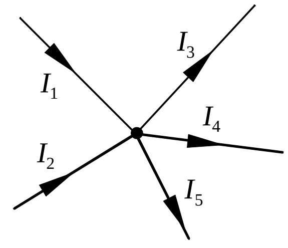
Wydział Fizyki UW
(wersja instrukcji 02.2016, oprac. T. Słupiński,
na podstawie instrukcji do ćwiczenia „Prawo Ohma i Kirchoffa” z Pracowni Wstępnej WF UW

Pracownia fizyczna i elektroniczna dla Inżynierii Nanostruktur oraz Energetyki i Chemii Jądrowej

Ćwiczenie 2
Obwody prądu stałego, prawa Kirchhoffa, niepewności pomiaru napięć i prądów.

Cel
Wartość liczbowa uzyskana z pomiaru każdej wielkości fizycznej obarczona jest niepewnością pomiarową (niedokładnością pomiaru). Uzasadnione jest więc pytanie o kryteria rozstrzygania czy pomiar wykonany z niepewnością pomiarową jest zgodny, czy niezgodny, z modelem mierzonego zjawiska. W tym ćwiczeniu poznajemy niepewności pomiarowe napięć, natężeń prądów oraz oporności elektrycznej dla miernika uniwersalnego (woltomierza, amperomierza, omomierza). Biorąc pod uwagę te niepewności sprawdzamy, czy uzyskane wyniki pomiarów prądów i napięć w prostych obwodach prądu stałego (szeregowe lub równoległe połączenie oporników) są zgodne z prawami Kirchhoffa. Jako kryterium zgodności korzystamy ze statystycznego testu zgodności 3-sigma (3σ), który tutaj zastosujemy do wyników pomiarów, zanim zostanie on dokładnie omówiony na wykładzie ze *Wstępu do analizy danych*. Poznajemy także zasady wyznaczania niepewności wielkości złożonej, będącej sumą lub różnicą dwu lub więcej zmierzonych wielkości. Drugim celem ćwiczenia jest wyznaczenie oporności wewnętrznej ogniwa elektrochemicznego – baterii R6 - korzystając z dopasowania prostej do wyników pomiaru napięć i prądów w obwodzie z baterią.

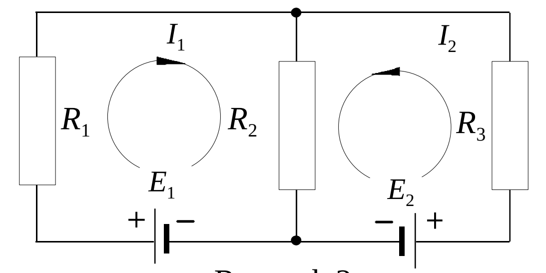
Wstęp
I prawo Kirchhoffa dotyczy węzłów obwodu elektrycznego, tzn. punktów, w których zbiega się kilka przewodów. Stwierdza ono, że *suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów z niego wypływających*. Prawo to wynika z zasady zachowania ładunku elektrycznego: w węzłach sieci ładunek nie znika i nie gromadzi się w trakcie przepływu prądu. Dla sytuacji przedstawionej na rysunku 1 ma ono postać:



Rysunek 1

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5 \,.$$

II prawo Kirchhoffa dotyczy obwodów zamkniętych, czyli tzw. „oczek”. Słownie treść tego prawa można wyrazić następująco: *w dowolnym obwodzie zamkniętym (oczku) algebraiczna suma sił elektromotorycznych (tj. napięć generowanych np. przez znajdujące się w obwodzie baterie lub zasilacze) jest równa sumie spadków napięć na elementach obwodu.* W przypadku obwodów złożonych, II prawo Kirchhoffa stosuje się dla każdego oczka tego obwodu.



Rysunek 2

Na przykład dla obwodu przedstawionego na Rysunku 2 mamy 3 oczka:

a) siła $E_1 \to$ opór $R_1 \to$ opór $R_2 \to$ siła E_1,

b) siła $E_1 \to$ opór $R_1 \to$ opór $R_3 \to$ siła $E_2 \to$ siła $E_{1,}$

c) siła $E_2 \to$ opór R_3 – opór $R_2 \to$ siła E_2.

