

Uniwersytet Warszawski

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Wydział Fizyki

PRACA DOKTORSKA

**Nowe deformacje grupy afinicznych
przekształceń płaszczyzny**

Piotr Mikołaj Sołtan



WARSZAWA 2003

Praca przygotowana pod opieką prof. dr. hab. S.L. Woronowicza

Pracę tę dedykuję mojej rodzinie

Spis treści

1	Wstęp	3
1.1	Cel pracy	3
1.2	Uwagi bibliograficzne	4
1.3	Struktura pracy	4
1.4	Najważniejsze wyniki	6
1.5	Podziękowania	7
2	Podstawowe definicje i notacja	8
2.1	Używane oznaczenia	8
2.2	Przestrzenie Hilberta i operatory	9
2.3	C^* -algebry	11
2.4	Ważna konwencja	12
3	Klasyczna grupa „$az + b$”	14
3.1	Grupa i jej $*$ -algebra Hopfa	14
3.2	Poziom przestrzeni Hilberta	15
3.3	Poziom C^* -algebry	16
4	Kwantowe grupy „$az + b$”	18
4.1	Algebraiczne kwantowe grupy „ $az + b$ ”	18
4.2	Przykłady S.L. Woronowicza	21
5	Funkcje specjalne	23
5.1	Parametr Deformacji	23
5.2	Grupa Γ_q	23
5.3	Bicharakter i funkcja α	27
5.4	Funkcja $\mathbb{F}_q$	29
5.4.1	Formuła wiążąca funkcje $\mathbb{F}_q$ i α	35
5.4.2	Transformata Fouriera funkcji $\mathbb{F}_q$	37
5.5	Potrzebne lematy	40
6	Relacje komutacyjne	45
6.1	Sformułowanie problemu	45

6.2	Dziedzina operatorowa $\tilde{\mathcal{D}}$	46
6.3	Dziedzina operatorowa $\mathcal{D}$	48
6.4	Równości operatorowe w $\mathcal{D}$	53
6.5	Wyróżnienie dziedziny $\mathcal{D}$	60
7	Nowe deformacje grupy „$az + b$”	67
7.1	Operator mnożący unitarny	67
7.2	Relacja stowarzyszenia i funkcje specjalne	77
7.3	Iloczyn krzyżowy	84
7.4	Grupa kwantowa	88
7.5	Grupa dwoista	91
7.6	Przestrzeń jednorodna	94
A	Uzupełnienia	100
A.1	Wyprowadzenie formuły iloczynowej	100
A.2	Rachunki związane z transformatą Fouriera funkcji $\mathbb{F}_q$	106
A.3	Grupa Γ_q dla różnych wartości parametru	117
B	Literatura	121

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie konstrukcji nowych deformacji grupy afinicznych przekształceń płaszczyzny zachowujących orientację. Grupa ta, znana pod nazwą grupy „ $az + b$ ” jest dobrze zbadaną grupą Liego podawaną zwykle jako podstawowy przykład grupy nieunimodularnej (patrz [5]).

Teoria grup kwantowych zajmuje się uogólnieniem pojęcia grupy w duchu tak zwanej nieprzemiennej geometrii, w której przestrzenie (na przykład lokalnie zwarte przestrzenie topologiczne) zastępuje się algebrami (na przykład C^* -algebrami) grającymi rolę algebr funkcji na badanych obiektach. Jednym z zadań teorii grup kwantowych jest konstruowanie przykładów takich grup kwantowych. W dalszych rozdziałach tej pracy zaprezentujemy konstrukcję rodziny grup kwantowych numerowanej zespolonym parametrem q , którą ze względu na pewne dodatkowe własności będziemy mogli nazwać deformacją grupy „ $az + b$ ”. Matematycznie precyzyjne sformułowanie tego zagadnienia postaramy się przedstawić w następnych rozdziałach.

