakresie fizyki (wyróżnienie), Uniwersytet Warszawski, Warszawa
Tytuł rozprawy: *Rola korelacji w kwantowej teorii estymacji i możliwość dekorelacji stanów kwantowych*
Promotor: prof. dr hab. Marek Kuś
- 2003 r. Magister fizyki teoretycznej (wyróżnienie), Uniwersytet Warszawski, Warszawa
Tytuł pracy: *Klonowanie stanów kwantowych*
Promotor: prof. dr hab. Krzysztof Wódkiewicz

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/ artystycznych.

- 2011-2013 r.
Adiunkt, Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski
Postdoc w ramach projektu TEAM Fundacji na rzecz nauki polskiej
- 2010 r.
Specjalista naukowo-techniczny Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski
Postdoc w ramach projektu TEAM Fundacji na rzecz nauki polskiej
- 2007-2009 r.
Adiunkt naukowy w Instytucie Fizyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
- 2003-2007 r.
Asystent w Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk, Warszawa

4 Wskazanie osiągnięcia* wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

a) tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego,

cykl publikacji: *Fundamentalne ograniczenia na precyzję w metrologii kwantowej*

b) (autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa),

- [1] R. Demkowicz-Dobrzański, J. Kołodyński, M. Guta, *The elusive Heisenberg limit in quantum enhanced metrology*, Nat. Commun. **3**, 1063 (2012)
- [2] M. Jarzyna, R. Demkowicz-Dobrzański, *Quantum interferometry with and without an external phase reference*, Phys. Rev. A **85**, 011801(R) (2012)
- [3] R. Demkowicz-Dobrzański, *Optimal phase estimation with arbitrary a priori knowledge*, Phys. Rev. A **83**, 061802(R) (2011)
- [4] J. Kołodyński, R. Demkowicz-Dobrzański, *Phase estimation without a priori knowledge in the presence of loss*, Phys. Rev. A **82**, 053804 (2010)
- [5] M. Kacprowicz, R. Demkowicz-Dobrzański, W. Wasilewski, K. Banaszek, I. A. Walmsley, *Experimental quantum-enhanced estimation of a lossy phase shift*, Nature Photon. **4**, 357 (2010)
- [6] R. Demkowicz-Dobrzański, *Multi-pass classical vs. quantum strategies in lossy phase estimation*, Laser Phys. **20**, 1197 (2010)
- [7] K. Banaszek, R. Demkowicz-Dobrzański, I. A. Walmsley, *Quantum states made to measure*, Nature Photon. **3**, 673 (2009)
- [8] R. Demkowicz-Dobrzański, U. Dorner, B. J. Smith, J. S. Lundeen, W. Wasilewski, K. Banaszek, I. A. Walmsley, *Quantum phase estimation with lossy interferometers*, Phys. Rev. A **80**, 013825 (2009)
- [9] U. Dorner, R. Demkowicz-Dobrzański, B. J. Smith, J. S. Lundeen, W. Wasilewski, K. Banaszek, I. A. Walmsley, *Optimal Quantum Phase Estimation*, Phys. Rev. Lett. **102**, 040403 (2009)
- [10] P. Kolenderski, R. Demkowicz-Dobrzański, *Optimal state for keeping reference frames aligned and the Platonic solids*, Phys. Rev. A **78**, 052333 (2008)

c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

W dalszej części autoreferatu referencje [1–10] odnoszą się do prac stanowiących cykl publikacji będących podstawową niniejszego wniosku habilitacyjnego, referencje [11–26] dotyczą pozostałych prac wnioskującego nie należących do cyklu, a wszystkie pozostałe referencje są pozycjami literaturowymi przywołanymi dla nadania opisanym tu badaniom właściwego kontekstu. Struktura dalszego tekstu jest następująca. Sekcje 4.1, 4.2 mają charakter wprowadzający i stanowią punkt odniesienia dla przedstawionych dalej wyników. Sekcja 4.3, zawiera skrócony opis oryginalnych wyników, których szczegółowy opis zawierają kolejne sekcje 4.4-4.8.

4.1 Wstęp i motywacja badań

Precyzja z jaką jesteśmy w stanie mierzyć podstawowe wielkości fizyczne takie jak czas, masa, długość itp. ogranicza obszar zjawisk fizycznych jaki może potencjalnie zostać poddany badaniom eksperymentalnym. Stanowi również o sile z jaką jesteśmy w stanie testować istniejące teorie fizyczne, a ponadto determinuje możliwości realizacji ambitnych projektów technologicznych. Jednymi z najbardziej spektakularnych przykładów są pomiary spektroskopowe pozwalające testować przewidywanie elektrodynamiki kwantowej do 12 cyfr znaczących, detektory fal grawitacyjnych będące w stanie wykrywać fale grawitacyjne o amplitudach mniejszych od rozmiaru protonu, czy system GPS którego skuteczność gwarantują precyzyjne zegary atomowe wymagające kalibracji na poziomie jedynie 10 ns na dzień.

Wszelkie pomiary są obarczone niepewnością, która swoje źródło może mieć zarówno w samym badanym układzie, w szumach będących wynikiem oddziaływaniem układu z otoczeniem jak i w niedoskonałościach urządzeń pomiarowych. W ramach fizyki klasycznej wszystkie te źródła nie mają charakteru fundamentalnego i wynikają jedynie z niedoskonałości metod eksperymentalnych, które w zasadzie mogą zostać zminimalizowane do dowolnie niskiego poziomu. Okazuje się, że jest to iluzja wynikająca z nie uwzględnienia kwantowej natury badanych układów. W najbardziej precyzyjnych pomiarach, gdy „klasyczne” źródła szumu zostają zredukowane do bardzo niskiego poziomu, dominujący wkład do niepewności pomiarowej zaczynają mieć efekty kwantowe. W przypadku optycznych technik pomiarowych, skwantowana natura światła powoduje nieodłączną obecność szumu śrutowego w pomiarach natężeń światła, związanego z probabilistycznym zachowaniem pojedynczego fotonu w procesach detekcji. Analogicznie w zagadnieniach kalibracji zegarów atomowych, skwantowana natura poziomów energetycznych w atomach przejawia się w probabilistycznej naturze procesu detekcji liczby atomów w stanach wzbudzonych - tzw. szumu rzutowego - prowadzącego do fluktuacji sygnału pełniącego rolę sprzężenia zwrotnego w kalibracji zegara.

Wpływ szumu śrutowego czy rzutowego na precyzję pomiaru można zmniejszyć przez zwiększenie mocy wiązki światła lub zwiększenie liczby atomów. Efekt ten można zrozumieć przyjmując uproszczony, choć zazwyczaj adekwatny, obraz, w którym w typowych eksperymentach każdy foton i atom ewoluuje niezależnie od pozostałych. Tym samym eksperyment z użyciem dużej liczby fotonów czy atomów, n , można traktować jako n krotne powtórzenie eksperymentu z użyciem pojedynczego obiektu. Zgodnie z prawami statystyki, niepewność

estymacji parametru zmniejszać się będzie w ogólności jak $1/\sqrt{n}$, analogicznie jak to ma miejsce dla niepewności średniej pewnej zmiennej losowej liczonej na podstawie jej n niezależnych realizacji. Ograniczenia na precyzję postaci $1/\sqrt{n}$ noszą w literaturze nazwę standardowej granicy kwantowej, SQL (Standard Quantum Limit).

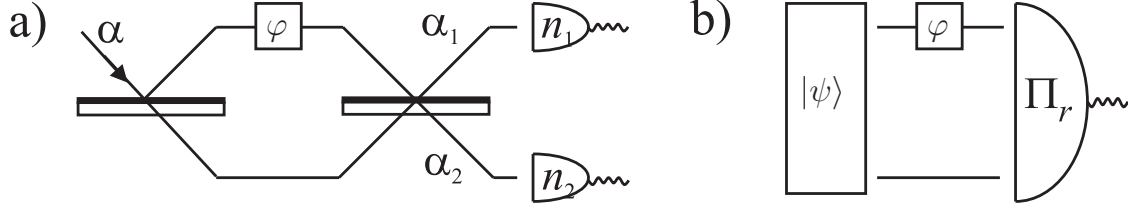
Granica SQL nie ma charakteru fundamentalnego z uwagi na założenie niezależności poszczególnych obiektów kwantowych (fotonów, atomów) w przeprowadzanym procesie pomiarowym. Dzięki przygotowaniu obiektów kwantowych w odpowiednio skorelowanym (splątany) stanie kwantowym możliwe jest teoretycznie uzyskanie lepszej precyzji, niż to ma miejsce w przypadku nieskorelowanych cząstek, przy użyciu takich samych zasobów - tym samym n . W tym ogólniejszym podejściu możliwe jest osiągnięcie skalowania precyzji postaci $1/n$ zwanego granicą Heisenberga, HL (Heisenberg limit). Biorąc pod uwagę duże wartości n w typowych układach metrologicznych, wykorzystanie stanów splątanych mogłoby prowadzić do jakościowej (kwadratowej) poprawy precyzji, a tym samym do niewyobrażalnego postępu w dziedzinie całej metrologii [27].

Dla praktycznej implementacji tych idei konieczne jest jednak rozważenie bardziej realistycznych modeli uwzględniających efekty dekoherencji kwantowej, obecne nieodłącznie w każdym eksperymencie, takie jak straty fotonów, emisja spontaniczna w atomach, fluktuacje zewnętrznych pól elektromagnetycznych itp. Stany splątane optymalne dla wyidealizowanych modeli okazują się często niezwykle wrażliwe na zakłócenia wynikające z nawet bardzo słabego poziomu dekoherencji. Z tego też względu, niezwykle istotne dla całej dziedziny metrologii kwantowej jest wyprowadzenie fundamentalnych ograniczeń na precyzję protokołów wykorzystujących stany splątane w realistycznych modelach *uwzględniających* dekoherencję. W szczególności, jednym z najważniejszych problemów jest odpowiedź na pytanie czy kwadratowy zysk osiągalny dzięki wykorzystaniu stanów splątanych w modelach wyidealizowanych jest obecny również w modelach uwzględniających efekty dekoherencji.

