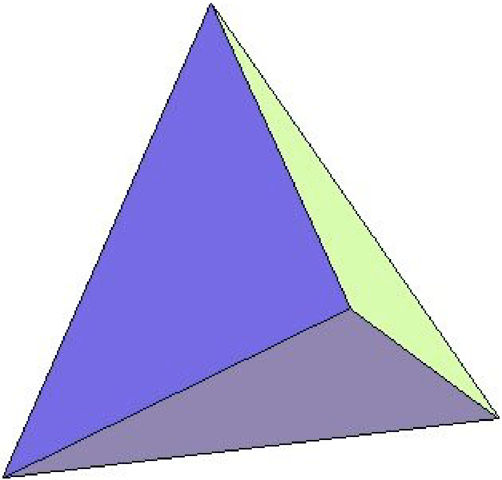
Symetrie w matematyce i fizyce

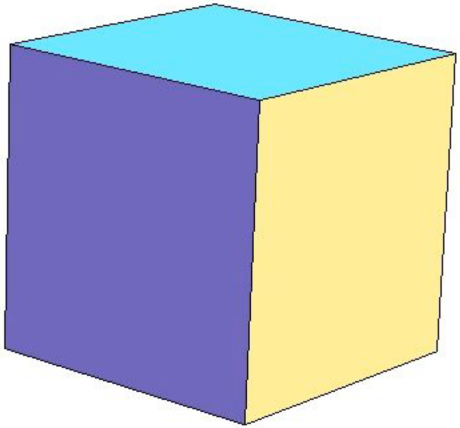
S.L. Woronowicz

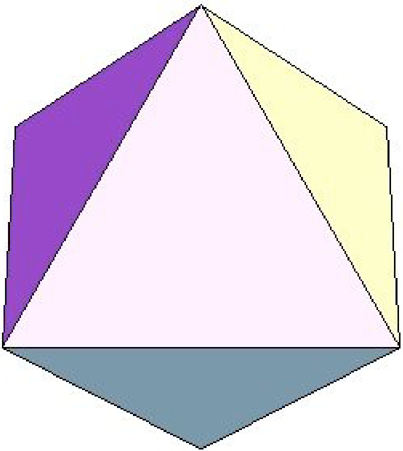
Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

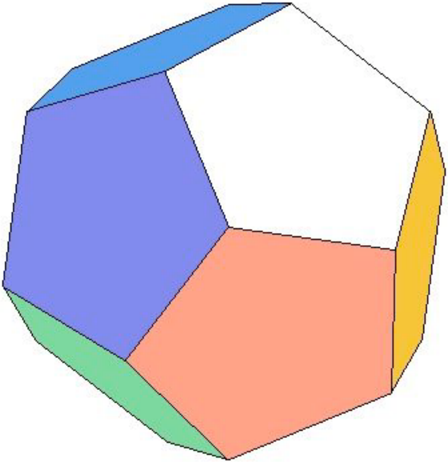
Konwersatorium Wydziału Matematyki

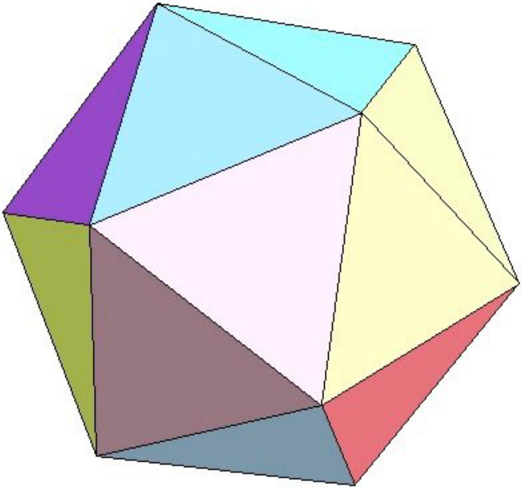
Warszawa, 27.02.2009











Symetrie to automorfizmy struktury

Zbiór symetrii danej struktury tworzy grupę przekształceń

Grupa symetrii

Przykłady:

- Zbiór N-elementowy. Grupa symetrii, to grupa permutacji N elementów
- Przestrzeń wektorowa N-wymiarowa. Grupa symetrii, to grupa odwracalnych odwzorowań liniowych
- Przestrzeń euklidesowa 3-wymiarowa. Grupa symetrii, to n.p: grupa izometrii

Symetrie to automorfizmy struktury

Zbiór symetrii danej struktury tworzy grupę przekształceń

Grupa symetrii

Przykłady:

- Zbiór N-elementowy. Grupa symetrii, to grupa permutacji N elementów
- Przestrzeń wektorowa N-wymiarowa. Grupa symetrii, to grupa odwracalnych odwzorowań liniowych
- Przestrzeń euklidesowa 3-wymiarowa. Grupa symetrii, to n.p: grupa izometrii

Symetrie to automorfizmy struktury
Zbiór symetrii danej struktury tworzy grupę przekształceń
Grupa symetrii

Przykłady:

- Zbiór N-elementowy. Grupa symetrii, to grupa permutacji N elementów
- Przestrzeń wektorowa N-wymiarowa. Grupa symetrii, to grupa odwracalnych odwzorowań liniowych
- Przestrzeń euklidesowa 3-wymiarowa. Grupa symetrii, to n.p: grupa izometrii