Konstrukcje takich rodzin zostały już przeprowadzone przez S.L. Woronowicza dla parametrów q będących wybranymi pierwiastkami z jedności oraz dla rzeczywistych q leżących pomiędzy 0 a 1 ([31]). W niniejszej pracy parametr deformacji będzie liczbą zespoloną o wartości bezwzględnej ściśle mniejszej niż 1, spełniającą pewien dodatkowy warunek. Jest to wariant pośredni pomiędzy parametrem rzeczywistym, a pierwiastkiem z jedności.

We wspomnianej wyżej pracy [31] konstrukcja deformacji została przeprowadzona w oparciu o pewien dość skomplikowany schemat działania. Procedura ta zostanie w całości powtórzona dla nowych wartości parametru deformacji. Okazuje się, że zmiana zakresu zmienności parametru prowadzi do deformacji grupy „ $az + b$ ” mających wiele cech wspólnych z badanymi w [31], ale rachunkowa strona zagadnienia zmienia się w sposób bardzo istotny. Zmiana ta pozwala głębiej zrozumieć wyniki S.L. Woronowicza oraz dokonać uproszczeń w wielu dowodach.

Ponieważ nasze oznaczenia niewiele się różnią od stosowanych w pracy [31], wiele formuł wygląda identycznie, bądź niemal identycznie, jak w owej pracy. Ich dowody nie zawsze

dają się jednak sprowadzić do powtórzenia znanych dowodów dla zbadanych parametrów deformacji. Należy ponadto pamiętać, że rozważane funkcje specjalne są zdefiniowane na zbiorach zależnych od parametru q , oraz, że badane operatory spełniają relacje komutacyjne także zależące od tego parametru. Tym samym formuła

$$SR = q^2 RS,$$

choć wygląda identycznie jak jeden ze wzorów podanych w [31, Proposition 2.1], dotyczy wielkości o innym charakterze niż rozważane w owej pracy. Innym przykładem jest wzór

$$\mathbb{F}_q(\gamma)\mathbb{F}_q(q^2\gamma^{-1}) = C_q\alpha(q^{-1}\gamma)$$

wiązący funkcje specjalne α i $\mathbb{F}_q$ (podrozdziały 5.3 i 5.4), który różni się tylko nieznacznie od wzoru (1.8) z [31]. Jednak jego wyprowadzenie jest dalece bardziej skomplikowane (patrz uzupełnienie A.1) dla nowych wartości parametru q .

Skonstruowana w niniejszej pracy grupa kwantowa działa na pewnej przestrzeni klasycznej. Działanie to jest zbadane i opisane w podrozdziale 7.6.

1.2 Uwagi bibliograficzne

Praca poświęcona jest teorii grup kwantowych na poziomie C^* -algebr. Teoria ta czerpie inspirację z analizy harmoniczej, teorii algebr Hopfa i analizy funkcjonalnej. Istnieje wiele podręczników i monografii traktujących te działy matematyki. W pracy korzystamy z wyników i konwencji opisanych w [9], [1], [19], [13] i [14]. Elementy teorii algebr Hopfa i $*$ -algebr Hopfa są w prosty sposób przedstawione w pracy [16]. Oprócz monografii [19] i [13], wyniki dotyczące teorii operatorów działających na przestrzeniach Hilberta czerpiemy także z prac [25] oraz [30].

W pracy będziemy korzystać z zaawansowanych elementów teorii C^* -algebr. Podstawy tego działu matematyki opisane są w dobrze znanej i obszernej monografii [8]. Równocześnie odsyłamy do prac [24] i [32] jako do doskonałych źródeł na temat kategorii C^* -algebr. W szczególności w pracach tych zdefiniowane są pojęcia morfizmu C^* -algebr i elementu stowarzyszonego z C^* -algebrą. Definicję C^* -algebry generowanej przez elementy stowarzyszone znajdzie czytelnik w [28]. Elementy teorii iloczynów krzyżowych C^* -algebr, z których korzystamy w rozdziale 7 pochodzą z książki [15] i pracy [11].

Wykorzystywane w pracy elementy teorii C^* -algebraicznych grup kwantowych pochodzą głównie z pracy [29] (patrz także [20]) oraz z [12]. Innymi źródłami wiedzy o grupach kwantowych na poziomie C^* -algebr są prace [4] i [16].

