Operatory Schrödingera i Kleina-Gordona

Zarówno *Operatory Schrödingera*, jak i *operatory Kleina-Gordona* są operatorami różniczkowymi drugiego rzędu umotywowanymi przez *mechanikę kwantową* i *kwantową teorię pola.* Operatory Schrödingera są zdefiniowane jako suma *Laplasjanu* i mnożenia przez *potencjał.* Jeśli zastąpimy płaską przestrzeń przez zakrzywioną *rozmaitość riemannowską*, zamieniamy Laplasjan na tak zwany operator *Laplace'a-Beltramiego.* W mechanice kwantowej operatory Schrödingera są używane do opisu układów kwantowych: generują one ich dynamikę i określają poziomy energetyczne.

Zgodnie z Einsteinowską *szczególną teorią względności*, naszą czasoprzestrzeń można modelować *przestrzenią Minkowskiego.* Propagacja pól na przestrzeni Minkowskiego jest opisana przez *równanie Kleina-Gordona.* Operator Kleina-Gordona, który określa równanie Kleina-Gordona, jest podobny do operatora Schrödingera, jednakże ma przeciwny znak przed jedną z drugich pochodnych, co radykalnie zmienia jego własności. Wzorując się jeszcze raz na Einsteinie, można pójść krok dalej i założyć, że czasoprzestrzeń jest zakrzywiona—w terminach fachowych, jest opisana przez *pseudoriemannowską rozmaitość* z *Lorentzowską sygnaturą.* Latwo uogólnia się operator Kleina-Gordona na zakrzywioną czasoprzestrzeń.

Projekt jest poświęcony badaniu operatorów Schrödingera i Kleina-Gordona. Jest podzielony na dwa zadania.

W Zadaniu 1 planujemy badać różne klasy 1-wymiarowych operatorów Schrödingera, które mogą zostać rozwiązane w terminach funkcji specjalnych, np. słynnej *funkcji hipergeometrycznej Gaussa.* Operatory będą zorganizowane w *funkcje holomorficzne* zależne od zespolonych parametrów.

Główna motywacja dla tego zadania pochodzi z mechaniki kwantowej, w której *samosprzężone* operatory Schrödingera grają kluczową rolę. W naszym projekcie badamy również niesamosprzężone operatory Schrödingera, których fizyczna motywacja jest mniej oczywista. Jednakże ta pozornie niefizyczna kategoria jest również użyteczna dla zastosowań w fizyce, ponieważ pozwala ona uzyskać oszacowania dla fizycznych przypadków przy pomocy potężnych metod analizy zespolonej.

Głównym tematem Zadania 2 będzie badanie operatora Kleina-Gordona na zakrzywionej czasoprzestrzeni. Zadanie 2 jest umotywowane w dużej mierze przez kwantową teorię pola. W celu obliczenia *amplitud rozpraszania* potrzebna jest znajomość tak zwanego *propagatora Feynmana*, który fomalnie może być traktowany jako jedna z odwrotności operatora Kleina-Gordona. Naiwne podejście do obliczania amplitud rozpraszania prowadzi do rozbieżnych wyrażeń. Można naprawić ten problem przy pomocy procedury zwanej *renormalizacją.* Aby ustalić przepis renormalizacyjny trzeba znać szczegóły dotyczące asymptotyki propagatora Feynmana w pobliżu diagonali. Spodziewamy się, że nasze podejście oparte na *kwantyzacji Weyla* doprowadzi do efektywnej metody renormalizacji pól kwantowych na zakrzywionych czasoprzestrzeniach.

Nasze badania będziemy prowadzić zgodnie ze standardami ścisłości stosowanymi w badaniach matematycznych. Jednocześnie spodziewamy się, że duża część naszych rezultatów rzuci światło na zagadnienia bliskie fizyce kwantowej.