Symetrie to automorfizmy struktury
Zbiór symetrii danej struktury tworzy grupę przekształceń
Grupa symetrii

Przykłady:

- Zbiór N-elementowy. Grupa symetrii, to grupa permutacji N elementów
- Przestrzeń wektorowa N-wymiarowa. Grupa symetrii, to grupa odwracalnych odwzorowań liniowych
- Przestrzeń euklidesowa 3-wymiarowa. Grupa symetrii, to n.p: grupa izometrii

Symetrie to automorfizmy struktury
Zbiór symetrii danej struktury tworzy grupę przekształceń
Grupa symetrii

Przykłady:

- Zbiór N-elementowy. Grupa symetrii, to grupa permutacji N elementów
- Przestrzeń wektorowa N-wymiarowa. Grupa symetrii, to grupa odwracalnych odwzorowań liniowych
- Przestrzeń euklidesowa 3-wymiarowa. Grupa symetrii, to n.p: grupa izometrii

Symetrie to automorfizmy struktury
Zbiór symetrii danej struktury tworzy grupę przekształceń
Grupa symetrii

Przykłady:

- Zbiór N-elementowy. Grupa symetrii, to grupa permutacji N elementów
- Przestrzeń wektorowa N-wymiarowa. Grupa symetrii, to grupa odwracalnych odwzorowań liniowych
- Przestrzeń euklidesowa 3-wymiarowa. Grupa symetrii, to n.p: grupa izometrii

Symetrie to automorfizmy struktury
Zbiór symetrii danej struktury tworzy grupę przekształceń
Grupa symetrii

Przykłady:

- Zbiór N-elementowy. Grupa symetrii, to grupa permutacji N elementów
- Przestrzeń wektorowa N-wymiarowa. Grupa symetrii, to grupa odwracalnych odwzorowań liniowych
- Przestrzeń euklidesowa 3-wymiarowa. Grupa symetrii, to n.p: grupa izometrii

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii. Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii.

Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii.

Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii.

Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii.

Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii.

Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii. Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii. Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Program F. Kleina

Niech X będzie zbiorem z bogatą strukturą (trywialna grupa symetrii), a G będzie grupą przekształceń tego zbioru zdefiniowaną w oparciu o tę bogatą strukturę. Wtedy można rozważać najbogatszą strukturę na X, dla której G jest grupą symetrii.

Przykłady:

- $X = \mathbb{R}^N$, $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Otrzymujemy N-wymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ z jej naturalną topologią ale n.p: bez iloczynu skalarnego
- $X = \mathbb{R}^3$, $G = \mathrm{ISO}(3)$. Otrzymujemy przestrzeń euklidesową z orientacją.

Symetrie czasoprzestrzeni

$$\begin{aligned} t' &= T(t,x,y,z) \\ x' &= X(t,x,y,z) \\ y' &= Y(t,x,y,z) \\ z' &= Z(t,x,y,z) \end{aligned}$$

t, x, y, z - współrzędne numerujące zdarzenia, $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$

- t', x', y', z' - nowe współrzędne tej samej czasoprzestrzennej lokalizacji. Prawa fizyki wyrażone w nowych współrzędnych mają mieć tę samą postać, co w starych (transformacja bierna).
- Alternatywnie, t', x', y', z' - współrzędne (w wyjściowym układzie współrzędnych) opisujące nową lokalizację (transformacja czynna). Rzeczywisty proces fizyczny ma przejść na proces możliwy do zrealizowania - zgodny z prawami natury)
- Rozpatrywane transformacje tworzą grupę przekształceń $\mathbb{R}^4$. Zgodnie z programem Kleina definiuje ona pewną strukturę na tym zbiorze. To właśnie jest geometria czasoprzestrzeni.

- t', x', y', z' - nowe współrzędne tej samej czasoprzestrzennej lokalizacji. Prawa fizyki wyrażone w nowych współrzędnych mają mieć tę samą postać, co w starych (transformacja bierna).
- Alternatywnie, t', x', y', z' - współrzędne (w wyjściowym układzie współrzędnych) opisujące nową lokalizację (transformacja czynna). Rzeczywisty proces fizyczny ma przejść na proces możliwy do zrealizowania - zgodny z prawami natury)
- Rozpatrywane transformacje tworzą grupę przekształceń $\mathbb{R}^4$. Zgodnie z programem Kleina definiuje ona pewną strukturę na tym zbiorze. To właśnie jest geometria czasoprzestrzeni.

- t', x', y', z' - nowe współrzędne tej samej czasoprzestrzennej lokalizacji. Prawa fizyki wyrażone w nowych współrzędnych mają mieć tę samą postać, co w starych (transformacja bierna).
- Alternatywnie, t', x', y', z' - współrzędne (w wyjściowym układzie współrzędnych) opisujące nową lokalizację (transformacja czynna). Rzeczywisty proces fizyczny ma przejść na proces możliwy do zrealizowania - zgodny z prawami natury)
- Rozpatrywane transformacje tworzą grupę przekształceń $\mathbb{R}^4$. Zgodnie z programem Kleina definiuje ona pewną strukturę na tym zbiorze. To właśnie jest geometria czasoprzestrzeni.