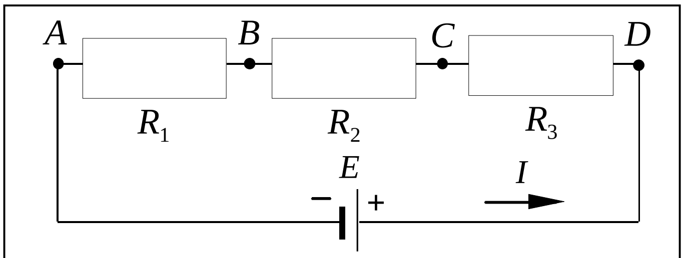
Istnieje kilka technik „rozwiązywania oczek”, tj. formułowania równań na nieznane prądy. Jedna z nich polega na ustaleniu kierunku przepływu prądów w każdym z oczek, jak np. na rysunku 2, i wypisaniu równań Kirchhoffa dla każdego z nich. I tak, odpowiednio dla oczek a), b) i c) otrzymujemy:

$$R_1 I_1 + R_2 \left(I_1 + I_2 \right) = E_1,$$

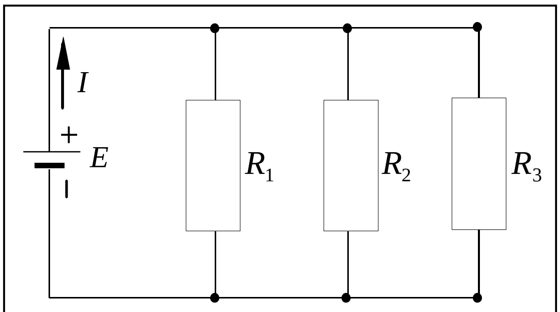
$$R_1 I_1 - R_3 I_2 = E_1 - E_2,$$

$$R_3 I_2 + R_2 \left(I_1 + I_2 \right) = E_2.$$

Przy ustalaniu znaków w wyrażeniach określających napięcie na elementach obwodu, stosujemy się do wybranego kierunku przepływu prądu – jeśli przejście przez element jest zgodne z wybranym kierunkiem przepływu prądu, stawiamy znak „+”, a jeśli przeciwne, to znak „–”. Widzimy jednak, że drugie równanie otrzymujemy przez odejmowanie stronami równania trzeciego od pierwszego, a więc jest liniowo od nich zależne. Rozwiązując równania liniowo niezależne wyznaczamy nieznane natężenia prądów.



Rysunek 3



Rysunek 4

Z praw Kirchhoffa wynika, że całkowita oporność R przewodników połączonych szeregowo (Rysunek 3) jest równa sumie oporności R_i tych przewodników

$$R = R_1 + R_2 + \cdots R_n,$$

zaś całkowita oporność R przewodników połączonych równolegle (Rysunek 4), spełnia zależność:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \frac{1}{R_n}.$$

Niepewności pomiarowe miernika

Miernik uniwersalny Brymen 805 charakteryzują następujące parametry dotyczące pomiarów **natężenia prądu stałego, napięcia stałego** i **oporności** (w temperaturze 23ºC ± 5ºC, wilgotności względnej poniżej 75% i miejscu użycia miernika poniżej 2000 m nad poziomem morza – wpływ ciśnienia):

Natężenie prądu stałego (DC) zakres amperomierza	**Dokładność:** *w + nc*	**Oporność wejściowa**
400,0 μA	2,0% + 5c	150 Ω
4000 μA	1,2% + 3c	150 Ω
40,00 mA	2,0% + 5c	3,3 Ω
400,0 mA	1,2% + 3c	3,3 Ω
4,000 A	2,0% + 5c	0,03 Ω
10,00 A	1,2% + 3c	0,03 Ω

Napięcie stałe (DC) zakres woltomierza	**Dokładność:** *w + nc*	**Oporność wejściowa**
400,0 mV	0,3% + 4c	1 GΩ
4,000 V; 40,00 V; 400,0 V	0,5% + 3c	10 MΩ
1000 V	1,0% + 4c	10 MΩ

Oporność zakres omomierza	**Dokładność:** *w + nc*
400,0 Ω	0,8% + 6c
4,000 kΩ; 40,00 kΩ; 400,0 kΩ	0,6% + 4c
4,000 MΩ	1,0% + 4c
40,00 MΩ	2,0% + 4c

Aktualny zakres pomiarowy miernika rozpoznajemy po formacie liczbowym wyświetlanego wyniku.
Wielkość Δ – **dopuszczalny błąd graniczny wskazania** miernika na danym zakresie pomiarowym - wyznacza się na podstawie wzoru:

$$\Delta = \frac{w}{100} \cdot x + n \cdot c\,,$$

gdzie kolejne dwa składniki oznaczają:

- $w \cdot x / 100$ - niepewność procentowa dla wskazanej wartości x, która jest wyrażana jako **procent wartości zmierzonej** x, gdzie w – **dokładność procentowa** wzięta z powyższych tabeli dla użytego zakresu pomiarowego miernika.
  Przykład.
  Jeśli producent podaje dokładność ***0,5%*** *na wybranym zakresie pomiarowym, to dla wskazania* ***x = 30,00 V*** *otrzymujemy niepewność procentową* $w \cdot x / 100 = 0{,}005 \cdot 30{,}00\ V =$ ***0,15 V****.*

- $n \cdot c$ – **dokładność cyfrowa** określana jako liczba n pojedynczych cyfr na najmniej znaczącej pozycji c wyświetlanej na mierniku. Zależy ona od wybranego zakresu pomiarowego i jakości miernika (przetwornika analogowo-cyfrowego A/C w mierniku), a **nie zależy** od wartości pomiaru.
  Przykład.
  Jeśli producent podaje, że na zakresie pomiarowym ***40,00 V*** *DC dokładność cyfrowa wynosi* ***3c****, to znaczy, że wartość dokładna może się różnić maksymalnie dodatkowo o* **± *0,03 V*** *od*

*odczytanej wartości (pojedyncza cyfra na najmniej znaczącej pozycji odczytu 40,00 V to 0,01 V). Sumując obie wartości otrzymamy dopuszczalny błąd graniczny Δ pomiaru przy wskazaniu **30 V** równy: Δ = 0,15V + 0,03V = **0,18 V** (co stanowi 0,6% pomiaru) dla zakresu **40,00 V DC**.*
Wykonując analogiczne obliczenia dla tej samej wartości mierzonej 30,0 V, ale na niewłaściwie dobranym zakresie pomiarowym miernika **400,0 V DC**, przy tych samych parametrach dokładności, otrzymamy **niekorzystnie większy** dopuszczalny błąd graniczny: Δ = 0,15 V + **0,3 V** = **0,45 V**, co stanowi 1,5% wartości z pomiaru. Należy więc mierzyć na najkorzystniejszym zakresie miernika.

Przykład *(obrazujący pojęcie dokładności miernika)*
*Dokładność przyrządu pomiarowego jest jednym z głównych błędów **systematycznych** w pomiarach. Dla wyobrażenia sobie dokładności przyrządu pomiarowego, np. linijki lub woltomierza, rozważmy następujący model procesu produkcji takich przyrządów. W fabryce, w seryjnej produkcji, wytwarzane są „identyczne" mierniki. Jak każdy proces fizyczny, proces technologiczny nie jest jednak kontrolowany absolutnie dokładnie. Na skutek przypadkowych zakłóceń w jego przebiegu wskazania mierników z wyprodukowanej serii różnią się nieznacznie podczas mierzenia tego samego obiektu. Przyjmijmy, że producent gwarantuje, iż wartość oczekiwana wskazań dla serii produkowanych mierników jest zgodna z wartością dokładną μ, a maksymalny błąd wskazań (dopuszczalny błąd graniczny), czyli różnica między wskazaniem x dowolnego miernika z serii a wartością dokładną μ, nie przekracza co do wartości bezwzględnej wartości $\Delta > 0$. Zastanówmy się, co to oznacza w odniesieniu do używanego przez nas miernika. Najprostszym modelem matematycznym jest przyjęcie, że:*

- *uzyskana w wyniku pomiaru konkretnym miernikiem wartość x zawiera się przedziale ($\mu - \Delta$, $\mu + \Delta$),*
- *każdy wynik z tego przedziału jest jednakowo prawdopodobny w serii wyprodukowanych mierników.*

Przyjmując powyższe założenia dostaje się, że:

- *wariancja σ^2 zmiennej losowej x dla serii mierników wynosi $\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{3}$, czyli niepewność pomiaru (dyspersja, odchylenie standardowe) wynosi $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$ - poz. literatury [1] str.52-55, [2] str. 9, 17 .*
- $1/\sqrt{3} \approx 0.58$ *część wyprodukowanych mierników wskaże wartość w przedziale $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.*

Podsumowując taki model można powiedzieć, że błąd systematyczny konkretnego miernika może być opisywany jako błąd przypadkowy dla serii wyprodukowanych mierników.