Cykl publikacji będący podstawą niniejszego wniosku habilitacyjnego daje szczegółowe odpowiedzi na poruszone powyżej pytania. W pracach wykazano, że w ogólności najmniejszy poziom dekoherencji powoduje, że asymptotycznie (dla dużych n) nie jest możliwe uzyskanie kwadratowej poprawy precyzji i użycie stanów splątanych pozwala jedynie poprawić precyzję o stały (być może istotny) czynnik nie zależny od n . Stworzono ponadto efektywne narzędzie pozwalające na obliczenie tegoż czynnika a tym samym uzyskanie ograniczenia na maksymalną możliwą poprawę precyzji, na którą można liczyć wykorzystując ogólne stany splątane. Znajomość takich ograniczeń jest kluczowa dla oceny przydatności stanów splątanych w konkretnych implementacjach protokołów metrologicznych i pozwala na realistyczną ocenę całej dziedziny kwantowej metrologii. Pozwala również na ocenę jak blisko fundamentalnych ograniczeń znajdują się obecne implementacje i jaka jest nadzieja na dalszą poprawę precyzji dzięki użyciu np. bardziej wyrafinowanych stanów splątanych.

4.2 Wyidealizowana interferometria kwantowa

Jedną z podstawowych technik pomiarowych w metrologii jest interferometria. Interferometry optyczne tj. interferometr Michelsona, Macha-Zehndera, Fabry-Perota, i wiele innych, pozwalają na niezwykle precyzyjny pomiar odległości pomiędzy elementami optycznymi będącymi składnikami interferometrów i są powszechnie wykorzystywane zarówno w zastosowaniach inżynierskich, naukowych jak i do samej kalibracji innych urządzeń pomia-



Rysunek 1: a) Standardowa konfiguracja interferometru Macha-Zehndera ze stanem koherentnym wysłanym do jednego z portów wejściowych. b) Ogólny schemat estymacji opóźnienia fazowego z dowolnym stanem wejściowym $|\psi\rangle$ i najogólniejszym dopuszczalnym przez mechanikę kwantową pomiarem Π_r .

rowych. Istotę zagadnienia poprawy precyzji dzięki wykorzystaniu nieklasycznych źródeł światła najprościej jest przeanalizować na przykładzie interferometru Macha-Zehndera.

W standardowej konfiguracji, do jednego z portów wejściowych interferometru wpuszczone jest światło klasyczne, matematycznie opisywane jako stan koherentny o amplitudzie α . W wyniku propagacji przez interferometr: rozdzielania na półprzepuszczalnej płytce światłodzielącej, propagacji przez ramiona o względnej różnicy opóźnień fazowych φ i interferencji na kolejnej płytce półprzepuszczalnej wyjściowe amplitudy mają postać: $\alpha_1 = \alpha \sin(\varphi/2)$, $\alpha_2 = \alpha \cos(\varphi/2)$ (Rysunek 1a).

Średnia liczba fotonów rejestrowana w detektorach będzie wynosić odpowiednio $\bar{n}_1 = |\alpha_1|^2 = \bar{n} \sin^2(\varphi/2)$, $\bar{n}_2 = |\alpha_2|^2 = \bar{n} \cos^2(\varphi/2)$, gdzie $\bar{n} = |\alpha|^2$ jest średnią liczbą fotonów na wejściu. W celu estymacji fazy φ na podstawie zarejestrowanej liczby fotonów w każdym z detektorów, n_1, n_2 , należy zadać funkcję $\tilde{\varphi}(n_1, n_2)$ zwaną estymatorem. Naturalnym wyborem (i jak się okazuje optymalnym) w rozważanym przypadku jest estymator postaci $\tilde{\varphi}(n_1, n_2) = \arccos\left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)$. Z uwagi na poissonowskie fluktuacje liczby fotonów rejestrowanych w detektorach, charakterystyczne dla klasycznych źródeł światła, wartość estymowanej fazy będzie również fluktuować od strzału do strzału. Prowadzi to do skalowania niepewności estymacji fazy ze średnią liczbą użytych fotonów postaci:

$$\Delta\varphi = 1/\sqrt{\bar{n}} \quad (1)$$

zwanego skalowaniem szumu śrutowego lub SQL.

Jednym z najprostszych pomysłów na kwantową poprawę precyzji może być zastąpienie wejściowego stanu koherentnego stanem o określonej liczbie fotonów n (stanem Focka). W tej sytuacji łączny rozkład prawdopodobieństwa $p(n_1, n_2)$ dla liczby zarejestrowanych fotonów będzie rozkładem dwumiennym. Okazuje się, że w tym przypadku skalowanie precyzji estymacji z liczbą użytych jest analogiczne jak w przypadku użycia stanów koherentnych, $\Delta\varphi = 1/\sqrt{\bar{n}}$, co wynika z faktu, że efektywnie cały proces można wciąż traktować tak jakby każdy z fotonów „interferował ze sobą samym” i mielibyśmy do czynienia z n niezależnymi eksperymentami jedno fotonowymi. Dopiero użycie ogólniejszych wejściowych stanów światła, w których np. fotony są wpuszczane jednocześnie do obu portów interferometru, może dać szansę na wykorzystanie kwantowych korelacji (splątania) do zwiększania precyzji estymacji.

Poszukując optymalnych strategii estymacyjnych wygodnie jest rozważyć ogólny schemat, w którym dowolny n fotonowy dwu-modowy stan światła

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^n c_k |k, n-k\rangle, \quad (2)$$

doznaje opóźnień fazowego φ , a następnie poddany jest uogólnionemu pomiarowi kwantowemu Π_r , którego rezultatem jest wynik r (Rysunek 1b)¹. Prawdopodobieństwo wyniku r zależy od parametru φ i dane jest przez $p(r|\varphi) = \text{Tr}(|\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|\Pi_r)$, gdzie $|\psi_\varphi\rangle = \sum_{k=0}^n c_k e^{ik\varphi} |k, n-k\rangle$ jest stanem światła po doznaniu opóźnienia fazowego φ .

Jednym z podstawowych problemów teoretycznej metrologii kwantowej jest znalezienie optymalnych stanów światła, tzn. optymalnych amplitud c_k , optymalnych pomiarów oraz estymatorów które pozwolą na maksymalną poprawę precyzji w stosunku do SQL. Rozwiązanie tak postawionego problemu pozwala uzyskać informację o maksymalnej możliwej poprawie precyzji dopuszczalnej w ramach mechaniki kwantowej, a tym samym znaleźć fundamentalnego kwantowego ograniczenia na precyzję estymacji.

Wygodnym narzędziem do uzyskania użytecznych ograniczeń jest kwantowa nierówność Craméra-Rao [28, 29], stwierdzająca, że niezależnie od wyboru pomiaru i estymatora (przy założeniu jego nieobciążoności), dysponując zależnym od estymowanego parametru φ stanem kwantowym ρ_φ (zakładamy, to najogólniejszy przypadek stanu mieszanego), niemożliwe jest osiągnięcie lepszej precyzji estymacji niż:

$$\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{F(\rho_\varphi)}}, \quad (3)$$

gdzie $F(\rho_\varphi)$ jest tzw. kwantową informacją Fishera (QFI - Quantum Fisher Information). W przypadku idealnego interferometru, rozważanego powyżej, stan $\rho_\varphi = |\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|$ jest stanem czystym, dzięki czemu QFI ma wyjątkowo prostą postać:

$$F(|\psi_\varphi\rangle) = 4 \left(\langle \dot{\psi}_\varphi | \dot{\psi}_\varphi \rangle - |\langle \dot{\psi}_\varphi | \psi_\varphi \rangle|^2 \right), \quad (4)$$

gdzie $|\dot{\psi}_\varphi\rangle = \frac{d|\psi_\varphi\rangle}{d\varphi}$ i sprowadza się do równości $F(|\psi_\varphi\rangle) = 4\Delta^2\hat{n}_1$, gdzie $\Delta^2\hat{n}_1$ jest wariancją operatora liczby fotonów podróżujących górnym ramieniem interferometru. W powyższym podejściu, zagadnienie znalezienia optymalnego stanu sprowadza się do znalezienia stanu maksymalizującego powyższą wariancję. Stany takie, zwane stanami n00n [30], mają postać:

$$|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, 0\rangle + |0, n\rangle), \quad (5)$$

a odpowiadająca im QFI, $F(|\psi_\varphi\rangle) = n^2$, prowadzi do nierówności Craméra-Rao:

$$\Delta\varphi \geq 1/n, \quad (6)$$

co daje teoretycznie nadzieję na osiągnięcie granicy Heisenberga (HL).

¹Matematycznie uogólniony pomiar kwantowy opisany jest za pomocą operatorów dodatnio określonych $\Pi_r \geq 0$, takich że $\sum_r \Pi_r = \mathbb{1}$

4.3 Skrócony opis najważniejszych wyników

Z wielu powodów, uproszczone rozważania przedstawione powyżej są daleko niesatysfakcjonujące z punktu widzenia praktycznej interferometrii. Odpowiedzią na powyższe braki jest cykl publikacji będący podstawą niniejszego wniosku habilitacyjnego. Podstawowym problemem jest nieuwzględnienie efektów dekoherencji obecnych we wszystkich realizacjach eksperymentalnych. W przypadku implementacji optycznych najpoważniejszym czynnikiem ograniczającym możliwości wykorzystania nieklasycznych stanów światła takich jak np. stany $n00n$, są straty fotonów. Problem ten został po raz pierwszy przeanalizowany w sposób systematyczny, korzystając z pojęcia informacji Fishera, w pracach [8, 9]. W pracy [6] rozważono wykorzystanie wielokrotnych odbić światła przechodzącego przez element optyczny odpowiedzialny za opóźnienie fazowe w obecności strat i porównano skuteczność takich strategii ze strategiami optymalnymi. Przeprowadzono ponadto realizację eksperymentalną optymalnej estymacji fazy w obecności strat [5]. Osiągnięte wyniki i perspektywy rozwoju całej dziedziny metrologii kwantowej zostały ponadto opublikowane w formie krótkiego artykułu przeglądowego [7]. Powyższe wyniki są omówione szczegółowo w sekcji 4.4.

Opieranie się w analizie osiągalnej precyzji estymacji jedynie na pojęciu informacji Fishera bywa niewystarczające. Podczas gdy nierówność Craméra-Rao jest spełniona dla wszystkich nieobciążonych estymatorów, nie jest oczywiste, że nierówność tę da się wysycić. Co więcej, informacja Fishera jest narzędziem pozwalającym precyzyjnie określić czułość tzw. *lokalnej* estymacji parametru, gdzie zakłada się, że wartość estymowanego parametru fluktuuje nieznacznie wokół *znanej* wartości φ_0 . Z tych to powodów, bardziej praktyczne jest w pewnych sytuacjach użycie alternatywnego Bayesowskiego podejścia do problemu estymacji, w którym jawnie przyjmuje się pewien rozkład a priori parametru φ a następnie minimalizuje się średni koszt estymacji. Unika się wtedy zarówno problemu wysycalności uzyskanych ograniczeń jak i nie zawsze słusznego założenia lokalności. Podejście takie, dla estymacji fazy w obecności strat w przypadku płaskiego rozkładu a priori, zostało po raz pierwszy zaproponowane i rozwiązane w pracy [4]. Rozwiązanie problemu Bayesowskiej estymacji fazy w przypadku *dowolnego* rozkładu a priori zostało z kolei opublikowane w [3]. Wszystkie wyniki dotyczące estymacji Bayesowskiej są omówione szczegółowo w sekcji 4.5.