Symetrie czasoprzestrzeni

Przesunięcia

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x + \xi \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

Symetrie czasoprzestrzeni

Przesunięcia w czasie

$$t' = t + \tau$$
$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Symetrie czasoprzestrzeni

Obroty

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x\cos\varphi + z\sin\varphi \\
y' &= y \\
z' &= -x\sin\varphi + z\cos\varphi
\end{aligned}
$$

Symetrie czasoprzestrzeni

Pchnięcia (boosts)

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x + vt \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

Mechanika Newtona

$$
\begin{aligned}
t' &= t\cosh\psi + \frac{x}{c}\sinh\psi \\
x' &= ct\sinh\psi + x\cosh\psi \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\qquad v = c\tanh\psi
$$

Elektrodynamika Maxwell'a
Szczególna teoria względności Einsteina

Symetrie czasoprzestrzeni

Pchnięcia (boosts)

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x + vt \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

Mechanika Newtona

$$
\begin{aligned}
t' &= t\cosh\psi + \frac{x}{c}\sinh\psi \\
x' &= ct\sinh\psi + x\cosh\psi \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\qquad v = c\tanh\psi
$$

Elektrodynamika Maxwell'a
Szczególna teoria względności Einsteina

Symetrie czasoprzestrzeni

Pchnięcia (boosts)

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x + vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Mechanika Newtona

$$\begin{aligned} t' &= t \cosh\psi + \frac{x}{c}\sinh\psi \\ x' &= ct\sinh\psi + x\cosh\psi \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$v = c\tanh\psi$$

Elektrodynamika Maxwell'a

Szczególna teoria względności Einsteina

Symetrie czasoprzestrzeni

Pchnięcia (boosts)

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x + vt \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

Mechanika Newtona

$$
\begin{aligned}
t' &= t\cosh\psi + \frac{x}{c}\sinh\psi \\
x' &= ct\sinh\psi + x\cosh\psi \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\qquad v = c\tanh\psi
$$

Elektrodynamika Maxwell'a
Szczególna teoria względności Einsteina

Symetrie czasoprzestrzeni

Odbicia przestrzenne (lustro)

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x \\
y' &= y \\
z' &= -z
\end{aligned}
$$

Symetrie czasoprzestrzeni

Odbicia w czasie

$$t' = -t$$
$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Symetrie czasoprzestrzeni

Grupa Galileusza
$= \mathbb{R}^4 \ltimes (\mathbb{R}^3 \ltimes \mathrm{SO}(3))$

Grupa Poincaré'go
$\mathcal{P}_+^\uparrow$ = Składowa spójna
ISO(1,3)

Symetrie czasoprzestrzeni

Grupa Galileusza
$= \mathbb{R}^4 \ltimes (\mathbb{R}^3 \ltimes \mathrm{SO}(3))$

Grupa Poincaré'go
$\mathcal{P}_+^\uparrow$ = Składowa spójna
ISO(1,3)

Symetrie czasoprzestrzeni

Grupa Galileusza
$= \mathbb{R}^4 \ltimes (\mathbb{R}^3 \ltimes \mathrm{SO}(3))$

Grupa Poincaré'go
$\mathcal{P}_+^\uparrow$ = Składowa spójna
ISO(1,3)

Kontrakcja Inonu - Wignera

Prawa ruchu

- II zasada dynamiki Newtona

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$$

- Funkcja Lagrange'a

$$L(x, u, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i u_i^2 - V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Działanie

$$S\left(\{x(t)\}_{t_1 \le t \le t_2}\right) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, t\right) dt$$

Zasada najmniejszego działania

Równania Newtona są równoważne następującej zasadzie wariacyjnej:

$$S\left(\{x(t)\}_{t_1 \le t \le t_2}\right) = \mathrm{minimum},$$

$$\delta S\left(\{x(t)\}_{t_1 \le t \le t_2}\right) = 0,$$

gdzie do konkurencji dopuszcza sie tylko trajektorie z tym samym początkiem i końcem: $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$. W ogólnym przypadku (dla trajektorii rzeczywistej)

$$\delta S\left(\{x(t)\}_{t_1 \le t \le t_2}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\delta x_i(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2},$$

where $p_i(t) = m_i \frac{dx_i(t)}{dt}$.

Zasada najmniejszego działania

Równania Newtona są równoważne następującej zasadzie wariacyjnej:

$$S\left(\{x(t)\}_{t_1 \le t \le t_2}\right) = \mathrm{minimum},$$

$$\delta S\left(\{x(t)\}_{t_1 \le t \le t_2}\right) = 0,$$

gdzie do konkurencji dopuszcza sie tylko trajektorie z tym samym początkiem i końcem: $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$. W ogólnym przypadku (dla trajektorii rzeczywistej)

$$\delta S\left(\{x(t)\}_{t_1 \le t \le t_2}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\delta x_i(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2},$$

where $p_i(t) = m_i \frac{dx_i(t)}{dt}$.

Jeżeli jakaś transformacja nie zmienia działania:

$$S' = S$$

to oczywiście jest symetrią (zastosowana do trajektorii spełniającej równania ruchu produkuje trajektorię też je spełniającą). Nie jest to warunek konieczny, wystarcza n.p: zeby $S' - S$ zależało tylko od początkowych i końcowych położeń cząstek.