1.3 Struktura pracy

W rozdziale 2 ustalamy podstawowe oznaczenia i konwencje notacyjne. Szczególną uwagę poświęcamy głównym narzędziom pracy – teorii operatorów (podrozdział 2.2) i teorii C^* -algebr (podrozdział 2.3). W podrozdziale 2.4 proponujemy pewną konwencję notacyjną

dotyczącą obiektów rozważanych w pracy. Dzięki niej możliwe jest bardziej przejrzyste i krótsze zapisywanie wyników.

Rozdział 3 stanowi wprowadzenie do tematyki niniejszej pracy. Przedstawiamy tam klasyczną grupę „ $az + b$ ” na trzech poziomach. Poziom $*$ -algebry Hopfa opisujemy w podrozdziale 3.1. W następnych podrozdziałach przechodzimy na poziom przestrzeni Hilberta i C^* -algebry. Taka prezentacja wyników dotyczących klasycznej grupy pozwala uzasadnić dalsze postępowanie w dążeniu do skonstruowania kwantowych wersji tej grupy, a ponadto dostarcza argumentów za tym, by otrzymane w dalszych częściach pracy obiekty identyfikować z deformacjami klasycznej grupy „ $az + b$ ”.

W rozdziale 4 prezentujemy znane kwantowe grupy „ $az + b$ ”. Zaczynamy od wersji algebraicznych, w których nie nakłada się żadnych warunków na parametr deformacji. W podrozdziale 4.1 prezentujemy także wyniki dotyczące rozkładu biegunowego koodrotności na poziomie $*$ -algebry Hopfa (stwierdzenie 4.1). Następnie w podrozdziale 4.2 pokrótce opisujemy przykłady C^* -algebraicznych kwantowych grup „ $az + b$ ” skonstruowane przez S.L. Woronowicza w pracy [31]. Ponadto zamieszczamy tam uwagi dotyczące relacji pomiędzy algebraicznymi i C^* -algebraicznymi kwantowymi grupami „ $az + b$ ” i opisujące rolę tak zwanych *warunków spektralnych*.

Rozdział 5 rozpoczyna część pracy, w której przedstawiamy konstrukcję kwantowej grupy „ $az + b$ ”. Zawiera on definicje podstawowych obiektów zależnych od parametru deformacji q . W podrozdziale 5.1 wyjaśniamy dokładnie jakimi wartościami parametru będziemy się zajmować. W kolejnych podrozdziałach 5.2, 5.3, 5.4 definiujemy i badamy obiekty, które posłużą do dalszej konstrukcji grupy kwantowej: grupę Γ_q oraz funkcje χ , α i $\mathbb{F}_q$. Tę ostatnią nazywamy *kwantową funkcją wykładniczą* ze względu na własność (6.33) (por. [25], [30]). Wiele wyników dotyczących funkcji $\mathbb{F}_q$ ma charakter rachunkowy. Zebraliśmy je w podrozdziałach 5.4.1 i 5.4.2, a ich dowody przenieśliśmy do uzupełnień A.1 i A.2. Ostatni podrozdział 5.5 zawiera kilka definicji i lematów, które wielokrotnie pozwalają przetłumaczyć niektóre zagadnienia związane z rozważanym w pracy parametrem q do podobnych kwestii dla znanych parametrów deformacji.

W rozdziale 6 rozważamy relacje komutacyjne

$$SR = q^2 RS, \quad SR^* = R^* S,$$

gdzie R i S są normalnymi operatorami działającymi na pewnej przestrzeni Hilberta, a q jest opisany wcześniej parametrem deformacji. Definiujemy dziedziny operatorowe (patrz podrozdział 6.2) $\widetilde{\mathcal{D}}$ oraz $\mathcal{D}$ i wyprowadzamy wszystkie ważne dla naszych celów własności operatorów spełniających rozważane relacje komutacyjne. W szczególności pokazujemy, że pary operatorów należące do dziedziny $\mathcal{D}$ mają tę własność, że ich suma jest (po domknięciu) operatorem normalnym. W ostatnim podrozdziale dowodzimy, że dziedzina $\mathcal{D}$ jest w pewnym sensie największą dziedziną operatorową mającą opisane wcześniej własności. Rozdział ten czerpie wiele z prac [25] i [31].