Wynik x pojedynczego pomiaru wielkości mierzonej miernikiem podajemy jako $(x \pm \sigma)$, gdzie jako niepewność pomiaru bierzemy odchylenie standardowe $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$, w którym Δ jest dopuszczalnym błędem granicznym wskazań miernika na użytym zakresie pomiarowym.

Wartość oczekiwana i niepewność sumy dwu zmiennych losowych.

Rozważamy sytuację, w której poszukiwana przez nas wielkość nie jest mierzona bezpośrednio (jednym pomiarem), a jest sumą dwu niezależnie zmierzonych wielkości, na przykład dwu natężeń prądów wpływających dwoma przewodami do węzła obwodu elektrycznego. Pomiar pierwszej wielkości x_1 daje wartość oczekiwaną $E(x_1) = \bar{x}_1$ z niepewnością pomiarową $\sigma_1 = \sqrt{E((x_1 - \bar{x}_1)^2)}$, a pomiar drugiej wielkości x_2 daje wartość oczekiwaną $\bar{x}_2$ z niepewnością σ_2. Wielkość sumy

$x_1 + x_2$ poszukiwana przez nas ma wartość oczekiwaną $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$, a jej wariancja σ^2 wynosi:

$$E\left[(x_1 + x_2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2))^2\right] = E\left[(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + (x_2 - \bar{x}_2)^2\right] = \sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2} + 2E\left[(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\right]$$

Dla przypadku kiedy pomiary obu wielkości x_1 i x_2 są niezależne wartość oczekiwana dana trzecim wyrazem tej sumy wynosi 0 i wariancja $\sigma^2 = \sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2}$. Czyli niepewność sumy dwu **niezależnych** zmiennych losowych wynosi $\sigma = \sqrt{\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2}}$. Taki sam wynik dostajemy dla niepewności różnicy dwu niezależnych zmiennych losowych.
Jest to najprostszy przypadek pokazujący, jak niepewności pomiaru wielkości składających się na pewną wielkość wynikową przenoszą się na niepewność tej wielkości wynikowej. Bardziej złożone sytuacje dowolnej funkcji, a nie tylko sumy dwu zmiennych losowych, poznamy w przyszłości jako metodę propagacji małych błędów (ćwiczenie C6 oraz wykład ze *Wstępu do analizy danych*).

TEST 3σ

Elementem niniejszego ćwiczenie jest sprawdzanie zgodności wyników doświadczeń z przewidywaniami teoretycznymi (prawami Kirchhoffa) lub też sprawdzanie wzajemnej zgodności wyników różnych pomiarów, a więc, mówiąc ogólnie, testowanie hipotez. Najprostszym testem zgodności wyników jest tzw. **test 3σ**, spotykany w dwóch następujących typach zagadnień:

- Hipoteza teoretyczna głosi, że „wielkość mierzona ma wartość μ”. Wynik pomiaru x tej wielkości jest określony z dyspersją (niepewnością pomiaru) σ, gdzie σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji σ^2. Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy wartość $|x - \mu|$ i sprawdzamy, jak uzyskana wartość ma się do wartości 3σ. Jeśli znajdujemy, że $|x - \mu| > 3\sigma$, to odrzucamy hipotezę teoretyczną o wartości μ wielkości mierzonej. Jeśli zaś spełniony jest warunek $|x - \mu| \le 3\sigma$, to konkludujemy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna z danymi z pomiaru.
- Hipoteza teoretyczna głosi, że „dwa pomiary uzyskane różnymi metodami (w różnych warunkach) dają tą samą wartość”. Niech wynik x uzyskany jedną metodą będzie określony z dyspersją σ_x, zaś wynik y uzyskany drugą metodą będzie określony z dyspersją σ_y. Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy wartość $|x - y|$ i sprawdzamy, jak wartość ta ma się do wartości 3σ, gdzie $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$. Jeśli znajdujemy: $|x - y| > 3\sigma$, to odrzucamy hipotezę, że oba pomiary dają tę samą wartość. Jeśli zaś spełniony jest warunek, że $|x - y| \le 3\sigma$, to konkludujemy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna z danymi.

