Warszawa, 14 lutego 2019

Prof. dr hab. Paweł Nurowski
Centrum Fizyki Teoretycznej
Polska Akademia Nauk
Warszawa

Recenzja w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego nauk fizycznych panu doktorowi Adamowi Chudeckiemu

Osiągnięciem naukowym stanowiącym podstawę wniosku habilitacyjnego pana doktora Adama Chudeckiego jest osiem prac [H1]-[H8] dotyczących *metryk holomorficznych* na *czterowymiarowych rozmaitościach zespolonych* z dodatkową strukturą jaką jest istnienie na takich rozmaitościach *strun zerowych* i, ewentualnie, *konforemnych pól Killinga*. Prace te zawierają też *wyniki dotyczące dziedziny rzeczywistej*; te otrzymane są poprzez dobranie odpowiednich czterowymiarowych cięć rzeczywistych rozważanych metryk i rozmaitości zespolonych.

Rezutlaty otrzymane przez pana Adama Chudeckiego w pracach [H1]-[H8] należą do bardzo ważnego matematycznie, choć trochę niedocenianego przez współczesną teorię względności, nurtu używającego *metod zespolonej geometrii różniczkowej* do konstrukcji *ścisłych rozwiązań* nieliniowych równań teorii pola, takich jak np. *równań teorii grawitacji Einsteina*. Badania w tej dziedzinie zostały zapoczątkowane gdy zdano sobie sprawę, że proces rozwiązywania równań Einsteina dla metryk mających opisywać w miarę proste fale grawitacyjne znacznie się upraszcza po zamianie zmiennych, która odpowiednie dwie z czterech współrzędnych docelowej czasoprzestrzeni zastąpi współrzędną zespoloną i jej sprzężeniem zespolonym. Ta prosta obserwacja (I. Robinsona i A. Trautmana) doprowadziła do renesansu teorii względności w latach 60tych XXwieku i do takich jej sukcesów jak dowód istnienia fal grawiatcyjnych w pełnej nieliniowej teorii Einsteina (I. Robinson, A.Trautman), czy odkrycie rotującej czarnej dziury (P.R. Kerr). Było to też inspiracją dla wprowadzenia teorii twistorów (R. Penrose), która jest w tej chwili jedną z podstawowych metod badań w geometrii rózniczkowej uprawianej przez matematyków.

Matematyczną strukturą, która występuje we wszystkich wymienionych powyżej przykładach badań będących u podstaw prac pana Chudeckiego, jest *pole $\mathcal{D}$ zespolonych 2-płaszczyzn* na rozważanej czterowymiarowej rozmaitości M z metryką g, spełniające dwa warunki:

a) $\mathcal{D}$ jest *całkowicie zerowe*, co znaczy że $g(Z_1, Z_2) = 0$ dla każdych dwóch pól wektorowych należących do $\mathcal{D}$, i

b) $\mathcal{D}$ jest *inwolutywne*, co znaczy że $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$.

Z przyczyn nieistotnych dla tej recenzji o czterwoymiarowej rozmaitości (M, g) z polem 2-płaszczyzn $\mathcal{D}$ spełniających warunki a) i b) mówi się, że jest wyposażona w *kongruencję strun zerowych*.

Użyteczność pojęcia kongruencji strun zerowych w teorii względności polega na tym, że gdy zespolona czterowymiarowa rozmaitość z metryką (M, g) posiada taką kongruencję, i gdy metryka spełnia *próżniowe równania Einsteina*, $Ric(g) = \Lambda g$, to pozostała część tensora krzywizny takiej metryki, tzw. *tensor Weyla*, ma znacznie prostsze (niż bez kongruencji) własności algebraiczne: jedna z jego dwóch składowych części, część *samodualna*, jest *algebraicznie specjalna*. Jest to treść ważnego *twierdzenia Goldberga-Sachsa*. Ponieważ w kluczowym dla teorii względności przypadku, gdy M dopuszcza *lorentzowskie* czterowymiarowe cięcie rzeczywiste M_L z *lorentzowską* metryką g_L, tzn. *fizyczną czasoprzestrzeń* (M_L, g_L), pozostała (antysamodualna) część tensora Weyla na M_L jest sprzężeniem zespolonym części samodualnej, istnienie kongruencji strun zerowych na M wymusza dość prostą strukturę algebraiczną krzywizny czasoprzestrzeni (M_L, g_L) co pozwala na dość głębokie odcałkowanie układu równań Einsteina dla fizycznej metryki g_L.