Kulminacją badań nad zagadnieniem wpływu dekoherencji na osiągalną precyzję w metrologii kwantowej jest praca [1], w której stworzono uniwersalne narzędzia pozwalające na uzyskanie w bezpośredni sposób użytecznych ograniczeń na osiągalną precyzję dla ogólnych modeli dekoherencji. Wykazano tym samym, że w ogólności nawet infinitezymalnie mały szum prowadzi do zniszczenia asymptotycznego skalowania Heisenberga charakterystycznego dla wyidealizowanych model. Wyniki przedstawione są w sekcji 4.6.

Poza problemami estymacji jednoparametrowej, której dotyczą przywołane powyżej prace, przeanalizowano również dwa problemy estymacji wieloparametrowej. W pracy [2] sformułowano ogólne podejście do problemu interferometrii optycznej, w obecności lub braku dodatkowej wiązki stanowiącej odniesienie fazowe dla światła wpuszczanego do interferometru, formułując model estymacji dwuparametrowej. W pracy [10] wykorzystano tzw. macierz Fishera w celu znalezienia stanów n -qubitowych optymalnych z punktu widzenia estymacji elementów grupy obrotu, co jest przykładem estymacji trójparametrowej. Wyniki dotyczące estymacji wieloparametrowej przedstawione są w sekcji 4.7.

4.4 Optymalna lokalna estymacja fazy w obecności strat

W pracach [8, 9] uogólniono wyidealizowane rozważania przedstawione w sekcji 4.2 na realistyczny przypadek interferometru optycznego ze stratami. Rozważono ogólny model tj. przedstawiony na rysunku 1b, z uwzględnieniem strat modelowanych poprzez dodatkowe płytki światłdzielące o transmisjach η_1, η_2 umieszczone w odpowiednich ramionach interferometru. Ze względu na obecność strat, wyjściowy stan światła ρ_φ jest stanem mieszanym i nie jest możliwe skorzystanie z prostego wyrażenia na informację Fishera, równanie (4), obowiązującego w przypadku stanów czystych. Ścisłe rzecz biorąc stan wyjściowy ma postać:

$$\rho_\varphi = \Lambda_\varphi(|\psi\rangle\langle\psi|) = U_\varphi\Lambda(|\psi\rangle\langle\psi|)U_\varphi^\dagger, \quad (7)$$

gdzie U_φ odpowiada idealnej unitarnej ewolucji wynikającej z istnienia opóźnienia fazowego w interferometrze, a Λ opisuje nieunitarną ewolucję spowodowaną obecnością strat (dekoherencją). Co więcej, jak pokazano w pracach [8, 9] kolejność uwzględnienia strat i opóźnień fazowych nie wpływa na ostateczną postać stanu. W celu przeprowadzenia ścisłych obliczeń konieczne jest użycie ogólnego wyrażenia na informację Fishera, wykorzystującego tzw. symetryczną pochodną logarytmiczną, które wymaga wykonania rozkładu własnego ρ_φ i tym samym czyni czyni analityczne poszukiwanie optymalnych stanów wejściowych niemożliwym, a numeryczną optymalizację niezwykle czasochłonną w przypadku dużych liczb fotonów n . W pracy [9] pokazano, że w przypadku strat w jednym ramieniu $\eta_1 = \eta, \eta_2 = 1$, wyrażenie na informację Fishera upraszcza się do następującej średniej ważonej:

$$F(\rho_\varphi) = \sum_{l=0}^n p_l F(|\psi_\varphi^{(l)}\rangle), \quad (8)$$

gdzie p_l jest prawdopodobieństwem straty l fotonów, a $|\psi_\varphi^{(l)}\rangle$ jest warunkowym stanem czystym światła w sytuacji straty l fotonów. Dzięki powyższej jawnej postaci wyrażenia możliwe było wykonanie numerycznej optymalizacji po parametrach c_k ogólnego wejściowego stanu n fotonowego, równanie (2) dla $n < 80$, i tym samym znalezienie ograniczenia na maksymalną precyzję w zależności od parametru strat η . Wykazano ponadto, że optymalizacja sprowadza się do maksymalizacji funkcji wklęsłej na zbiorze wypukłym, a tym samym daje gwarancję, że znalezione lokalne maksimum będzie jednocześnie maksimum globalnym. W przypadku strat w obu ramionach, pokazano, że w tym przypadku postępowanie analogiczne jak poprzednio nie prowadzi już do ścisłej równości, ale wciąż można uzyskać użyteczne górne ograniczenie na informację Fishera postaci:

$$F(\rho_\varphi) \leq \sum_{l_1=0}^n \sum_{l_2=0}^{n-l_1} p_{l_1, l_2} F(|\psi_\varphi^{(l_1, l_2)}\rangle), \quad (9)$$

gdzie p_{l_1, l_2} jest prawdopodobieństwem strat l_1 fotonów w górnym a l_2 fotonów w dolnym ramieniu, a $|\psi_\varphi^{(l_1, l_2)}\rangle$ jest odpowiadającym tej sytuacji warunkowym stanem światła. Analiza górnego ograniczenia jest wystarczająca do wyciągnięcia wniosków na maksymalną osiągalną precyzję. Ponadto jak wykazano numerycznie w [9] powyższe przybliżenie było niezwykle dokładne i nie prowadziło do istotnych odstępstw w stosunku do informacji Fishera liczonej ściśle. Analiza powyższych wyrażeń i ich optymalizacja po stanach wejściowych

pozwołała uzyskać pierwsze numeryczne wyniki sugerujące, że obecność strat niszczy w sposób gwałtowny idealną granicę Heisenbega i w granicy asymptotycznej skalowanie precyzji ma najprawdopodobniej klasyczny charakter $1/\sqrt{n}$. W pracy [8] przeanalizowano ponadto strukturę optymalnych stanów oraz wykazano nieoptymalność strategii opartych o wykorzystanie stanów $n00n$ w przypadku obecności strat. Dowiedziono również, że ani rozważanie rozróżnialnych cząstek, ani stanów o nieokreślonej liczbie fotonów nie wpłynęłyby na poprawę precyzji, a tym samym ich rozważanie jest nieistotne z punktu widzenia poszukiwania fundamentalnych ograniczeń.

W pracy [6] powyższe wyniki uogólniono również na przypadek możliwości wykorzystanie wielokrotnych odbić światła przechodzącego przez próbkę będącą źródłem opóźnienia fazowego. Porównano optymalne strategie kwantowe wykorzystujące określoną liczbę fotonów n z jedno-fotonowymi wieloodbiciowymi strategiami estymacji fazy w obecności strat i wykazano, że nieklasyczne stany światła są niezbędne dla osiągnięcia maksymalnej poprawy precyzji i nie jest możliwe zastąpienie ich prostymi strategiami opartymi o wielokrotne odbicia pojedynczych fotonów czy klasycznych wiązek światła. Analizę przeprowadzono zarówno przy założeniu, że wielokrotne odbicia są traktowane jako zasób (uwzględniane w liczbie n), jak i w sytuacji gdy ich wykorzystanie nie jest uwzględniane w bilansie całkowitych zużytych zasobów.

Analizę teoretyczną optymalnych lokalnych strategii estymacji fazy w obecności strat uzupełnia praca doświadczalna, w której zrealizowano optymalną strategię estymacyjną opartą o stany dwufotonowe światła [5]. Pozwoliło to zademonstrować wyraźną przewagę optymalnych stanów dwufotonowych, znalezionych w oparciu o teoretyczne prace [8, 9], zarówno nad strategiami klasycznymi jak i strategiami opartymi o wykorzystanie stanów $n00n$. W pracy przeprowadzono drobiazgową analizę statystyczną uzyskanych wyników i wykazano, że uzyskane precyzję odpowiadają fundamentalnym ograniczeniom kwantowym obliczonym przy uwzględnieniu niedoskonałości eksperymentalnych takich jak straty i niedoskonała widzialność interferometru.

W pracy [7] będącej komentarzem dla czasopisma Nature Photonics, podsumowano osiągnięcia metrologii kwantowej zarówno od strony teoretycznej jak i eksperymentalnej ze szczególnym naciskiem na problemy interferometrii optycznej i spektroskopii atomowej. Podkreślono rolę odpowiedniego ilościowego określenia zasobów będących punktem odniesienia dla porównywania strategii klasycznych i kwantowych. W szczególności, zwrócono uwagę, że większość z eksperymentów o charakterze „proof-of-principle” demonstrujących kwantową poprawę precyzji, opiera się na metodach post-selekcji które w większości przypadków przy bardziej drobiazgowej analizie nie pozwalają na wyciągnięcie jednoznacznych wniosków co do przydatności praktycznej zrealizowanych implementacji strategii kwantowych.

4.5 Bayesowska estymacja fazy w obecności strat

Alternatywnym podejściem do optymalnej estymacji fazy, w stosunku do analizy opartej o kwantową informację Fishera, jest podejście Bayesowskie. Niech rozkład a priori $p(\varphi)$ opisuje wiedzę na temat wartości fazy przed przeprowadzeniem pomiarów—w szczególności $p(\varphi) = 1/2\pi$ będzie odpowiadać sytuacji braku jakiegokolwiek wiedzy na temat φ . Przyjmując, że na stanie $\rho_\varphi = \Lambda_\varphi(|\psi\rangle\langle\psi|)$, będącym efektem końcowym ewolucji zależnej od φ , wykonany jest pomiar Π_r , na podstawie którego estymowana jest faza zgodnie z estymatorem $\tilde{\varphi}(r)$,

średni koszt estymacji dany jest wzorem:

$$\bar{C} = \int_0^{2\pi} d\varphi p(\varphi) \text{Tr}(\rho_\varphi \Pi_r) C(\varphi, \tilde{\varphi}(r)), \quad (10)$$

gdzie $C(\varphi, \tilde{\varphi})$ jest funkcją kosztu. Poszukiwanie optymalnych Bayesowskich strategii estymacji sprowadza się do znalezienia pomiarów Π_r , estymatorów $\tilde{\varphi}(r)$ oraz wejściowych stanów $|\psi\rangle$ (współczynników c_k w równaniu (2)) które zminimalizują powyższe wyrażenie. W ogólności jest to problem niesłychanie trudny matematycznie i nie jest możliwe znalezienie jego analitycznych rozwiązań.