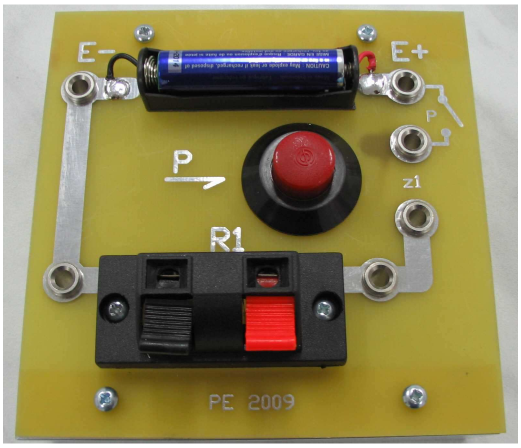
Należy z całą mocą podkreślić, że w przypadku, gdy test 3σ nie odrzuca hipotezy, nie oznacza to, że udowodniliśmy jej słuszność, a jedynie godzimy się z nią, gdyż nie jest sprzeczna z danymi z pomiaru.

Jeśli pomiary opisywane się rozkładem Gaussa (wykład ze *Wstępu do analizy danych*), to testowi można nadać interpretację probabilistyczną: dopuszczamy odrzucenie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 3 razy na 1000 decyzji. Zastąpienie testu 3σ analogicznym testem 2σ oznacza odrzucanie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 1 raz na 20 decyzji.

Układ pomiarowy

Do dyspozycji masz:

- dwa mierniki uniwersalne Brymen 805;
- zasilacz stałego napięcia;
- przewody z końcówkami;
- zestaw pomiarowy 1:
  - płytka drukowana do testowania pr. Ohma i pr. Kirchoffa (ta sama, co w Ćwiczeniu 1),
  - oporniki o opornościach w zakresie od kilku do kilkudziesięciu kΩ,
- zestaw pomiarowy 2:
  - płytka drukowana z baterią (Rysunek 5),
  - oporniki o opornościach w zakresie od kilkudziesięciu do 200 Ω.



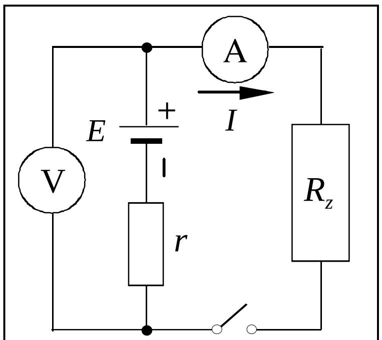
Rys. 5. Układ pomiarowy do wyznaczania oporności wewnętrznej baterii.

Wykonanie ćwiczenia

1. Zmierz omomierzem wartości oporności oporników w zestawie pomiarowym 1 oraz wyznacz ich niepewności pomiarowe.
2. Zbuduj obwód szeregowy, jak na rysunku 3. Wykorzystaj zasilacz jako źródło napięcia. **Uwaga praktyczna**: do dobrej praktyki (wymaganej przez normy) należy przestrzeganie zasady: czerwony kabel podłączamy zawsze do „gorącego" zacisku na zasilaczu. Włącz zasilacz i zmierz napięcia V_{AB}, V_{BC}, V_{CD} na każdym z oporników oraz na wszystkich trzech opornikach łącznie V_{AD} - pomiar między punktami *A* i *D*, czyli napięcie (siła elektromotoryczna) źródła. Notuj dokładnie format liczb, w jakim miernik wyświetla wartości (także w przypadku wyboru automatycznego zakresu pomiarowego miernika), gdyż format ten określa zakres, na którym wykonano pomiar, a więc określa też dopuszczalny błąd graniczny pomiaru.
3. Wyznacz dla zmierzonych wartości napięć V_{AB}, V_{BC}, V_{CD} *i* V_{AD} dopuszczalne błędy graniczne wskazań woltomierza oraz wartości niepewności pomiaru σ. Wyznacz także niepewność sumy $V = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD}$. W tym celu skorzystaj z opisanej wyżej metody sumowania wariancji składników dla wyznaczenia wariancji sumy tych składników.
4. Zastosuj metodę testu 3σ dla rozstrzygnięcia, czy otrzymane z pomiarów wartości V *i* V_{AD} są ze sobą zgodne, czyli czy wynik sumy $V = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD}$ jest zgodny ze zmierzoną wartością siły elektromotorycznej V_{AD}, a więc czy pomiary są zgodne z II prawem Kirchhoffa. Do obliczeń w punkcie 3 i 4 możesz wykorzystać arkusz kalkulacyjny dla niniejszego ćwiczenia w programie Calc z OpenOffice.
5. Zbuduj obwód równolegle połączonych oporników, jak na rysunku 4. Zastosuj zasilacz jako źródło napięcia.
6. Po podłączeniu zasilacza, zmierz natężenia prądu I_1, I_2 oraz I_3 w kolejnych gałęziach z opornikami R_1, R_2 i R_3 obwodu z równoległym połączeniem oporników z Rys. 4 oraz zmierz wartość całego prądu I płynącego ze źródła napięcia.
7. Dla danych uzyskanych w pomiarach w punkcie 6, wyznacz ich niepewności i sprawdź zgodność wyników pomiaru prądu I oraz sumy $I_1+I_2+I_3$ stosując kryterium testu 3σ, czyli sprawdź