Jeżeli jakaś transformacja nie zmienia działania:

$$S' = S$$

to oczywiście jest symetrią (zastosowana do trajektorii spełniającej równania ruchu produkuje trajektorię też je spełniającą). Nie jest to warunek konieczny, wystarcza n.p: zeby $S' - S$ zależało tylko od początkowych i końcowych położeń cząstek.

Symetrie a prawa zachowania

Emma Noether
(1882-1935)

Twierdzenie (Noether)

Każda jednoparametrowa grupa transformacji zachowujących działanie generuje stałą ruchu (całkę pierwszą równań ruchu).

Przykłady

- Przesuniecia $\longrightarrow$ pęd
- Przesuniecia w czasie $\longrightarrow$ energia
- Obroty $\longrightarrow$ moment pędu

Emma Noether
(1882-1935)

Twierdzenie (Noether)

Każda jednoparametrowa grupa transformacji zachowujących działanie generuje stałą ruchu (całkę pierwszą równań ruchu).

Przykłady

- Przesuniecia $\longrightarrow$ pęd
- Przesuniecia w czasie $\longrightarrow$ energia
- Obroty $\longrightarrow$ moment pędu

Symetrie a prawa zachowania

Emma Noether
(1882-1935)

Twierdzenie (Noether)

Każda jednoparametrowa grupa transformacji zachowujących działanie generuje stałą ruchu (całkę pierwszą równań ruchu).

Przykłady

- Przesuniecia $\longrightarrow$ pęd
- Przesuniecia w czasie $\longrightarrow$ energia
- Obroty $\longrightarrow$ moment pędu

Symetrie a prawa zachowania

Emma Noether
(1882-1935)

Twierdzenie (Noether)

Każda jednoparametrowa grupa transformacji zachowujących działanie generuje stałą ruchu (całkę pierwszą równań ruchu).

Przykłady

- Przesuniecia $\longrightarrow$ pęd
- Przesuniecia w czasie $\longrightarrow$ energia
- Obroty $\longrightarrow$ moment pędu

Szkic dowodu

Przesunięcie w czasie: $t' = t + \delta\tau$, $x_i'(t) = x_i(t + \delta\tau)$

$$S\left(\{x'(t)\}_{t_1-\tau\le t\le t_2-\tau}\right) = S\left(\{x(t)\}_{t_1\le t\le t_2}\right)$$

$$0 = S' - S = -\,L\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}\delta\tau + \delta S$$

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\delta x_i(t)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{dx_i(t)}{dt}\right)^2\delta\tau\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2},$$

bo $\delta x_i(t) = x_i(t+\delta\tau) - x_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}\delta\tau$.

Szkic dowodu

Przesunięcie w czasie: $t' = t + \delta\tau$, $x_i'(t) = x_i(t + \delta\tau)$

$$S\left(\{x'(t)\}_{t_1-\tau\le t\le t_2-\tau}\right) = S\left(\{x(t)\}_{t_1\le t\le t_2}\right)$$

$$0 = S' - S = -L\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}\delta\tau + \delta S$$

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\delta x_i(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{dx_i(t)}{dt}\right)^2\delta\tau\Big|_{t=t_1}^{t=t_2},$$

bo $\delta x_i(t) = x_i(t+\delta\tau) - x_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}\delta\tau$.

Szkic dowodu

Przesunięcie w czasie: $t' = t + \delta\tau$, $x_i'(t) = x_i(t + \delta\tau)$

$$S\left(\{x'(t)\}_{t_1-\tau\leq t\leq t_2-\tau}\right) = S\left(\{x(t)\}_{t_1\leq t\leq t_2}\right)$$

$$0 = S' - S = -\, L\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} \delta\tau + \delta S$$

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\delta x_i(t)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{dx_i(t)}{dt}\right)^2 \delta\tau\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2},$$

bo $\delta x_i(t) = x_i(t+\delta\tau) - x_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}\delta\tau$.

Szkic dowodu

Przesunięcie w czasie: $t' = t + \delta\tau$, $x_i'(t) = x_i(t + \delta\tau)$

$$S\left(\{x'(t)\}_{t_1-\tau\le t\le t_2-\tau}\right) = S\left(\{x(t)\}_{t_1\le t\le t_2}\right)$$

$$0 = S' - S = -\,L\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} \delta\tau + \delta S$$

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\delta x_i(t)\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{dx_i(t)}{dt}\right)^2 \delta\tau\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2},$$

bo $\delta x_i(t) = x_i(t+\delta\tau) - x_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}\delta\tau$.

Zatem wielkość

$$-L + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

jest zachowywana. Ta wielkość, to energia rozpatrywanego układu cząstek.

Podobnie

- dowolnej jednoparametrowej grupy niezmieniającej działania,
- teorii ośrodków ciągłych (pola),
- mechaniki relatywistycznej.

Zatem wielkość

$$-L+\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

jest zachowywana. Ta wielkość, to energia rozpatrywanego układu cząstek.

Podobnie

- dowolnej jednoparametrowej grupy niezmieniającej działania,
- teorii ośrodków ciągłych (pola),
- mechaniki relatywistycznej.

Zatem wielkość

$$-L+\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

jest zachowywana. Ta wielkość, to energia rozpatrywanego układu cząstek.

