Faktory von Neumanna ze zwartych grup kwantowych (streszczenie popularnonaukowe)

Piotr M. Sołtan

Teoria grup należy do głównego kanonu badań matematycznych i znajduje zastosowanie w większości działów matematyki i fizyki. Powodem tak szerokiego pola zastosowań tej teorii jest fakt, że opisuje i bada ona pojęcie *symetrii*. Tak więc każde zagadnienie, którego badanie ma związek transformacją symetrii (natury geometryczne, algebraicznej bądź innej) musi w jakimś stopniu korzystać z teorii grup.

Pośród wielu gałęzi teorii grup szczególne miejsce zajmuje tak zwana *analiza harmoniczna* poświęcona w części badaniu "reprezentacji unitarnych grup topologicznych", tj. realizacji abstrakcyjnych grup (np. symetri teorii lub zagadnień fizycznych) jako liniowych operatorów na przestrzeniach Hilberta zachowujących iloczny skalarny ([Mau1968, Dix1977]). Tak się akurat składa, że w fizyce przestrzenie Hilberta opisują stany układów kwantowych, dzięki czemu teoria grup i ich reprezentacji stała się rdzenną częścią mechaniki kwantowej i kwantowej teorii pola ([Wey1950, vNeu1955]).

W tym właśnie kontekście pojawia się pojęcie *grupy kwantowej* (na poziomie algebr operatorów). Grupy kwantowe są obiektami uogólniającymi lokalnie zwarte grupy w terminach szczególnie dobrze przystosowanych do badania reprezentacji unitarnych. Szczegółowe wyjaśnienie pojęcia grupy kwantowej przekracza ramy niniejszego streszczenia, ale pozwolimy sobie na zaspokojenie ciekawości czytelnika stwierdzając, że w dobrym przybliżeniu grupa kwantowa jest to obiekt uogólniający pojęcie lokalnie zwartej grupy w sposób analogiczny to tego jak mechanika kwantowa uogólnia mechanikę klasyczną. W szczególności (przemienna) algebra funkcji na grupie staje się (nieprzemienną) algebrą operatorów na przestrzeni Hilberta.

Projekt badawczy „Faktory von Neumanna ze zwartych grup kwantowych" ma na celu badanie przykładów, w których grupa kwantowa jest "zwarta" (pojęcie dość techniczne, por. [NeshTu2013, Wor1998]), a stowarzyszona z nią algebra jest pewnego szczególnego typu, a konkretnie jest algebrą von Neumanna o trywialnym centrum (tzw. *faktorem*). Wynikami badań będą konstrukcje nieprzeliczalnie wielu takich przykładów wyczerpujących wszystkie faktory z pewnej klasy (tak zwane injektywne faktory typu III_λ) oraz klasyfikacja tych przykładów przy pomocy nowych niezmienników nieco skomplikowanej natury.

References

[Dix1977] J. Dixmier: C*-*algebras*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[Mau1968] K. Maurin: *General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups*. PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1968.

[NeshTu2013] S. Neshveyev, L. Tuset: *Compact quantum groups and their representation categories*. Cours Spécialisés, Société Mathématique de France, Paris 2013.

[vNeu1955] J. von Neumann: *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1955.

[Wor1998] S.L. Woronowicz: Compact quantum groups, In *Symétries quantiques (Les Houches, 1995)*, North-Holland, Amsterdam 1998, pp. 845–884.

[Wey1950] H. Weyl: *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover Publications, Inc., New York, 1950.