Opisany tu schemat stanowi motywację dla większości badań doktora Chudeckiego; zarówno tych z prac monotematycznych [H1]-[H8] będących podstawą wniosku, jak i z pozostałych dziwięciu [P1]-[P9]. Zanim przejdę do bardziej szczegółowych zachwytów nad rezultatami w ocenianych tu pracach [H1]-[H9] pragnę stwierdzić, że program badań sformułowany przez Chudeckiego, rozwijany z żelazną logiką, z rezultatatami otrzymanymi systematycznie, krok po kroku, przez ponad dziesięć lat, budzi mój najwyższy szacunek. Systematyczna praca w bardzo skomplikowanej dziedzinie, poza wielkimi centrami, niezwracająca uwagi na doraźne mody, jest w dzisiejszych czasach zupełnie niespotykana. Jest to praca i wyniki, którą wykonać mógł tylko człowiek bardzo dobrze wykształcony, świadomy swojej wartości, posiadający mocny indywidualny gust matematyczny i wierzący w swoją matematyczną intuicję. Mało jest teraz, w czasach pogoni za grantami i ocenami parametrycznymi wymyślanymi przez urzędników, takich osób.

Dlatego już w tym miejscu, chciałbym napisać konkluzję mojej recenzji: *bardzo gorąco popieram wniosek o nadanie panu doktorowi Adamowi Chudeckiemu tytułu doktora habilitowanego.*

1 Osiągnięcia naukowe będące podstawą wniosku

Rezultaty otrzymane przez pana Adama Chudeckiego będące podstawą wniosku habilitacyjnego można podzielić na cztery grupy:

- do pierwszej grupy zaliczę rezultaty dotyczące zespolonych metryk Einsteina na 4-rowymiarowej zespolonej rozmaitości, dla których część samodualna tensora Weyla jest algebraicznie specjalna. Są to tzw. *przestrzenie hyperniebiańskie*. Rezultaty w pracach [H1]-[H4] to klasyfikacja (i przykłady) metryk przestrzeni hyperniebiańskich posiadających konforemne symetrie Killinga i specjalizacje tych symetrii.
- do drugiej grupy zaliczam rezultaty na temat szczególnych przestrzeni hyperniebiańskich, i ich odpowiedników w dziedzinie rzeczywistej z metryką o sygnaturze neutralnej, zwanych *przestrzeniami para-hermitowskimi* i *para-kählerowskimi* [H6].
- do trzeciej grupy należą prace [H5] i [H7], które podają związki pomiędzy tensorem Ricciego metryki zespolonej g na czterowymiarowej rozmaitości zespolonej M a istnieniem na niej kongruencji strun zerowych.
- czwartą grupę stanowi praca z analizą zespolonych czterowymiarowych przestrzeni (M, g) dla których tensor Weyla w każdej ze swoich dwu nieredukowalnych składowych jest niezerowy, ale maksymalnie zdegenerowany [H8].

1.1 Wyniki z pierwszej grupy

Kongruencje strun zerowych dzielą sie naturalnie na dwie grupy: na kongruncje *nieekspandujące* i takie, które *mają niezerową ekspansję* (*ekspansja* kongruencji jest terminem technicznym, którego definicję opuszczam). Z lokalnego punktu widzenia, a taki jest tylko rozważany przez doktora Chudeckiego, pozwala to na naturalne rozróżnienie czterorozmaitości z takimi kongruencjami: albo zawierają kongruencje ekspandujących strun zerowych, albo nieekspandujących.

W dziedzinie rozmaitości wyposażonych w kongruencje *nieekspandujące* z symetriami konformenymi Chudecki w [H2] podał pełną klasyfikację wektorów Killinga i wektorów homotetycznych wraz z równaniem spełnianym przez kluczową funkcję definiującą metrykę w przestrzeniach hyperniebiańskich. Odnotował też, że przypadek gdy hyperniebiańska rozmaitoiść z nieekspandującą kongruencją ma *właściwą* lokalną *symetrię konforemną* jest tylko możliwy gdy stała kosmologiczna jest równa zeru a tensor Weyla (samodualny i antysamodualny) jest najbardziej zdegenerowany - typu N albo 0 ($[N,-]\otimes[N,-]$). Z wyjątkiem tego przypadku, to jest przypadku z właściwą symetrią konforemną, w pracy [H2] podane zostało wiele jawnych przykładów przestrzeni hyperniebiańskich z lokalnymi symetriami.

W przypadku rozmaitości hyperniebiańskich z kongruencją *ekspandujących* strun zerowych właściwe symetrie konforemne są wykluczone przez równania. Klasyfikacja symetrii i przestrzeni hyperniebianskich mających wektory homotetyczne bądź wektory Killinga jest otrzymana w pracy [H3]. Są też tam nietrywialne jawne przykłady takich przestrzeni hyperniebianskich z dwoma podwójnie zdegenerowanymi kongruencjami nieekspandujacymi o tej samej samodualności, a także przestrzeni hyperniebianskich z ekspandującymi kongruencjami typu $III\otimes III$ oraz $[N,-]\otimes[N,-]$. Chudecki znalazł też *ogólną postać* metryki hyperniebiańskiej typu $III\otimes N$ posiadającą zerowy i właściwie homotetyczny wektor Killinga, z kongruencjami strun zerowych o przeciwnej samodualności, z których pierwsza jest nieekspandująca, a druga ekspandująca. Dla jednego ze swoich przykładów przestrzeni hyperniebiańskich z zerowym wektorem Killinga Chudecki znalazł cięcia lorentzowskie.