Podobnie

- dowolnej jednoparametrowej grupy niezmieniającej działania,
- teorii ośrodków ciągłych (pola),
- mechaniki relatywistycznej.

Zatem wielkość

$$-L + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

jest zachowywana. Ta wielkość, to energia rozpatrywanego układu cząstek.
Podobnie

- dowolnej jednoparametrowej grupy niezmieniającej działania,
- teorii ośrodków ciągłych (pola),
- mechaniki relatywistycznej.

Fizyka klasyczna - Fizyka kwantowa

W fizyce klasycznej stany układu są opisywane punktami rozmaitości różniczkowalnej (tzw. przestrzeń fazowa). Wielkości fizyczne, to funkcje rzeczywiste (gładkie) na przestrzeni fazowej. $f(\xi)$, to wartość wielkości f w stanie ξ. Symetrie, to diffeomorfizmy przestrzeni fazowej

W mechanice kwantowej stany układu są opisywane wektorami (o długości 1) w przestrzeni Hilberta, przy czym pomnożenie wektora przez liczbę o module 1 (tzw. czynnik fazowy) nie zmienia stanu. Wielkości fizyczne, to operatory samosprzężone. $(\Psi|A|\Psi)$, to wartość średnia wielkości A w stanie Ψ. Symetrie reprezentują się operatorami unitarnymi na przestrzeni Hilberta

Grupy symetrii w mechanice kwantowej

- Dwa operatory unitarne różniące się o czynnik fazowy określają tę samą symetrię.
- Działanie grupy jest opisywane przez reprezentację projektywną tej grupy.
- Reprezentacje projektywne grupy G = Reprezentacje unitarne grupy $\tilde{G}$, gdzie $\tilde{G}$ jest centralnym rozszerzeniem G przez jednowymiarowy torus.
- Dla grupy Poincaré'go reprezentacje projektywne = reprezentacje grupy nakrywającej. Obrót o 360^o jest reprezentowany przez $\pm I$.
- Znak $+$ odpowiada układom o spinie całkowitym, a znak $-$ układom o spinie połówkowym. Nie można ich superponować.

Grupy symetrii w mechanice kwantowej

- Dwa operatory unitarne różniące się o czynnik fazowy określają tę samą symetrię.
- Działanie grupy jest opisywane przez reprezentację projektywną tej grupy.
- Reprezentacje projektywne grupy G = Reprezentacje unitarne grupy $\tilde{G}$, gdzie $\tilde{G}$ jest centralnym rozszerzeniem G przez jednowymiarowy torus.
- Dla grupy Poincaré'go reprezentacje projektywne = reprezentacje grupy nakrywającej. Obrót o 360^o jest reprezentowany przez $\pm I$.
- Znak $+$ odpowiada układom o spinie całkowitym, a znak $-$ układom o spinie połówkowym. Nie można ich superponować.

Grupy symetrii w mechanice kwantowej

- Dwa operatory unitarne różniące się o czynnik fazowy określają tę samą symetrię.
- Działanie grupy jest opisywane przez reprezentację projektywną tej grupy.
- Reprezentacje projektywne grupy G = Reprezentacje unitarne grupy $\tilde{G}$, gdzie $\tilde{G}$ jest centralnym rozszerzeniem G przez jednowymiarowy torus.
- Dla grupy Poincaré'go reprezentacje projektywne = reprezentacje grupy nakrywającej. Obrót o 360° jest reprezentowany przez $\pm I$.
- Znak $+$ odpowiada układom o spinie całkowitym, a znak $-$ układom o spinie połówkowym. Nie można ich superponować.

Grupy symetrii w mechanice kwantowej

- Dwa operatory unitarne różniące się o czynnik fazowy określają tę samą symetrię.
- Działanie grupy jest opisywane przez reprezentację projektywną tej grupy.
- Reprezentacje projektywne grupy $G =$ Reprezentacje unitarne grupy $\tilde{G}$, gdzie $\tilde{G}$ jest centralnym rozszerzeniem G przez jednowymiarowy torus.
- Dla grupy Poincaré'go reprezentacje projektywne = reprezentacje grupy nakrywającej. Obrót o 360^o jest reprezentowany przez $\pm I$.
- Znak $+$ odpowiada układom o spinie całkowitym, a znak $-$ układom o spinie połówkowym. Nie można ich superponować.

Grupy symetrii w mechanice kwantowej

- Dwa operatory unitarne różniące się o czynnik fazowy określają tę samą symetrię.
- Działanie grupy jest opisywane przez reprezentację projektywną tej grupy.
- Reprezentacje projektywne grupy G = Reprezentacje unitarne grupy $\tilde{G}$, gdzie $\tilde{G}$ jest centralnym rozszerzeniem G przez jednowymiarowy torus.
- Dla grupy Poincaré'go reprezentacje projektywne = reprezentacje grupy nakrywającej. Obrót o 360^o jest reprezentowany przez $\pm I$.
- Znak $+$ odpowiada układom o spinie całkowitym, a znak $-$ układom o spinie połówkowym. Nie można ich superponować.