zgodność pomiarów z I prawem Kirchhoffa. Do obliczeń możesz znowu wykorzystać arkusz kalkulacyjny dla niniejszego ćwiczenia w programie Calc z OpenOffice.

Pomiary z wykorzystaniem zestawu 2 (wyznaczanie oporu wewnętrznego baterii).



Rysunek 7

8. Zmierz omomierzem wartości oporników z zestawu pomiarowego 2 oraz wyznacz ich niepewności pomiarowe. Nie wymieszaj oporników z zestawów 1 i 2.
9. Korzystając z elementów zestawu pomiarowego 2 zbuduj układ jak na Rysunku 7, w którym źródłem siły elektromotorycznej E jest bateria o nieznanym oporze wewnętrznym r, a opór R_z to jeden z oporników z zestawu 2. Za pomocą mierników zmierz napięcie na zaciskach baterii oraz natężenie prądu płynącego w obwodzie. Wykonaj taki pomiar dla każdego opornika z zestawu 2 zmieniając w ten sposób prąd płynący w obwodzie. Czy obserwujesz zmiany mierzonego napięcia? Czy w tym doświadczeniu zmienia się siła elektromotoryczna baterii?
   Uwaga: czerwony okrągły przycisk służy do zamykania obwodu; wykorzystuj go tylko na czas odczytywania wskazań mierników – nie trzymaj baterii włączonej przez dłużej niż przez kilka sekund, bo powoduje to rozładowywanie baterii, a więc zmianę jej parametrów w czasie doswiadczenia.
10. Z praw Kirchhoffa wynika, iż jeśli do zacisków baterii o sile elektromotorycznej E i oporze wewnętrznym r podłączymy opór zewnętrzny R (rysunek 7), to natężenie I prądu płynącego przez baterię i napięcie U na jej zaciskach spełniają zależność: $U = E - rI$. Zakładając, że siła elektromotoryczna i opór wewnętrzny baterii są stałe, wykorzystaj dane uzyskane w punkcie 9 do wyznaczenia obu wielkości E oraz r. W tym celu wykonaj wykres $U= f(I)$ i dopasowanie do niego linii prostej metodą najmniejszych kwadratów - wyznacz wartości E oraz r z tego dopasowania. Na wykresie zaznacz niepewności pomiarów U oraz I - aby to zrobić w programie Scidavis należy w tabeli danych utworzyć dwie dodatkowe kolumny, oznaczyć je (Set Column As…) jako zawierające X Error oraz Y Error, a następnie z menu Graph→Add Error Bars… przez wybór odpowiednich kolumn dorysować błędy dla punktów pomiarowych.

11. W sprawozdaniu m.in. przedstaw w tabelkach wyniki pomiarów i obliczeń niepewności z punktów 3, 4, 6 i 7, przedstaw wyniki zastosowania testu 3σ, przedstaw wyniki pomiarów z punktu 9 i wykres wraz z dopasowaniem z punktu 10. Opisz krótko uzyskane wyniki i sformułuj wnioski z pomiarów.

Literatura

[1] A. Majhofer, *Analiza niepewności pomiarowych i pracownia wstępna*, skrypt FUW, (wersja 2011), plik pdf dostępny pod adresem: http://anipw.igf.fuw.edu.pl/Instrukcje/AnalizaNiep.pdf

[2] oprac. A. Korgul, *Analiza danych pomiarowych*, wyd. 3 uzup., materiały pomocnicze dla studentów Wydz. Chemii UW, plik pdf dostępny pod adresem: http://www.chem.uw.edu.pl/people/AMyslinski/informator_08/Pracownie/fiz_i_radio/analiza.pdf