W pracy [4] rozważono problem estymacji fazy w obecności strat i przy braku wiedzy apriori, $p(\varphi) = 1/2\pi$, oraz dla naturalnej funkcji kosztu $C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4 \sin^2[(\varphi - \tilde{\varphi})/2]$ —prosta funkcja kosztu która dla małych różnic $\varphi - \tilde{\varphi}$, przybliża wariancję, a jednocześnie respektuje periodyczną naturę estymowanego parametru. Wykazano, że podobnie jak w przypadku bezstratnym [31], poszukiwania optymalnego pomiaru i estymatora mogą być, bez utraty optymalności, ograniczone do klasy tzw. pomiarów kowariantnych [32], czyli zestawu operatorów pomiarowych $\Pi_{\tilde{\varphi}}$, t.ż. $\int \frac{d\tilde{\varphi}}{2\pi} \Pi_{\tilde{\varphi}} = \mathbb{1}$, $\Pi_{\tilde{\varphi}} = U_{\tilde{\varphi}} \Pi_0 U_{\tilde{\varphi}}^\dagger$, gdzie Π_0 jest pewnym ustalonym operatorem dodatnim. Pokazano, że optymalny operator Π_0 ma postać:

$$\Pi_0^{\text{opt}} = \bigoplus_{n'=0}^n |e_{n'}\rangle \langle e_{n'}|, \quad |e_{n'}\rangle = \sum_{k=0}^{n'} |k, n' - k\rangle \quad (11)$$

gdzie suma prosta jest wykonywana po sektorach odpowiadających różnej całkowitej liczbie niestraconych fotonów. W rezultacie wyprowadzono wzór na minimalny osiągalny koszt estymacji postaci:

$$\bar{C}_{\min} = 2 - \lambda_{\max} \quad (12)$$

gdzie λ_{\max} jest największą wartością własną macierzy A o wymiarach $n + 1 \times n + 1$, której jedyne niezerowe elementy macierzowe są dane przez:

$$A_{k-1,k} = A_{k,k-1} = \sum_{l_1, l_2=0}^{k, n-k} \beta_k^{l_1, l_2} \beta_{k-1}^{l_1, l_2}. \quad (13)$$

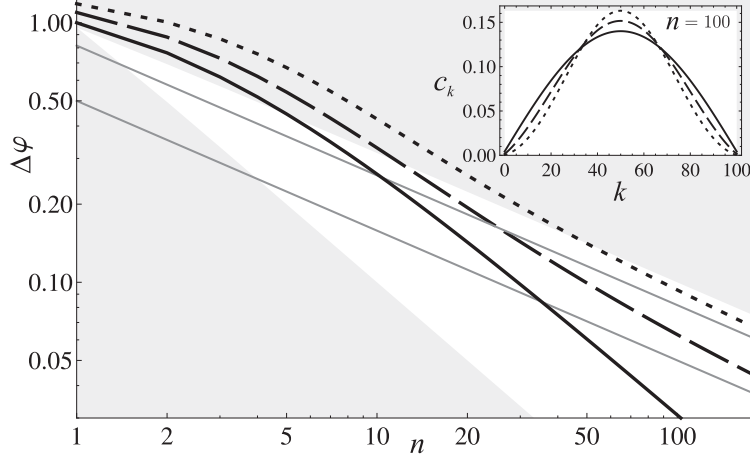
gdzie

$$\beta_k^{l_1, l_2} = \sqrt{B_{l_1}^k(\eta_1) B_{l_2}^{n-k}(\eta_2)}, \quad B_l^n(\eta) = \binom{k}{l} (1-\eta)^l \eta^{n-l}, \quad (14)$$

gdzie η_1, η_2 są efektywnymi współczynnikami transmisji światła w dwóch ramionach interferometru.

Korzystając z powyższych narzędzi znaleziono numerycznie optymalne stany i precyzję estymacji w zakresie do $n = 100$ fotonów. Głównym wynikiem pracy było jednak uzyskanie po raz pierwszy w literaturze analitycznego wzoru na asymptotyczne ograniczenie osiągalnej precyzji na podstawie analizy własności algebraicznych macierzy A . W przypadku strat w jednym ramieniu ($\eta_1 = \eta, \eta_2 = 1$) oraz równych strat w obu ramionach ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$) uzyskano jawne ograniczenia odpowiednio:

$$\Delta\varphi \geq \sqrt{\frac{1-\eta}{4\eta n}}, \quad \Delta\varphi \geq \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta n}}. \quad (15)$$



Rysunek 2: Wykres w skali log-log minimalnej niepewności estymacji fazy w funkcji użytej liczby fotonów i równych strat w obu ramionach: $\eta = 1$ (linia ciągła), $\eta = 0.8$ (linia przerywana), $\eta = 0.6$ (linia kropkowana). Bały obszar w środku odpowiada $1/n < \Delta\varphi < 1/\sqrt{n}$. Szare linie reprezentują analityczne ograniczenia asymptotyczne dla $\eta = 0.8$, $\eta = 0.6$. Wstawiony obrazek ilustruje strukturę optymalnych stanów odpowiednio dla trzech poziomów strat dla $n = 100$.

Wyniki uzyskane w pracy [4] były tym samym pierwszym analitycznym argumentem za stwierdzeniem, że obecność dekoherencji implikuje asymptotyczne skalowanie precyzji postaci $1/\sqrt{n}$, a zysk kwantowy ma charakter mnożenia przez współczynnik a nie korzystniejszego wykładnika skalowania precyzji z n . Uzyskane wyniki są zilustrowane na wykresie 2. Należy podkreślić, że praca w czasie niespełna 3 lat zebrała aż 19 cytowań.

Podejście Bayesowskie w metrologii rozwinięto dodatkowo w pracy [3], gdzie przeanalizowano problem Bayesowskiej estymacji fazy dla dowolnego rozkładu apriori $p(\varphi)$ i prostej funkcji kosztu $C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4 \sin^2[(\varphi - \tilde{\varphi})/2]$. Korzystając z narzędzi stosowanych w problemach separowalności stanów kwantowych—metoda dodatniej częściowej transpozycji (positive partial transpose, PPT)—wykazano, że optymalna precyzja estymacji jest dana przez:

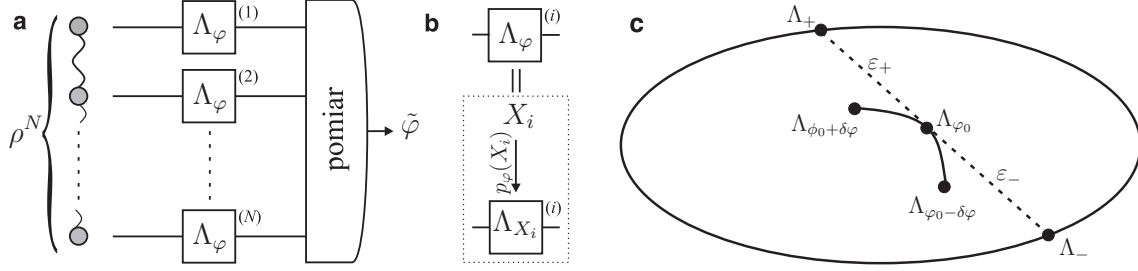
$$\Delta\varphi = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \|R\|_1\right)}, \quad (16)$$

gdzie $\|\cdot\|_1$ oznacza normę śladową macierzy, a macierz R dana jest jawnie jako

$$R = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi p(\varphi) e^{i\varphi} \rho_{\varphi}, \quad (17)$$

przy czym ρ_{φ} jest stanem końcowym na którym wykonywany jest pomiar w celu estymacji parametru φ .

Co więcej, wykazano, że optymalna strategia estymacji polega na wykonaniu pomiaru von-Neumana w bazie własnej operatora $U = V_R U_R^{\dagger}$, gdzie V_R , U_R są macierzami unitarnymi pojawiającymi się w rozkładzie osobliwym $R = U_R \Lambda_R V_R^{\dagger}$, a odpowiadające wynikom pomiaru fazy wartości własnych U są optymalnymi estymatorami. Bazując na powyższych wynikach,



Rysunek 3: **(a)** Ogólny schemat metrologii kwantowej z nieskorelowanym szumem. n -cząstkowy stan kwantowy zostaje wpuszczony w n równoległych kanałów których działanie zależy od parametru φ . Na podstawie wyników pomiaru stanu wyjściowego następuje estymacja parametru za pomocą estymatora $\tilde{\varphi}$. **(b)** Idea klasycznej symulacji kanału kwantowego. Kanał Λ_φ jest interpretowany jako mieszanka innych kanałów Λ_X , gdzie zależność od φ zostaje przeniesiona to prawdopodobieństw $p_\varphi(X)$. **(c)** Konstrukcja pozwalająca na znalezienie „odległości” kanału od brzegu zbioru wszystkich kanałów kwantowych i tym samym wyprowadzenie ograniczenia danego wzorem (18).

zaproponowano iteracyjną metodę pozwalającą znajdować optymalne pomiary i stany w sposób efektywny.

Powyższe narzędzia wykorzystano, do zbadania obszaru pośredniego pomiędzy znanymi wynikami uzyskiwanymi za pomocą kwantowej informacji Fishera i Bayesowskimi metodami opierającymi się na symetrii wynikającej z braku wiedzy apriori. Zbadano numerycznie zysk precyzji w porównaniu z wiedzą apriori i zidentyfikowano reżim wystarczająco wąskiego rozkładu apriori aby uzyskane optymalne stany były analogiczne jak w podejściu opartym o informację Fishera.