Grupy Poincaré'go

Eugene Paul Wigner (1902-1995)

- Fizycznie interesujące nieprzywiedlne reprezentacje grupy nakrywającej grupy Poincaré'go zastały sklasyfikowane przez Eugene Wignera w słynnej pracy z 1939 roku.
- Reprezentacje są wyznaczone przez masę $m \geq 0$ i (dla $m > 0$) spin $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Reprezentacje z $m = 0$ są klasyfikowane przez helicity $s \in \mathbb{Z}/2$.
- Klasyfikacja reprezentacji nieprzywiedlnych odpowiada klasyfikacji cząstek elementarnych ze względu na ich własności czasoprzestrzenne.
- Praca Wignera stymulowała rozwój teorii reprezentacji grup (Gelfand, Mackey, ...)

Grupy Poincaré'go

Eugene Paul Wigner (1902-1995)

- Fizycznie interesujące nieprzywiedlne reprezentacje grupy nakrywającej grupy Poincaré'go zastały sklasyfikowane przez Eugene Wignera w słynnej pracy z 1939 roku.
- Reprezentacje są wyznaczone przez masę $m \geq 0$ i (dla $m > 0$) spin $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Reprezentacje z $m = 0$ są klasyfikowane przez helicity $s \in \mathbb{Z}/2$.
- Klasyfikacja reprezentacji nieprzywiedlnych odpowiada klasyfikacji cząstek elementarnych ze względu na ich własności czasoprzestrzenne.
- Praca Wignera stymulowała rozwój teorii reprezentacji grup (Gelfand, Mackey, ...)

Grupy Poincaré'go

Eugene Paul Wigner (1902-1995)

- Fizycznie interesujące nieprzywiedlne reprezentacje grupy nakrywającej grupy Poincaré'go zastały sklasyfikowane przez Eugene Wignera w słynnej pracy z 1939 roku.
- Reprezentacje są wyznaczone przez masę $m \geq 0$ i (dla $m > 0$) spin $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Reprezentacje z $m = 0$ są klasyfikowane przez helicity $s \in \mathbb{Z}/2$.
- Klasyfikacja reprezentacji nieprzywiedlnych odpowiada klasyfikacji cząstek elementarnych ze względu na ich własności czasoprzestrzenne.
- Praca Wignera stymulowała rozwój teorii reprezentacji grup (Gelfand, Mackey, ...)

Grupy Poincaré'go

Eugene Paul Wigner (1902-1995)

- Fizycznie interesujące nieprzywiedlne reprezentacje grupy nakrywającej grupy Poincaré'go zastały sklasyfikowane przez Eugene Wignera w słynnej pracy z 1939 roku.
- Reprezentacje są wyznaczone przez masę $m \geq 0$ i (dla $m > 0$) spin $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Reprezentacje z $m = 0$ są klasyfikowane przez helicity $s \in \mathbb{Z}/2$.
- Klasyfikacja reprezentacji nieprzywiedlnych odpowiada klasyfikacji cząstek elementarnych ze względu na ich własności czasoprzestrzenne.
- Praca Wignera stymulowała rozwój teorii reprezentacji grup (Gelfand, Mackey, ...)

Identyczne cząstki

- Czy w przyrodzie mogą istnieć identyczne obiekty?
- Według Demokryta świat był zbudowany z kilku rodzajów identycznych atomów. Atomy były niezniszczalne i niepodzielne.
- Nie ma niezniszczalnych i niepodzielnych obiektów.
- Tym nie mniej istnienie identycznych obiektów w skali masowej jest możliwe dzięki teorii kwantów.

Identyczne cząstki

- Czy w przyrodzie mogą istnieć identyczne obiekty?
- Według Demokryta świat był zbudowany z kilku rodzajów identycznych atomów. Atomy były niezniszczalne i niepodzielne.
- Nie ma niezniszczalnych i niepodzielnych obiektów.
- Tym nie mniej istnienie identycznych obiektów w skali masowej jest możliwe dzięki teorii kwantów.

Identyczne cząstki

- Czy w przyrodzie mogą istnieć identyczne obiekty?
- Według Demokryta świat był zbudowany z kilku rodzajów identycznych atomów. Atomy były niezniszczalne i niepodzielne.
- Nie ma niezniszczalnych i niepodzielnych obiektów.
- Tym nie mniej istnienie identycznych obiektów w skali masowej jest możliwe dzięki teorii kwantów.

Identyczne cząstki

- Czy w przyrodzie mogą istnieć identyczne obiekty?
- Według Demokryta świat był zbudowany z kilku rodzajów identycznych atomów. Atomy były niezniszczalne i niepodzielne.
- Nie ma niezniszczalnych i niepodzielnych obiektów.
- Tym nie mniej istnienie identycznych obiektów w skali masowej jest możliwe dzięki teorii kwantów.

Stany podstawowe

- Stan podstawowy, to stan o najmniejszej energii. Typowo dla danego układu fizycznego jest on wyznaczony jednoznacznie. Pierwszy stan wzbudzony ma energię ściśle większą od stanu podstawowego, przy czym różnica energii jest tym większa, im mniejszy (rozmiarami przestrzennymi) układ rozpatrujemy.
- Większość układów znajduje się w stanie podstawowym, ze względu na *wszechświatowy chaos* i deficyt energii.
- Dlatego atomy helu są identyczne (modulo lokalizacja czasoprzestrzenna). Podobnie cząsteczki wodoru, elektrony, itd.