Najważniejszy w pracy rozdział 7 podaje konstrukcję kwantowych grup „ $az + b$ ” dla opisanych wyżej wartości parametru deformacji. Korzystamy w nim z wyników rozdziałów 5 i 6. Konstrukcja przebiega w oparciu o teorię poręcznych ([29]) i modularnych ([20])

operatorów mnożących unitarnych. Operatory takie potrzebne do konstrukcji nowych kwantowych grup „ $az + b$ ” definiujemy w podrozdziale 7.1. Kluczowe okazują się tu wyniki dotyczące funkcji specjalnych. Aby przeprowadzić dalszą konstrukcję potrzebujemy pewnych twierdzeń wiążących rozważane w pracy funkcje specjalne i relację stowarzyszenia (patrz [24]). Twierdzenia takie były już znane dla innych parametrów deformacji ([31, Sect. 5]), ale ich dowody podane w podrozdziale 7.2 są nowe. Wykorzystują one pojęcie C^* -algebry generowanej przez kwantową rodzinę elementów stowarzyszonych wprowadzone w pracy [28]. W następnym podrozdziale przypominamy najważniejsze elementy teorii iloczynów krzyżowych C^* -algebr. Definiujemy C^* -algebrę A_{cp} i dowodzimy istnienia pewnych wyróżnionych elementów stowarzyszonych z A_{cp} , generujących tę C^* -algebrę. Wyniki te potrzebne są w podrozdziale 7.4, w którym ostatecznie identyfikujemy wszystkie obiekty związane z kwantową grupą „ $az + b$ ”. Okazuje się, że C^* -algebra A grająca rolę algebry funkcji ciągłych, znikających w nieskończoności na grupie kwantowej jest izomorficzna z opisaną wcześniej A_{cp} . W podrozdziale 7.5 powtarzamy rozumowanie z [31, Sect. 7] i wykazujemy, że grupa dwoista do kwantowej grupy „ $az + b$ ” jest izomorficzna z jej grupą przeciwną. Ostatni podrozdział poświęcamy konstrukcji przestrzeni jednorodnej dla kwantowej grupy „ $az + b$ ”. Ponieważ rozważana grupa kwantowa nie jest zwarta (innymi słowy wspomniana wyżej algebra A nie ma jedynki), pojęcie przestrzeni jednorodnej nie jest jednoznaczne. W naszym podejściu podajemy konkretną C^* -algebrę, którą można z jednej strony identyfikować z przestrzenią elementów niezmienniczych na działanie pewnej podgrupy kwantowej grupy „ $az + b$ ”, a z drugiej strony jest ona podalgebrą w A (a właściwie w $M(A)$) taką, że mnożenie na A daje, w obcięciu do tej podalgebry, lewe działanie kwantowej grupy „ $az + b$ ”. Jest to sytuacja dość wyjątkowa (patrz [6]) i ciekawa. Do konstrukcji wykorzystujemy twierdzenie Landstada będące zaawansowanym wynikiem teorii iloczynów krzyżowych C^* -algebr. Proponowana definicja przestrzeni jednorodnej jest przystosowana do kwantowej grupy „ $az + b$ ”. Jest ona dość elegancka dzięki nieznanemu wcześniej lematowi 7.29 zasugerowanemu przez S.L. Woronowicza.

Jak już wspomnieliśmy wyżej, w uzupełnieniach zamieściliśmy rachunki związane z funkcjami specjalnymi. Ponadto w uzupełnieniu A.3 można znaleźć rysunki podstawowego obiektu – grupy Γ_q , na której zdefiniowane są używane przez nas funkcje specjalne.