4.6 Efektywne metody wyznaczania ograniczeń na precyzję w estymacji jednoparametrowej dla ogólnych modeli dekoherencji

Przedstawione powyżej wyniki numeryczne i analityczne prowadzące do wniosków o kluczowym wpływie dekoherencji na asymptotyczne skalowanie precyzji w interferometrii były ograniczone w zasadzie do jednej klasy modeli uwzględniających straty fotonów. Celem pracy [1] było sformułowanie ogólnego podejścia do zagadnienia znalezienia ograniczeń na optymalną precyzję osiągalną w metrologii kwantowej w obecności dekoherencji, nie ograniczając się do konkretnego modelu dekoherencji. Zaproponowano dwie efektywne metody znajdowania ograniczeń bazujące na matematycznych ideach klasycznej symulacji (classical simulation, CS) [33] oraz rozszerzenia kanału (channel extension, CE) [34]. Metody stosują się w przypadku modeli w których dekoherencja działa niezależnie na każdą z cząstek (patrz rysunek 3a). Co warto podkreślić, dzięki metodzie CS możliwe jest wyprowadzenie ograniczeń na precyzję estymacji bazując jedynie na geometrii kanałów kwantowych. W pracy [1] wykazano, że myśląc o estymacji parametru φ jako o estymacji kanału który porusza się wzdłuż pewnej trajektorii w przestrzeni kanałów (patrz rysunek 3c) za pomocą metody CS

możliwe jest wyprowadzenie ograniczenia na osiągalną precyzję postaci:

$$\Delta\varphi \geq \sqrt{\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{n}}, \quad (18)$$

gdzie ε_{\pm} są „odległościami” kanału Λ_{φ} od brzegu przestrzeni kanałów wzdłuż stycznej do trajektorii w takim sensie, że kanały brzegowe są postaci $\Lambda_{\pm} = \Lambda_{\varphi} \pm \varepsilon_{\pm} \partial_{\varphi} \Lambda_{\varphi}$. Oznacza, że dla dowolnego procesu dekoherencji dla którego $\varepsilon_{\pm} > 0$ (co jest sytuacją typową) powyższa konstrukcja pozwala natychmiast wyciągnąć wniosek co do asymptotycznego charakteru skalowania postaci $1/\sqrt{n}$ i nie możliwe jest osiągnięcie skalowania Heisenberga.

W pracy [1] zastosowano ponadto metodę CE dla kanału zapisanego za pomocą operatorów Krausa $\Lambda_{\varphi}(\rho) = \sum_i K_i(\varphi) \rho K_i^{\dagger}(\varphi)$ i wykorzystano fakt, że osiągalna precyzja jest zawsze ograniczona od dołu przez:

$$\Delta\varphi \geq \frac{1}{2\sqrt{n \min_h \|\alpha_K\|}}, \quad (19)$$

gdzie macierz α_K ma jawną postać

$$\alpha_K = \sum_i \left[\left(\partial_{\varphi} K_i(\varphi) - i \sum_j h_{ij} K_j(\varphi) \right)^{\dagger} \left(\partial_{\varphi} K_i(\varphi) - i \sum_{j'} h_{ij'} K_{j'}(\varphi) \right) \right], \quad (20)$$

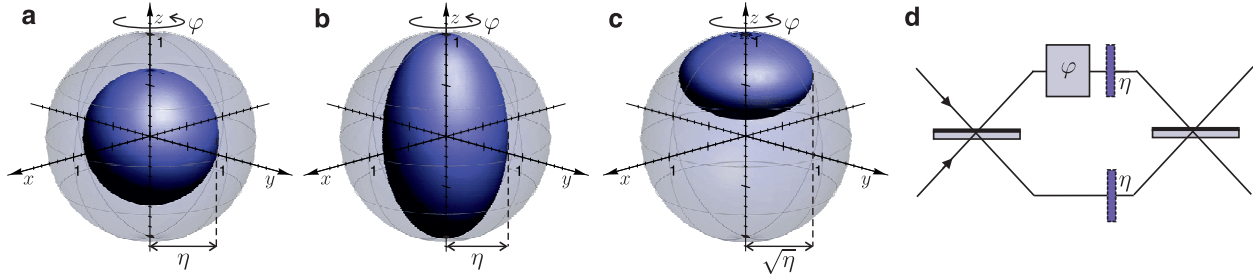
$\|\cdot\|$ oznacza normę operatorową, a minimalizacja po macierzy h odpowiada przeszukiwaniu równoważnych postaci Krausa kanału kwantowego i jest dodatkowo ograniczona więzem:

$$\sum_{ij} h_{ij} K_i^{\dagger}(\varphi) K_j(\varphi) = i \sum_i \partial_{\varphi} K_i^{\dagger}(\varphi) K_i(\varphi). \quad (21)$$

Wykazano, że powyższy problem optymalizacyjny można rozwiązać za pomocą tzw. programowania pół-określonego (semi-definite programming), dla którego istnieją efektywne procedury numeryczne gwarantujące znalezienie globalnego minimum. Dowiedziono ponadto, że metoda CS jest pewnym szczególnym podprzypadkiem metody CE i w związku z czym metoda CE w ogólności zapewnia zawsze ściślejsze ograniczenia na precyzję, kosztem braku intuicyjnej interpretacji geometrycznej jako oferuje z kolei metoda CS.

Stosując powyższe metody znaleziono ograniczenia na precyzję dla problemu estymacji fazy w przypadku uwzględnienia najczęściej spotykanych modeli dekoherencji tj.: depolaryzacja, defazowanie, emisja spontaniczna oraz straty (patrz rysunek 4). Pokazano w szczególności, że metoda CS daje równie dobre wyniki co metoda CE w przypadku modelu defazowania, ale nie może być zastosowana do modelu strat i emisji spontanicznej z uwagi na fakt, że kanały te leżą na brzegu zbioru kanałów i styczna do ich trajektorii znajduje się poza zbiorem: $\varepsilon_{\pm} = 0$. Porównanie ograniczeń uzyskanych metodami CS i CE zawiera tabela 1.

Powyższe metody zostały również zastosowane do analizy jednej z najbardziej spektakularnych realizacji idei metrologii kwantowej, czyli interferometru fal grawitacyjnych GEO600, gdzie wykorzystanie stanu ściśniętej próżni prowadzi do pokonania klasycznych ograniczeń na precyzję [35]. Uzyskane wyniki, były przyjęte entuzjastycznie przez grupę eksperymentalną, jako że w szczególności wykazały, że w praktyce technika oparta o interferowanie



Rysunek 4: Graficzna reprezentacja najpopularniejszych modeli dekoherencji. Procesy dekoherencji qubitu są zilustrowane odpowiednią transformacją kuli Blocha (a) Depolaryzacja (b) Defazowanie (c) Emisja spontaniczna (d) Stratny interferometr, gdzie η odpowiada współczynnikowi transmisji.

Model	Depolaryzacja	Defazowanie	Emisja spontaniczna	Straty
$\Delta\varphi_{CS}$	$\sqrt{\frac{(1-\eta)(1+3\eta)}{4\eta^2n}}$	$\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\eta^2n}}$	-	-
$\Delta\varphi_{CE}$	$\sqrt{\frac{(1-\eta)(1+2\eta)}{2\eta^2n}}$	$\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\eta^2n}}$	$\sqrt{\frac{1-\eta}{4\eta n}}$	$\sqrt{\frac{1-\eta}{\eta n}}$

Tablica 1: Ograniczenia na precyzję skalujące się jak $1/\sqrt{n}$ wyprowadzone dla różnych modeli dekoherencji metodami klasycznej symulacji (CS) oraz rozszerzenia kanału (CE), gdzie $0 \leq \eta \leq 1$ jest parametrem dekoherencji danego modelu, przy czym $\eta = 1$ oznacza brak a $\eta = 0$ oznacza pełną dekoherencję.

światła koherentnego ze stanem ściśniętej próżni jest optymalna w reżimie wielo-fotonowym i nie ma potrzeby rozważania bardziej wyrafinowanych kwantowych stanów światła jako potencjalnych stanów wejściowych w interferometrze.

Co warto podkreślić praca [1] w ciągu niewiele ponad półroku od opublikowania w Nature Communications zebrała 8 cytowań (brak autocytowań) według Web of Science co pozwala mieć nadzieję, że stanie się ona jedną z kluczowych prac wyznaczającą dalsze kierunki rozwoju metrologii kwantowej.

4.7 Modele wieloparametrowe w metrologii kwantowej

Poza modelami estymacji jednoparametrowej, której dotyczyły wcześniej omawiane prace, w cyklu publikacji znajdują się ponadto dwie prace [2, 10] dotyczące zagadnienia estymacji wieloparametrowej.

W pracy [2] zwrócono uwagę na, zazwyczaj pomijaną w teoretycznej analizie problemów interferometrii kwantowej z użyciem nieklasycznych stanów światła dodatkową, klasyczną wiązkę odniesienia. Wiązka taka jest w ogólności konieczna aby nadać fizyczny sens fazie stanów koherentnych/ściśniętych używanych w zagadnieniach interferometrycznych i jest standardowo wykorzystywana w realizacji tzw. pomiarów homodynowych. Pokazano, że używając naiwnie pojęcie kwantowej informacji Fishera w zagadnieniach interferometrii z użyciem stanów koherentnych/ściśniętych można dojść do pozornie paradoksalnych wniosków,

że optymalna strategia pomiarowa zależy od formalnego rozdzielania wielkości estymowanego opóźnienia fazowego pomiędzy dwa ramiona interferometru. Pozorny paradoks bierze się z domyślnego traktowania wszelkich opóźnień fazowych jako zdefiniowanych względem dodatkowej wiązki odniesienia. Przeprowadzono poprawną analizę tego typu problemów, do której konieczne jest wykorzystanie narzędzi dwuparametrowej teorii estymacji kwantowej, a w szczególności analiza całej macierzy Fishera—należy rozważać dwie fazy będące względnymi opóźnieniami fazowymi względem dodatkowej wiązki odniesienia. Wykonano obliczenia optymalnej precyzji estymacji względnego opóźnienia fazowego pomiędzy ramionami interferometru (różnic opóźnień względem dodatkowej wiązki odniesienia) w zależności od mocy wiązki odniesienia i zbadano dwa skrajne przypadki: silnej wiązki odniesienia, którą można traktować jako idealną referencję fazy jak i przypadek braku wiązki odniesienia, kiedy to konieczne jest uśrednienie wpuszczanych stanów światła po nie mającej fizycznego znaczenia wartości fazy. Wykazano poprawę precyzji estymacji w przypadku strat w zależności od siły wiązki odniesienia.