1.2 Wyniki z drugiej grupy

Wśród holomorficznych metryk na czterowymiarowych rozmaitościach można wyróżnić pewną interesującą podklasę metryk *para-hermitowskich*, tzn. takich, które lokalnie można zapisać jako $g = 2f_{A\dot{B}}dz^A dz^{\dot{B}}$, z holomorficznymi współrzędnymi $(z^A, z^{\dot{B}}) = (z^1, z^2, z^{\dot{1}}, z^{\dot{2}})$. Wśród takich metryk, są metryki *para-kählerowskie* dla których funkcje $f_{A\dot{B}}$ mają *potencjał*, tzn funkcję f taką, że $f_{A\dot{B}} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^A \partial z^{\dot{B}}}$.

Opiszę tu tylko rezultaty Chudeckiego z drugiej grupy, które są istotne dla mojej pracy naukowej. W [H6] używając formalizmu przestrzeni hyperniebiańskich, podał przykłady metryk para-kählerowskich spełniających równania Einsteina z niezerową stałą kosmologiczną o *każdej* z możliwych degeneracji *anty*samodualnego tensora Weyla i posiadających *rzeczywiste cięcie o sygnaturze neutralnej*.

Istnienie rzeczywistych cięć *einsteinowskich* metryk para-kählerowskich o sygnaturze neutralnej i w każdym typie algebraicznym *anty*samodualnego tensora Weyla jest bardzo ważne w teorii generycznych dystrybucji rzędu dwa na pięciowymiarowych rzeczywistych rozmaitościach. W teorii tej istnieje konstrukcja - *konstrukcja twistorowa* - przypisująca taką dystrybucję każdej czterowymiarowej rzeczywistej metryce o sygnaturze neutralnej pod warunkiem, że jej *samo*dualny tensor Weyla nie znika. Generyczne dystrybucje rzędu 2 na pięciowymiarowych rozmaitościach klasyfikuje się ze względu na algebraiczy typ pewnego różniczkowego niezmiennika, *kwartyki Cartana*, który jako tensor ze względu na działanie grupy $GL(2)$ zachowuje się identycznie jak *anty*samodualny tensor Weyla. W szczególności takie dystrybucje mogą mieć typ algebraiczny I, II, D, III, N, 0, zupełnie tak samo jak *anty*samodualny tensor Weyla metryk czterowymiarowych.

Jednym z otwartych pytań w teorii dystrybucji rzędu 2 w pięciu wymiarach, było czy konstrukcja twistorowa potrafi wyprodukować generyczne dystryucje rzędu 2 w wymiarze pięć o kwartyce Cartana w każdym z możliwych algebraicznych typów. Niedawny mój rezultat pokazujący, że antysamodualny tensor Weyla W^- dla einsteinowskiej 4-rowymiarowej para-kählerowskiej metryki o sygnaturze neutralnej z niezerową stałą kosmologiczną Λ jest, z dokładnościa do nieznikającego czynnika, równy kwartyce Cartana C dla odpowiadającej tej metryce dystrybucji twistorowej

$$W^- = \Lambda C,$$

daje pozytywną odpowiedź na to pytanie pod warunkiem, że istnieją neutralne para-kählerowskie i einsteinowskie metryki w czterech wymiarach o dowolnym typie algebraicznym tensora Weyla W^-. A przykłady podane przez doktora Chudeckiego w pracy [H6] pokazują, że istnieją. W wyniku tego przykłady Chudeckiego z pracy [H6] zostały docenione przez badaczy z dziedziny geometrii parabolicznych i są cytowane w tej, ostatnio dynamicznie rozwijającej się, dziedzinie matematyki.

1.3 Wyniki z trzeciej grupy

W tej grupie wyników Chudeckiego znajduje się rozwiązanie problemu napotkanego przez niego podczas studiów rzeczywistych metryk para-hermitowskich o sygnaturze neutralnej, o których nie zakładał, że spełniają równania Einsteina, a mianowicie problemu czy istnieje jakiś związek pomiędzy strukturą kongruencji strun zerowych a *bezśladowym tensorem Ricciego* metryki, czyli tym tensorem, który znika gdy są spełnione równania Einsteina.