Stany podstawowe

- Stan podstawowy, to stan o najmniejszej energii. Typowo dla danego układu fizycznego jest on wyznaczony jednoznacznie. Pierwszy stan wzbudzony ma energię ściśle większą od stanu podstawowego, przy czym różnica energii jest tym większa, im mniejszy (rozmiarami przestrzennymi) układ rozpatrujemy.
- Większość układów znajduje się w stanie podstawowym, ze względu na *wszechświatowy chaos* i deficyt energii.
- Dlatego atomy helu są identyczne (modulo lokalizacja czasoprzestrzenna). Podobnie cząsteczki wodoru, elektrony, itd.

Stany podstawowe

- Stan podstawowy, to stan o najmniejszej energii. Typowo dla danego układu fizycznego jest on wyznaczony jednoznacznie. Pierwszy stan wzbudzony ma energię ściśle większą od stanu podstawowego, przy czym różnica energii jest tym większa, im mniejszy (rozmiarami przestrzennymi) układ rozpatrujemy.
- Większość układów znajduje się w stanie podstawowym, ze względu na *wszechświatowy chaos* i deficyt energii.
- Dlatego atomy helu są identyczne (modulo lokalizacja czasoprzestrzenna). Podobnie cząsteczki wodoru, elektrony, itd.

Bozony i fermiony

Jeżeli w rozpatrywanym układzie są identyczne podukłady, to grupa permutacji jest grupą symetrii. Okazuje się, że spośród wszelkich możliwych reprezentacji grupy permutacji (diagramy Younga) fizycznie realizują się tylko reprezentacja trywialna (bozony) i reprezentacja signum (fermiony).

Aksjomatyczna kwantowa teoria pola

Wchodząc z postulatów:

- Dodatniość energii (warunek spektralny)
- Relatywistyczna niezmienniczość
- Lokalność

można udowodnić:

- Związek spinu ze statystyką: Fermiony maję spin połówkowy, a bozony całkowity
- Niezmienniczość TCP (świat oglądany w lustrze jest zbudowany z antymaterii)

Aksjomatyczna kwantowa teoria pola

Wchodząc z postulatów:

- Dodatniość energii (warunek spektralny)
- Relatywistyczna niezmienniczość
- Lokalność

można udowodnić:

- Związek spinu ze statystyką: Fermiony maję spin połówkowy, a bozony całkowity
- Niezmienniczość TCP (świat oglądany w lustrze jest zbudowany z antymaterii)

Symetria praw a symetria stanów

- Obserwowany świat nie wydaje się być translacyjnie niezmienniczym. Ziemia znajduje się w konkretnym miejscu w przestrzeni. Przesunięcie układu Słonecznego o 1 rok świetlny w kierunku Syriusza produkuje możliwą (zgodny z prawami fizyki) kopię układu, która jednak realnie nie istnieje.
- Dla układu kwantowego w stanie podstawowym, ze względu na jego jedyność, symetria praw implikuje symetrię stanu.
- Możliwe jest łamanie symetrii. W teorii pola stan próżni nie jest jedyny.

Symetria praw a symetria stanów

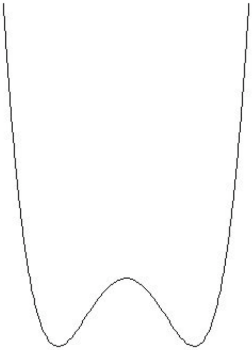
- Obserwowany świat nie wydaje się być translacyjnie niezmienniczym. Ziemia znajduje się w konkretnym miejscu w przestrzeni. Przesunięcie układu Słonecznego o 1 rok świetlny w kierunku Syriusza produkuje możliwą (zgodny z prawami fizyki) kopię układu, która jednak realnie nie istnieje.
- Dla układu kwantowego w stanie podstawowym, ze względu na jego jedyność, symetria praw implikuje symetrię stanu.
- Możliwe jest łamanie symetrii. W teorii pola stan próżni nie jest jedyny.

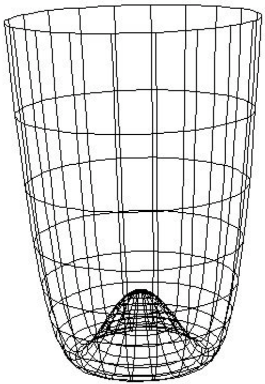
Symetria praw a symetria stanów

- Obserwowany świat nie wydaje się być translacyjnie niezmienniczym. Ziemia znajduje się w konkretnym miejscu w przestrzeni. Przesunięcie układu Słonecznego o 1 rok świetlny w kierunku Syriusza produkuje możliwą (zgodny z prawami fizyki) kopię układu, która jednak realnie nie istnieje.
- Dla układu kwantowego w stanie podstawowym, ze względu na jego jedyność, symetria praw implikuje symetrię stanu.
- Możliwe jest łamanie symetrii. W teorii pola stan próżni nie jest jedyny.