W pracy [10] rozważono problem uzgodnienia orientacji kartezjańskich układów odniesienia za pomocą przesyłania optymalnych stanów n -qubitów. Problem ten znalazł już wcześniej swoje rozwiązanie w przypadku podejścia Bayesowskiego [36], ale nie znane było jego ogólne rozwiązanie oparte o narzędzia informacji Fishera, a mające zastosowanie w przypadku uzgadniania układów odniesienia nieznacznie obróconych względem siebie. Matematycznie jest to problem estymacji elementu grupy $SU(2)$ w pobliżu elementu jednostkowego bazując na działaniu jego reprezentacji tensorowej na stan n -qubitowy. Tym samym jest to problem estymacji trójparametrowej. Analizując macierz Fishera dla tego przypadku, wykazano że poszukiwania optymalnych stanów można ograniczyć do podprzestrzeni całkowicie symetrycznej—co nie jest prawdą w przypadku podejścia Bayesowskiego—a optymalne stany można elegancko opisać geometrycznie używając tzw. reprezentacji Majorany. W reprezentacji Majorany, dowolny stan symetryczny n qubitów, można przedstawić jako n punktów na sferze Blocha. Stan symetryczny otrzymywany jest poprzez zapisanie stanu n -qubitów jako stanu produktowego odpowiednich stanów pojedynczych qubitów reprezentowanych przez punkty na sferze Blocha, a następnie wykonaniu pełnej symetryzacji stanu. Dzięki temu narzędziu, uzyskano intuicyjny wgląd w strukturę optymalnych stanów, pokazując w szczególności, że punkty na sferze Blocha odpowiadające wierzchołkom brył platońskich prowadzą do optymalnych stanów z punktu widzenia estymacji orientacji układu odniesienia.

4.8 Podsumowanie

Przedstawiony cykl publikacji stanowi istotny wkład w rozwój dynamicznie się rozwijającej dziedziny metrologii kwantowej. Co warto podkreślić, poza wieloma szczegółowymi wynikami dotyczącymi optymalnych strategii metrologicznych uzyskanymi poprzez analizę konkretnych modeli teoretycznych, stworzono uniwersalne narzędzia pozwalające na efektywną analizę ogromnej klasy realistycznych modeli kwantowych. Tym samym znaczenie powyższych prac wykracza daleko poza spektrum analizowanych w nich konkretnych problemów fizycznych tj. kwantowa interferometria optyczna czy spektroskopia atomowa, a stworzone narzędzia mogą być w przyszłości wykorzystane dla badania innych zagadnień metrologicznych tj. np. magnetometria, jak i w z pozoru nie związanych tematach tj. odporność algorytmów kwantowych na dekoherencję. Ponadto, dzięki wykorzystaniu wielu róż-

norodnych zaawansowanych narzędzi matematycznych tj. estymacja Bayesowska, informacja Fishera, pomiary kowariantne, czy geometria kanałów kwantowych, w kontekście realistycznych modeli optyki kwantowej, cykl prac przyczynia się z pewnością do zbliżenia funkcjonujących często we względnej izolacji teoretyczno-matematycznych i doświadczalnych aspektów metrologii kwantowej.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych (artystycznych).

a) dane bibliometryczne (stan na dzień 16 Maja 2013)

Liczba opublikowanych artykułów: 23 + 3 preprinty

Cytowania bez autocytowań: 258

Całkowity impact factor: 125

Indeks Hirscha: 8

b) badania naukowe nie stanowiące wkładu do habilitacji

Pozostały dorobek naukowy habilitanta dotyczy szerokiego spektrum zagadnień z dziedziny kwantowej teorii informacji. Omówienie najświeższymi prac (preprintów) będących naturalnym ciągiem dalszym badań nad zagadnieniami metrologii kwantowej znajduje się w sekcji 5.1. Pozostałe sekcje zawierają omówienie publikacji nie związanych bezpośrednio z metrologią kwantową i dotyczą kryptografii i komunikacji kwantowej (sekcja 5.2), teorii splątania i roli korelacji w kwantowej teorii informacji (sekcja 5.3) oraz problemów poszukiwania optymalnych strategii przybliżonego klonowania stanów kwantowych (sekcja 5.4).

5.1 Prace dotyczące metrologii kwantowej nie uwzględnione w cyklu publikacji

W pracy [11] rozwinięto metody przedstawione w [1] tak by możliwe było wyprowadzenie silniejszych ograniczeń na precyzję w reżimie skończonych liczby fotonów n bez konieczności przechodzenia do asymptotycznej granicy $n \rightarrow \infty$. Przeprowadzono ponadto analizę różnych z pozoru nie związanych ze sobą metod wyznaczeń granic precyzji w metrologii kwantowej tj. klasyczna symulacja (classical simulation, CS), kwantowa symulacja (quantum simulation, QS), metoda prawej pochodnej logarytmicznej (right logarithmic derivative, RLD) oraz metoda rozszerzenia kanału (channel extension, CE). Stworzono hierarchię tych metod z punktu widzenia siły oferowanych przez nie ograniczeń i zakresu modeli do których się stosują. Wykazano, że metoda RLD daje w ogólności silniejsze ograniczenia niż metoda CS, a metody CS i QS z kolei są szczególnymi przypadkami metody CE. Pokazano tym samym, że metoda CE jest najbardziej uniwersalnym sposobem wyznaczania ograniczeń na precyzję

spośród metod dostępnych w literaturze. Przeanalizowano, również zagadnienie estymacji częstości w obecności dekoherencji analizując modele ciągłej ewolucji układów kwantowych z dekoherencją zapisanych w postaci równań GKSL (Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad). Uwzględniono w tym przypadku problem optymalnego doboru czasu ewolucji i znaleziono wyrażenia na optymalną precyzję estymacji częstości możliwą do uzyskania przy ustalonych zasobach zarówno liczby atomów n jak i całkowitego czasu eksperymentu T . Pokazano ponadto zastosowanie metod CS, QS, RLD i CE do problemów estymacji samego parametru dekoherencji η kontrastując to zagadnienie z problem estymacji parametru unitarnej ewolucji tj. faza czy częstość. W przypadku estymacji parametru dekoherencji wykazano, że wszystkie metody prowadzą do tego samego typu ograniczeń, a tym samym, że najprostsza i najbardziej intuicyjna metoda CS jest wystarczająca dla uzyskania optymalnych ograniczeń na precyzję.

Praca [12] stanowi próbę powiązania tematyki metrologii kwantowej z niezwykle owocnym sposobem charakteryzacji stanów kwantowych stosowanym w fizyce wielu ciał opartym o tzw. stany macierzowe produktowe (matrix product states, MPS). Dzięki temu, że w metrologii kwantowej z uwzględnieniem dekoherencji asymptotyczne skalowanie precyzji ma typowo postać $1/\sqrt{n}$ [1], możliwe jest użycie intuicyjnego argumentu, że w celu osiągnięcia optymalnych precyzji estymacji, w reżimie dużych n , nie jest konieczne wykorzystywanie silnego splątania pomiędzy wszystkimi dostępnymi cząstkami, a wystarczy rozważać stany w których istotne splątanie istnieje jedynie wewnątrz grupek zawierających skończoną liczbę cząstek. Tym samym klasa MPS wydaje się być idealnym wyborem dla charakteryzacji stanów zawierających jedynie krótko zasięgowe lokalne korelacje. Faktycznie, w pracy [12] wykazano, że w interferometrii ze stratami możliwe jest uzyskanie praktycznie optymalnych stanów rozważając stany MPS o bardzo niewielkiej liczbie swobodnych parametrów (niskich wymiarów wiązań MPS) zarówno przy próbie maksymalizacji samej kwantowej informacji Fishera, jak i rozważając konkretne schematy pomiarowe tj. interferometria Ramseya. Dzięki takiemu opisowi możliwe jest nie tylko efektywniejsze poszukiwanie numeryczne stanów optymalnych ale jednocześnie otrzymujemy bardziej intuicyjny opis struktury optymalnych stanów, niż to ma miejsce w przypadku standardowej parametryzacji stanów jako wektorów w przestrzeni Hilberta.

5.2 Kryptografia i komunikacja kwantowa

W pracy [14] zbadano bezpieczeństwo protokołów kwantowej dystrybucji klucza bazujących na przesyłaniu impulsów jedno-fotonowych w czterech różnych stanach kwantowych tj. BB84 [37], SARG04 [38] wykorzystujących obwieszczane fotony wytwarzane w procesach parametrycznego podziału częstości. Zbadano reżim parametrów, w którym wielokanałowa detekcja może pomóc w zwiększeniu zasięgu bezpiecznej komunikacji i porównano uzyskane wyniki z ograniczeniami protokołów opartych na użyciu standardowych słabych impulsów laserowych.

W kryptografii kwantowej opartej na stanach splątanych, jednym z kluczowych pojęć są tzw. stany prywatne [39], pozwalające na bezpieczną destylację klucza kryptograficznego. Celem pracy [15] było doświadczalne przygotowanie czterofotonowego stanu prywatnego, w którym wielkość destylowalnego klucza kryptograficznego byłaby istotnie większa od tzw. destylowanego splątania—tym samym demonstrując eksperymentalnie teoretyczny fakt, że

problemy destylacji klucza kryptograficznego i destylacji splątania są nierównoważne. Wykonano eksperyment, którego wyniki poddano drobiazgowej analizie teoretycznej dokonując rekonstrukcji stanu kwantowego dwoma niezależnymi metodami: jedną opartą na estymacji największej wiarygodności i drugą opartą o wnioskowanie Bayesowskie i przybliżenie gaussowskie rozkładów prawdopodobieństwa na przestrzeni macierzy gęstości. Rekonstrukcja uwzględniała również wiarygodne oszacowanie niepewności wielkości destylowanego klucza i splątania możliwych do uzyskania z przygotowanego stanu, dowodząc że istotnie zawartość klucza kryptograficznego była większa od zawartości splątania kwantowego.

W pracy [17] przeanalizowano bezpieczeństwo tzw. kwantowych protokołów dzielenia sekretu w przypadku lokalnych ataków. Rozważane protokoły dotyczyły zagadnienia rozesłania wiadomości przez nadawcę do dwóch odbiorców w taki sposób by jedynie współpracując ze sobą odbiorcy byli w stanie odczytać przesłaną wiadomość. Problem ten można rozwiązać wykonując niezależną kwantową dystrybucję klucza pomiędzy nadawcą a dwoma odbiorcami. W pracy [17] wykazano, że w przypadku ataków lokalnych bardziej bezpieczną strategią jest wykorzystanie stanów splątanych i wysłanie ich do odbiorców. W tym przypadku możliwe jest tolerowanie wyższego poziomu szumów przy jednoczesnym zapewnieniu bezpieczeństwa.