Przygotowaniem do rozwiązania tego problemu stała się algebraiczna klasyfikacja bezśladowego tensora Ricciego dla czterowymiarowych metryk o sygnaturze neutralnej podana przez doktora Chudeckiego w pracy [H5]. Jest to nietrywialne usubtelnienie klasyfikacji tego tensora znanej z dziedziny zespolonej. O nietrywialności tego usubtelnienia świadczy liczba typów podanych przez Chudeckiego: bezśladowy tensor Ricciego w sygnaturze neutralnej ma 9 typów głównych i aż 33 podtypy. Interesujące jest, że Chudecki próbował znaleźć przykłady metryk dla każdego z tych typów. To udało sie tylko częściowo w pracy [H6].

Używając tej klasyfikacji, w pracy [H7], Chudecki otrzymał dość wiele ineteresujących rezultatów łaczących istnienie kongruencji strun zerowych z algebraicznymi własnościami tensora Ricciego. W szczególności Chudecki pokazał, że jeśli na czterorozmaitości istnieją dwie kongruencje strun zerowych o tej samej samodualności, to ich wielkości kinematyczne, takie jak ekspansja i wektor Sommersa, wraz z ich pierwszymi pochodnymi, wyznaczają tensor Ricciego. Innym rezulatem Chudeckiego z pracy [H7] jest określenie jakie algebraiczne typy tensora Ricciego są możliwe gdy czterorozmaitość ma jedną albo dwie nieekspandujące kongruencje strun zerowych o tej samej samodualności.

1.4 Wyniki z czwartej grupy

Ostatnią grupę rezultatów pana Adama Chudeckiego zawiera jego praca [H8] dotycząca zespolonych i rzeczywistych metryk czterowymiarowych o tensorze Weyla typu $N \otimes N$. Motywowana jest ona poszukiwaniem 'świętego Graala' teorii ścisłych rozwiązań lorentzowskich równań Einsteina w czterech wymiarach, czyli pogonią za *próżniowymi rozwiązaniami z kongruencją zerowych geodezyjnych bez ścinania posiadającą twist*. Podejściem używanym przez Chudeckiego jest założenie istnienia na czterorozmaitości zespolonej dwóch kongruencji strun zerowych o przeciwnej samodualności dla których spinory je generujące są czterokrotnymi spinorami głównymi tensora Weyla, i próby znalezienia lorentzowskich cięć rzeczywistych w tym reżimie.

Tu znowu uzyskany jest szereg rezultatów, polegających głównie na podaniu ciekawych przykładów metryk zespolonych typu $N \otimes N$. Niestety te z zaprezentowanych w pracy [H8] przykładów, które mają cięcia lorentzowskie, odpowiadają znanym już metrykom typu N, będącym albo falami pp, albo należącym do klasy Kundta, bądź też do klasy Robinsona-Trautmana. Żadne z nich w lorentzowskiej dziedzinie rzeczywistej nie mają kongruencji zerowych geodezyjnych z twistem.

Natomiast nowymi i bardzo ciekawymi rozwiązaniami rzeczywistymi w tej pracy są rozwiązania o sygnaturze neutralnej z kongrunecjami typu N o przeciwnej samodulaności takimi, że jedna z nich jest ekspandująca a druga nie. I są tu rozwiązania z kongruencjami geoodeyzyjnych bez ścinania zarówno bez ekspansji i bez twistu, jak i rozwiązania z ekpsansją i z twistem.

2 Krótka ocena rezultatów naukowych

Uważam, że rezultaty osiągnięte przez doktora Chudeckiego w pracach [H1]-[H8] są bardzo ciekawe, użyteczne także poza teorią względności (*vide* paraboliczna geometria dystrybucji rzędu 2 w wymiarze 5) i oryginalne. Zostały one otrzymane w wyniku przemyślanego i obliczonego na wiele lat planu badań. Jako osoba, która spędziła kilkanaście lat życia używając metod zespolonych do konstrukcji rozwiązań nieliniowych układów równań różniczkowych, wiem jak wiele nakładu pracy osiągnięcia z prac [H1]-[H8] wymagały. Jestem pełen podziwu dla pana Chudeckiego za wytrwałość i konsekwencję. Ogólnie oceniam rezultaty naukowe zawarte w tych pracach bardzo wysoko. Ze wszystkich wniosków habilitacyjnych jakie do tej pory oceniałem, ten jest najlepszy.

3 Konkluzja

Biorąc pod uwagę wszystko co napisałem powyżej stwierdzam, że w mojej opinii, osiągnięcia naukowe i dorobek naukowy doktora Adama Chudeckiego spełniają wszystkie wymogi ustawowe i zwyczajowe stawiane habilitacji. Z pełnym przekonaniem popieram wniosek o nadanie mu tytułu doktora habilitowanego.

Paweł Nurowski

PNurowski