1.4 Najważniejsze wyniki

Z punktu widzenia konstrukcji nowych deformacji grupy „ $az + b$ ” najważniejszym stwierdzeniem pracy jest wniosek 7.13. Mówi on, że skonstruowany operator mnożący unitarny jest modularny, a co za tym idzie możemy przeprowadzić konstrukcję grupy kwantowej w oparciu o teorię przedstawioną w [20] i [29]. Wynik ten opiera się głównie na równościach operatorowych wyprowadzonych w rozdziale 6, a te ostatnie korzystają z własności rozważanych funkcji specjalnych. Kluczowe znaczenie mają własności analityczne funkcji $\mathbb{F}_q$ (twierdzenie 5.11), związek funkcji $\mathbb{F}_q$ i α (twierdzenie 5.16) oraz wzór na transformatę Fouriera funkcji $\mathbb{F}_q$ (wniosek 5.22). Pozostałe wyniki są formalnie bardzo podobne do analogicznych stwierdzeń dla innych wartości parametru deformacji. Autor starał się

jednak zadbać o jak najpełniejszą prezentację tych wyników. Tam gdzie to możliwe, założenia twierdzeń zostały osłabione, a dowody dla przypadku nowych wartości parametru uproszczone bądź zupełnie zmienione.

1.5 Podziękowania

Autor chciałby wyrazić serdeczne podziękowania dla profesora S.L. Woronowicza, którego roli w przygotowaniu niniejszej pracy nie sposób przecenić. Ogromną pomoc otrzymał autor także od dr. hab. Wiesława Pusza i dr. hab. Jana Derezińskiego, którzy zechcieli poświęcić czas na wielokrotne dyskusje na tematy związane z przedmiotem jego pracy.

Rozdział 2

Podstawowe definicje i notacja

2.1 Używane oznaczenia

W pracy będziemy stosować ogólnie przyjęte oznaczenia podstawowych obiektów matematycznych. Symbolami $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ będziemy oznaczać odpowiednio zbiory liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych. Ponadto przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_+ &= \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \mathbb{R}_+ &= \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}.\end{aligned}$$

Dla liczby zespolonej z , symbole $\operatorname{Re} z$ oraz $\operatorname{Im} z$ będą oznaczać odpowiednio część rzeczywistą i część zespoloną z . Jeśli $z \neq 0$, to symbol $\operatorname{Phase} z$ będzie oznaczać liczbę o wartości bezwzględnej 1 występującą w rozkładzie biegunowym liczby z . Będziemy także traktować Phase jako funkcję zdefiniowaną na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o wartościach w S^1 i stosować tę funkcję do operatorów.

Będziemy także używać tak zwanych oznaczeń „ o ” i „ O ”. Przypomnijmy, że notacja ta tłumaczy się odpowiednio na „rzędu mniejszego niż” i „rzędu nie większego niż”. Innymi słowy jeśli dwie zespolone funkcje f i g są określone na podzbiorze E pewnej przestrzeni metrycznej, a p jest punktem skupienia zbioru E , to

$$f(x) = o(g(x)) \text{ przy } x \rightarrow p$$

oznacza

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Podobnie

$$f(x) = O(g(x)) \text{ przy } x \rightarrow p$$

oznacza, że wyrażenie

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

jest ograniczone przy $x \rightarrow p$.

2.2 Przestrzenie Hilberta i operatory

Iloczyn skalarny dwóch wektorów x i y z przestrzeni Hilberta H oznaczać będziemy symbolem $(x|y)$. Wszystkie przestrzenie Hilberta będą ośrodkowymi przestrzeniami nad ciałem liczb zespolonych, a iloczyn skalarny będzie liniowy w drugim argumencie, a antyliniowy w pierwszym argumencie. Ośrodkowość jest potrzebna, aby skorzystać z twierdzeń z prac [20] i [29].