Praca [20] dotyczyła nie tyle kwantowej dystrybucji klucza lecz samej komunikacji poprzez kanały kwantowe tj. np. światłowody. Motywując się procesami depolaryzacji zachodzącymi w światłowodach sformułowano ogólny model oparty o matematyczną teorię dyfuzji na grupie $SU(2)$, w ramach którego analizowano pojemność informacyjną kanału w zależności od siły korelacji szumu działającego na wysyłane w pewnych odstępach czasu fotony. Poza analitycznym opisaniem ewolucji ogólnych stanów wielofotonowych w takich kanałach, przeanalizowano osiągalną pojemność zarówno komunikacji informacji klasycznej jak i kwantowej w przypadku najprostszego nietrywialnego przypadku wykorzystania stanów trój-fotonowych. Zidentyfikowano najbardziej odporne na dekoherencję stany kwantowe i osiągalne za ich pomocą pojemności.

5.3 Korelacje i splątanie kwantowe

Praca [13] będąca rozwinięciem pracy [15] demonstruje szczegóły eksperymentalne przygotowanie splątanych czterofotonowych stanów światła istotnych z punktu widzenia kwantowej teorii splątania tj. stany prywatne, stany Smolina i przedstawia wyniki teoretycznej rekonstrukcji czterofotonowych macierzy gęstości.

W pracy [16] przeanalizowano maksymalną osiągalną siłę korelacji polaryzacji pomiędzy dwoma wiązkami w reżimie półklasycznym, wykorzystując stany światła będąc mieszkankami statystycznymi stanów koherentnych oraz detektory nie rozróżniające liczby fotonów. Wykazano, że widzialność korelacji jest ograniczona przez 33% co kontrastuje z widzialnością 100% osiągalną teoretycznie przez stany splątane. Wyniki zostały zilustrowane eksperymentem gdzie wiązki laserowe poddane były skorelowanemu procesowi depolaryzacji.

Prace [18, 19] dotyczyły zagadnienia możliwości dekorelacji stanów kwantowych, czyli zachowania możliwie dużej ilości informacji zapisanej w stanach podukładów przy jednoczesnym całkowitym usunięciu korelacji pomiędzy podukładami. W pracy [19] sformułowano problem dekorelacji, rozwiązano go ściśle dla przypadku dekorelacji dwóch qubitów oraz dwóch modów światła w stanach gaussowskich i scharakteryzowano klasy stanów dla których dekorelacja jest możliwa. Wykazano w szczególności, że stany powstające w wyniku

działania optymalnych urządzeń klonujących nie są dekorelowalne. W pracy [18] przedstawiono techniki matematyczne pozwalające znajdować optymalne transformacje dekorelujące. Wykazano, że dekorelacja nie jest możliwa dla ciągłych zbiorów stanów d -wymiarowych układów kwantowych. Znalaziono również konstrukcję optymalnych transformacji dekorelujących ogólne dwumodowe gaussowskie stany światła.

W pracach [21, 24] analizowano wpływ korelacji w układzie wielu qubitów na możliwość estymacji ich własności lokalnych tj. kierunek wektora Blocha. W pracy [24] przedstawiono kompletną analizę tego problemu dla dowolnych permutacyjnie niezmienniczych stanów kwantowych. W ramach klasy stanów o tej samej długości lokalnych wektorów Blocha (stopniu zmieszania podukładów) znaleziono skorelowane stany pozwalające na optymalną estymację kierunku lokalnych wektorów Blocha. Pokazano jednocześnie, że w zależności od ich rodzaju, korelacje pomiędzy podukładami mogą ułatwiać bądź utrudniać estymację lokalnych parameterów układu. Pokazano w szczególności, że stany uzyskiwane w rezultacie optymalnego klonowania qubitów charakteryzują się najgorszą precyzją estymacji kierunku lokalnego wektora Blocha spośród wszystkich stanów o tym samym stopniu zmieszania podukładów. Praca [21] inspirowana pracą [24] była propozycją wykorzystania zaobserwowanych efektów obecności korelacji na możliwości estymacji lokalnych własności qubitów, w celu zapisania informacji o kierunku w przestrzeni w stanie n qubitowym, tak by jego odczytanie było możliwe jedynie za pomocą pomiarów kolektywnych na wszystkich qubitach, a było praktycznie niemożliwe przy wykorzystaniu pomiarów lokalnych i klasycznej komunikacji. Zaprezentowany jawny protokół i wykazano jego odporność na niewielkie straty qubitów.

W pracy [23] zbadano własności tzw. wielocząstkowych „concurrency” wykorzystywanych dla charakteryzacji splątania z punktu widzenia ich zachowania pod wpływem lokalnych operacji i klasycznych komunikacji (local operations and classical communication, LOCC). Jedynie monotonicznie nierosnące pod wpływem LOCC wielkości mogą być traktowane jako sensowne wielkości charakteryzujące splątanie. W publikacji wyprowadzono warunki konieczne i dostateczne na monotoniczność wielocząstkowych „concurrency”.

Praca [25] była jedną z pierwszych prób powiązania teorii chaosu kwantowego z kwantową teorią splątania. Zbadano wytwarzanie splątania w układzie sprzężonych kopanych bąków (coupled kicked tops) w zależności od parametrów dynamiki (siły kopania bąków) związanych z przejściem pomiędzy dynamiką regularną i chaotyczną. Zbadano średnią wielkość splątania, uśredniając wyniki po dwóch rodzajach zespołów: zespołu w którym stany początkowe są przypadkowymi produktowymi stanami spinowymi koherentnymi, oraz dowolnymi stanami produktowymi. Pokazano, że wnioskowanie na temat generacji splątania w zależności od chaotyczności dynamiki podukładów jest silnie zależne od wyboru jednego z tych zespołów. Zbadano również analityczne ograniczenia na asymptotyczną generację splątania wyrażone w funkcji splątania wektorów własnych operatora ewolucji.

5.4 Klonowanie stanów kwantowych

Wierne klonowanie nieznanymi stanów kwantowych jest zabronione w ramach mechaniki kwantowej. Możliwe jest jednak poszukiwanie optymalnych przybliżonych transformacji klonujących, dających największą możliwą wierność klonów pozostając jednocześnie w zgodzie z formalizmem mechaniki kwantowej. Zagadnienia tego typu mają znaczenie dla analizy bezpieczeństwa protokołów kryptografii kwantowej, gdyż jak się okazuje często optymalne

ataki na protokoły kryptografii kwantowej sprowadzają się do optymalnych transformacji klonujących.

W pracy [26] rozwiązano problem optymalnego klonowania spinowych stanów koherentnych. Znalaziono numerycznie optymalną wierność klonowania w zależności od wymiaru układu kwantowego i uzyskano oszacowanie na asymptotyczną wierność klonowania ≈ 0.68 . Jako, że stany spinowe koherentne w granicy asymptotycznej stają się izomorficzne ze standardowymi stanami koherentnymi pozwoliło to stwierdzić, że najprawdopodobniej gaussowskie transformacje klonujące stany koherentne a prowadzące do wierności $2/3$ nie są optymalne. Hipoteza ta istotnie została równolegle potwierdzona w pracy [40].

W pracy [22] zbadano klonowanie stanów splątanych qubitów przy ograniczeniu się do operacji lokalnych i klasycznej komunikacji. Znalaziono próg wielkości splątania powyżej którego klasyczna komunikacja pozwala zwiększyć precyzję klonowania w porównaniu ze strategią opartą na niezależnych lokalnych operacjach klonujących. Pokazano ponadto, że splątanie związane nie jest użytecznym zasobem pozwalającym zwiększyć wierność klonowania.

c) nagrody

- 2012, Nagroda Indywidualna III-go stopnia rektora UW za prace dotyczące zagadnień związanych z realizacją technologii kwantowych
- 2011, Stypendium naukowe Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla wybitnych młodych naukowców na lata 2011-2014
- 2006, Nagroda Fundacji na rzecz Nauki Polskiej START dla młodych naukowców
- 1998, Laureat Polskiej Olimpiady Fizycznej; Wyróżnienia na międzynarodowej olimpiadzie fizycznej (Islandia)

d) kierowanie projektami badawczymi

- 2013-2016, Kierowanie pracami badawczymi na Uniwersytecie Warszawskim w ramach prac konsorcjum SIQS (*Simulators and Interfaces with Quantum Systems*) finansowanych z 7-go programu ramowego UE
- 2012-2013, Kierowanie pracami badawczymi na Uniwersytecie Warszawskim w ramach międzynarodowego projektu QUASAR (*Quantum States: Analysis and Realizations*) finansowanego przez NCBiR w ramach projektu ERA-NET CHIST-ERA
- 2006-2007, Krajowy grant badawczy, 1 P03B 129 30: *Optimal communication in the presence of correlated noise - usefulness of multipartite entanglement*

e) udział w projektach badawczych

- 2010-2013, projekt integrujący QESSENCE (*Quantum Interfaces, Sensors, and Communication based on Entanglement*), 7-my program ramowy UE; Lider pakietu roboczego: *Multiparameter Estimation and Non-Linear Metrology*

- 2010-2013, *Photonic implementations of quantum enhanced technologies*, projekt TEAM Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej, Post-Doc
- 2008-2011, CORNER (*Correlated Noise Errors in Quantum Information Processing*) projekt FET UE.
- 2007-2008, QAP (*Qubit Applications*), projekt zintegrowany UE
- 2004-2005, QUPRODIS (*Quantum Properties of Distributed Systems*), 5-ty program ramowy UE
- 2004-2007, Krajowy projekt badawczy, 1 P03B 042 26, *Chaos in open system*
- 2004-2006, Krajowy grant zamawiany PBZ-MIN-008/P03/2003, *Quantum computing and engineering*

f) zaproszone wykłady konferencyjne

- 19-22.02.2013, Toronto, Kanada, Workshop on Mathematical Methods of Quantum Tomography, *All you need is squeezing! Optimal schemes for realistic quantum metrology*
- 20-24.06.2012, Toruń, Polska, Symposium on Mathematical Physics, *Quantum enhanced metrology and the geometry of quantum channels*
- 21-25.05.2012, Turyn, Włochy, Advances in Foundations of Quantum Mechanics and Quantum Information with atoms and photons, *Almost all decoherence models lead to shot noise scaling in quantum enhanced metrology*
- 18-19.05.2012, Sopot, Polska, KCIK Symposium, *Quantum enhanced metrology and the geometry of quantum channels*
- 17-21.01.2012, Moffett Field, Kalifornia, USA, First NASA Quantum Future Technologies Conference, *The illusion of the Heisenberg limit*
- 17.09.2011, Toruń, Polska, International symposium „Quantum metrology with photons and atoms”, *Quantum enhanced metrology*
- 05.09.2011, Lublin, Polska, XLI Meeting of Polish physicists, *Fundamental bounds in quantum metrology*
- 22-26.08.2011, Bad Honnef, Niemcy, Wilhelm and Else Heraeus Physics School: Modern Statistical Methods in Quantum Information Processing, *Quantum enhanced metrology*
- 11-15.07.2011, Sarajewo, Bośnia i Hercegowina, 20th International Laser Physics Workshop, *Experimental extraction of secure correlations from a noisy private state*
- 27.06-01.07.2011, Międzyzdroje, Polska, II Polska Konferencja Optyczna, *Fundamentalne ograniczenia w metrologii optycznej*