Łamanie symetrii

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right|^2 + V(\Phi(x)) \right\} d^3x$$





Łamanie symetrii

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right|^2 + V(\Phi(x)) \right\} d^3x$$

- W mechanice kwantowej - jeden stan podstawowy
- W kwantowej teorii pola - rozmaitość stanów podstawowych. Grupa obrotów w przestrzeni wartości pola Φ jest grupą symetrii, która jest jest złamana.
- Topologiczne liczby kwantowe.
- Problem z nieskończoną energią. Teoria Younga-Millsa.
- Cząstki Higgsa

Łamanie symetrii

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right|^2 + V(\Phi(x)) \right\} d^3x$$

- W mechanice kwantowej - jeden stan podstawowy
- W kwantowej teorii pola - rozmaitość stanów podstawowych. Grupa obrotów w przestrzeni wartości pola Φ jest grupą symetrii, która jest jest złamana.
- Topologiczne liczby kwantowe.
- Problem z nieskończoną energią. Teoria Younga-Millsa.
- Cząstki Higgsa

Łamanie symetrii

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right|^2 + V(\Phi(x)) \right\} d^3x$$

- W mechanice kwantowej - jeden stan podstawowy
- W kwantowej teorii pola - rozmaitość stanów podstawowych. Grupa obrotów w przestrzeni wartości pola Φ jest grupą symetrii, która jest jest złamana.
- Topologiczne liczby kwantowe.
- Problem z nieskończoną energią. Teoria Younga-Millsa.
- Cząstki Higgsa

Łamanie symetrii

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right|^2 + V(\Phi(x)) \right\} d^3x$$

- W mechanice kwantowej - jeden stan podstawowy
- W kwantowej teorii pola - rozmaitość stanów podstawowych. Grupa obrotów w przestrzeni wartości pola Φ jest grupą symetrii, która jest jest złamana.
- Topologiczne liczby kwantowe.
- Problem z nieskończoną energią. Teoria Younga-Millsa.
- Cząstki Higgsa

Łamanie symetrii

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} \right|^2 + V(\Phi(x)) \right\} d^3x$$

- W mechanice kwantowej - jeden stan podstawowy
- W kwantowej teorii pola - rozmaitość stanów podstawowych. Grupa obrotów w przestrzeni wartości pola Φ jest grupą symetrii, która jest jest złamana.
- Topologiczne liczby kwantowe.
- Problem z nieskończoną energią. Teoria Younga-Millsa.
- Cząstki Higgsa

Deformacje grup

- Topologia w zbiorze grup Liego o zadanym wymiarze. Niehausdorffowska.
- Przykład: $SU(2)$ - punkt otwarty, w domknięciu grupy $E(2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Przykład: Grupa Poincaré'go - punkt otwarty, w domknięciu grupa Galileusza.
- W fizyce: zastąpienie grupy symetrii przez bliską do niej może prowadzić do nowej teorii lepiej opisującej rzeczywistość.
- Teoria grup kwantowych w istotny sposób poszerza przestrzeń grup. Teraz $SU(2)$ nie jest punktem otwartym i daje się zdeformować.

Deformacje grup

- Topologia w zbiorze grup Liego o zadanym wymiarze. Niehausdorffowska.
- Przykład: $SU(2)$ - punkt otwarty, w domknięciu grupy $E(2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Przykład: Grupa Poincaré'go - punkt otwarty, w domknięciu grupa Galileusza.
- W fizyce: zastąpienie grupy symetrii przez bliską do niej może prowadzić do nowej teorii lepiej opisującej rzeczywistość.
- Teoria grup kwantowych w istotny sposób poszerza przestrzeń grup. Teraz $SU(2)$ nie jest punktem otwartym i daje się zdeformować.

Deformacje grup

- Topologia w zbiorze grup Liego o zadanym wymiarze. Niehausdorffowska.
- Przykład: $SU(2)$ - punkt otwarty, w domknięciu grupy $E(2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Przykład: Grupa Poincaré'go - punkt otwarty, w domknięciu grupa Galileusza.
- W fizyce: zastąpienie grupy symetrii przez bliską do niej może prowadzić do nowej teorii lepiej opisującej rzeczywistość.
- Teoria grup kwantowych w istotny sposób poszerza przestrzeń grup. Teraz $SU(2)$ nie jest punktem otwartym i daje się zdeformować.

Deformacje grup

- Topologia w zbiorze grup Liego o zadanym wymiarze. Niehausdorffowska.
- Przykład: $SU(2)$ - punkt otwarty, w domknięciu grupy $E(2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Przykład: Grupa Poincaré'go - punkt otwarty, w domknięciu grupa Galileusza.
- W fizyce: zastąpienie grupy symetrii przez bliską do niej może prowadzić do nowej teorii lepiej opisującej rzeczywistość.
- Teoria grup kwantowych w istotny sposób poszerza przestrzeń grup. Teraz $SU(2)$ nie jest punktem otwartym i daje się zdeformować.

Deformacje grup

- Topologia w zbiorze grup Liego o zadanym wymiarze. Niehausdorffowska.
- Przykład: $SU(2)$ - punkt otwarty, w domknięciu grupy $E(2)$ i $\mathbb{R}^3$.
- Przykład: Grupa Poincaré'go - punkt otwarty, w domknięciu grupa Galileusza.
- W fizyce: zastąpienie grupy symetrii przez bliską do niej może prowadzić do nowej teorii lepiej opisującej rzeczywistość.
- Teoria grup kwantowych w istotny sposób poszerza przestrzeń grup. Teraz $SU(2)$ nie jest punktem otwartym i daje się zdeformować.