- 9-12.09.2009, Gdańsk, Polska, NATO Advanced Research Workshop, Quantum Cryptography and Computing, *Entanglement enhances security in secret sharing*.
- 8-12.06.2009, Zakopane, Polska, Quantum Optics VII, *Quantum enhanced phase estimation in the presence of loss*.

g) współpraca krajowa i zagraniczna

- Niemcy, Hanower (2012-2013). Współpraca z Romanem Schnablem (liderem grupy LIGO) dotycząca zastosowania fundamentalnych teoretycznych ograniczeń do przypadku interferometru fal grawitacyjnych GEO600.
- Anglia, Nottingham (2011-2013). Współpraca z Madalinem Gutą dotycząca matematycznych aspektów metrologii kwantowej i kwantowej teorii estymacji, której rezultatem była praca [1].
- Szwajcaria, Zurich (2012-2013). Współpraca z Martinem Fraasem dotycząca metrologii kwantowej w kontekście kalibracji zegarów atomowych.
- Polska, Gdańsk, (2011-2013). Współpraca z Pawłem Horodeckim dotycząca teorii stanów prywatnych, rekonstrukcji stanów kwantowych i zagadnienia addytywności w metrologii kwantowej, której dotychczasowymi rezultatami są publikacje [13, 15].
- Anglia, Oksford (2008-2010). Współpraca z grupą I. A. Walmsleya z Uniwersytetu Oksfordzkiego dotycząca zagadnień optymalnej estymacji fazy w obecności strat, której bezpośrednim efektem były publikacje [5, 7–9].
- Włochy, Pawia (2005-2008). Współpraca z grupą G.M.D'Ariano z Uniwersytetu w Pawii dotycząca zagadnienia klonowania i optymalnej dekorelacji stanów kwantowych, której wynikiem były prace [18, 19].
- Hiszpania, Barcelona (2004-2008). Współpraca z grupą Macieja Lewensteina z ICFO-Institut de Ciencies Fotoniques dotycząca zagadnienia lokalnego przetwarzania informacji kwantowej, rezultatem były prace [17, 22].
- Niemcy, Drezno (2003-2005). Współpraca z grupą Andreea Buchleitnera z Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme dotycząca wielocząstkowych miar splątania, która zaowocowała pracą [23].

Literatura

- [1] R. Demkowicz-Dobrzański, J. Kołodyński, and M. Guţă, *The elusive heisenberg limit in quantum enhanced metrology*, Nat. Commun. **3**, 1063 (2012).
- [2] M. Jarzyna and R. Demkowicz-Dobrzański, *Quantum interferometry with and without an external phase reference*, Phys. Rev. A **85**, 011801 (2012).

- [3] R. Demkowicz-Dobrzański, *Optimal phase estimation with arbitrary a priori knowledge*, Phys. Rev. A **83**, 061802(R) (2011).
- [4] J. Kołodyński and R. Demkowicz-Dobrzański, *Phase estimation without a priori phase knowledge in the presence of loss*, Phys. Rev. A **82**, 053804 (2010).
- [5] M. Kacprowicz, R. Demkowicz-Dobrzanski, W. Wasilewski, K. Banaszek, and I. A. Walmsley, *Experimental quantum enhanced phase-estimation in the presence of loss*, Nature Photon. **4**, 357 (2010).
- [6] R. Demkowicz-Dobrzański, *Multi-pass classical vs. quantum strategies in lossy phase estimation*, Laser Phys. **20**, 1197 (2010).
- [7] K. Banaszek, R. Demkowicz-Dobrzanski, and I. A. Walmsley, *Quantum states made to measure*, Nature Photon. **3**, 673 (2009).
- [8] R. Demkowicz-Dobrzański, U. Dorner, B. Smith, J. S. Lundeen, W. Wasilewski, K. Banaszek, and I. A. Walmsley, *Quantum phase estimation with lossy interferometers*, Phys. Rev. A **80**, 013825 (2009).
- [9] U. Dorner, R. Demkowicz-Dobrzański, B. J. Smith, J. S. Lundeen, W. Wasilewski, K. Banaszek, and I. A. Walmsley, *Optimal quantum phase estimation*, Phys. Rev. Lett. **102**, 040403 (2009).
- [10] P. Kolenderski and R. Demkowicz-Dobrzanski, *Optimal state for keeping reference frames aligned and the platonic solids*, Phys. Rev. A **78**, 052333 (2008).
- [11] J. Kolodynski and R. Demkowicz-Dobrzanski, *Efficient tools for quantum metrology with uncorrelated noise*, ArXiv e-prints (2013), arXiv:1303.7271 [quant-ph] .
- [12] M. Jarzyna and R. Demkowicz-Dobrzanski, *Matrix product states for quantum metrology*, ArXiv e-prints (2013), arXiv:1301.4246 [quant-ph] .
- [13] K. Dobek, M. Karpinski, R. Demkowicz-Dobrzanski, K. Banaszek, and P. Horodecki, *Experimental generation of complex noisy photonic entanglement*, Laser Phys. **23**, 025204 (2013).
- [14] M. Lasota, R. Demkowicz-Dobrzanski, and K. Banaszek, *Quantum key distribution with realistic heralded single photon sources*, ArXiv e-prints (2012), arXiv:1211.4691 [quant-ph] .
- [15] K. Dobek, M. Karpiński, R. Demkowicz-Dobrzański, K. Banaszek, and P. Horodecki, *Experimental extraction of secure correlations from a noisy private state*, Phys. Rev. Lett. **106**, 030501 (2011).
- [16] K. Banaszek, R. Demkowicz-Dobrzański, M. Karpiński, P. Migdał, and C. Radzewicz, *Quantum and semiclassical polarization correlations*, Opt. Commun. **283**, 713 (2010).
- [17] R. Demkowicz-Dobrzański, A. Sen(De), U. Sen, and M. Lewenstein, *Entanglement enhances security in quantum communication*, Phys. Rev. A **80**, 012311 (2009).

- [18] G. M. D'Ariano, R. Demkowicz-Dobrzański, P. Perinotti, and M. F. Sacchi, *Quantum-state decorrelation*, Phys. Rev. A **77**, 032344 (2008).
- [19] G. M. D'Ariano, R. Demkowicz-Dobrzański, P. Perinotti, and M. F. Sacchi, *Erasable and unerasable correlations*, Phys. Rev. Lett. **99**, 070501 (2007).
- [20] R. Demkowicz-Dobrzański, P. Kolenderski, and K. Banaszek, *Effects of imperfect noise correlations on decoherence-free subsystems: $Su(2)$ diffusion model*, Phys. Rev. A **76**, 022302 (2007).
- [21] E. Bagan, J. Calsamiglia, R. Demkowicz-Dobrzański, and R. Muñoz-Tapia, *How to hide a secret direction*, New. J. Phys. **9**, 244 (2007).
- [22] R. Demkowicz-Dobrzański, M. Lewenstein, A. Sen(De), U. Sen, and D. Bruß, *Usefulness of classical communication for local cloning of entangled states*, Phys. Rev. A **73**, 032313 (2006).
- [23] R. Demkowicz-Dobrzański, A. Buchleitner, M. Kuś, and F. Mintert, *Evaluable multipartite entanglement measures: Multipartite concurrences as entanglement monotones*, Phys. Rev. A **74**, 052303 (2006).
- [24] R. Demkowicz-Dobrzański, *State estimation on correlated copies*, Phys. Rev. A **71**, 062321 (2005).
- [25] R. Demkowicz-Dobrzański and M. Kuś, *Global entangling properties of the coupled kicked tops*, Phys. Rev. E **70**, 066216 (2004).
- [26] R. Demkowicz-Dobrzański, M. Kuś, and K. Wódkiewicz, *Cloning of spin-coherent states*, Phys. Rev. A **69**, 012301 (2004).
- [27] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, *Advances in quantum metrology*, Nature Photon. **5**, 222 (2011).
- [28] C. W. Helstrom, *Quantum detection and estimation theory* (Academic Press, 1976).
- [29] S. L. Braunstein and C. M. Caves, *Statistical distance and the geometry of quantum states*, Phys. Rev. Lett. **72**, 3439 (1994).
- [30] J. J. . Bollinger, W. M. Itano, D. J. Wineland, and D. J. Heinzen, *Optimal frequency measurements with maximally correlated states*, Phys. Rev. A **54**, R4649 (1996).
- [31] D. W. Berry and H. M. Wiseman, *Optimal states and almost optimal adaptive measurements for quantum interferometry*, Phys. Rev. Lett. **85**, 5098 (2000).
- [32] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North Holland, 1982).
- [33] K. Matsumoto, *On metric of quantum channel spaces*, ArXiv e-prints , 1006.0300 (2010).

- [34] A. Fujiwara and H. Imai, *A fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 255304 (2008).
- [35] LIGO Collaboration, *A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit*, Nature Phys. **7**, 962 (2011).
- [36] G. Chiribella, G. M. D'Ariano, P. Perinotti, and M. F. Sacchi, *Efficient use of quantum resources for the transmission of a reference frame*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180503 (2004).
- [37] C. H. Bennett and G. Brassard, *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*, Proc. IEEE int. conference on computers, systems and signal processing , 175 (1984).
- [38] V. Scarani, A. Acin, G. Ribordy, and N. Gisin, *Quantum cryptography protocols robust against photon number splitting attacks for weak laser pulse implementations*, Phys. Rev. Lett. **92**, 057901 (2004).
- [39] K. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki, and J. Oppenheim, *Secure key from bound entanglement*, Phys. Rev. Lett. **94**, 160502 (2005).
- [40] N. J. Cerf, O. Krüger, P. Navez, R. F. Werner, and M. M. Wolf, *Non-gaussian cloning of quantum coherent states is optimal*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170501 (2005).

RAM