Jeśli T jest operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta H , a x i y są wektorami z przestrzeni H , przy czym y należy do dziedziny operatora T , to element macierzowy operatora T pomiędzy wektorami x i y będziemy zapisywać na dwa sposoby:

$$(x|Ty) = (x|T|y).$$

Dla przestrzeni Hilberta H przestrzeń zespolenie sprzężoną $\overline{H}$ definiujemy jako zbiór $\{\overline{x} : x \in H\}$ ze strukturą przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym daną przez

$$\begin{aligned}\overline{x} + \overline{y} &= \overline{x + y}, \\ \lambda \overline{x} &= \overline{\lambda x}, \\ (\overline{x}|\overline{y}) &= (y|x)\end{aligned}$$

dla wszystkich $x, y \in H$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Z tą strukturą $\overline{H}$ jest przestrzenią Hilberta, a odwzorowanie $H \ni x \mapsto \overline{x} \in \overline{H}$ jest antyunitarne. Dla gęsto zdefiniowanego i domykalnego operatora T działającego w przestrzeni H definiujemy operator transponowany $T^\top$ działający na $\overline{H}$ w następujący sposób: $D(T^\top) = \overline{D(T^*)}$ oraz

$$T^\top \overline{x} = \overline{T^* x}$$

dla $x \in D(T^*)$. Przestrzeń operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta H oznaczamy symbolem $B(H)$. Jeśli $m \in B(H)$, to $m^\top$ jest operatorem ograniczonym na $\overline{H}$ takim, że

$$(\overline{x}|m^\top|\overline{y}) = (y|m|x)$$

dla wszystkich $x, y \in H$. Odwzorowanie $B(H) \ni m \mapsto m^\top \in B(\overline{H})$ jest antyizomorfizmem C^* -algebr. Kładąc $\overline{\overline{x}} = x$ identyfikujemy $\overline{\overline{H}}$ z H . Przy takim utożsamieniu mamy $m^{\top\top} = m$ dla wszystkich $m \in B(H)$.

Będziemy także używać tak zwanej „notacji numerowania nóg” operatorów działających na iloczynach tensorowych przestrzeni Hilberta. Będziemy ją stosować jedynie do operatorów działających na iloczynie $H \otimes H$. Jeśli V jest operatorem działającym w $H \otimes H$, to operatory V_{12} , V_{23} i V_{13} są operatorami działającymi w $H \otimes H \otimes H$ takimi, że

$$\begin{aligned}V_{12} &= V \otimes I, \\ V_{23} &= I \otimes V, \\ V_{13} &= (I \otimes \Sigma)(V \otimes I)(I \otimes \Sigma),\end{aligned}$$

gdzie I oznacza operator identycznościowy, a Σ operator zamieniający kopie przestrzeni H w $H \otimes H$:

$$\Sigma(x \otimes y) = y \otimes x.$$

Ważną rolę odgrywa w niniejszej pracy przestrzeń funkcjonałów liniowych na $B(H)$ będących granicami kombinacji liniowych funkcjonałów postaci

$$B(H) \ni m \longmapsto (x|m|y) \in \mathbb{C}.$$

Jest to tak zwana przestrzeń predualna do $B(H)$ i oznaczamy ją symbolem $B(H)_*$. Przestrzeń tę można także wyróżnić jako zbiór funkcjonałów na $B(H)$ ciągłych w σ -słabej topologii. Nietrudno sprawdzić, że jeśli $\varphi \in B(H)_*$, a $m \in B(H)$, to funkcjonały

$$\begin{aligned} B(H) \ni r &\longmapsto \varphi(mr) \in \mathbb{C}, \\ B(H) \ni r &\longmapsto \varphi(rm) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

także należą do $B(H)_*$. Funkcjonały te będziemy oznaczać symbolami φm i $m\varphi$ odpowiednio. Odwzorowania

$$\begin{aligned} B(H)_* \times B(H) \ni (\varphi, m) &\longmapsto \varphi m \in B(H)_*, \\ B(H) \times B(H)_* \ni (m, \varphi) &\longmapsto m\varphi \in B(H)_* \end{aligned}$$

zadają na $B(H)_*$ strukturę bimodułu nad $B(H)$. Struktury tej będziemy używać w rozdziale 7.

Niech a będzie operatorem normalnym na przestrzeni Hilberta H . Wówczas twierdzenie spektralne mówi, że

$$a = \int_{\text{Sp } a} \lambda dE(\lambda),$$

gdzie E jest miarą spektralną związaną z operatorem a i dla dowolnej funkcji borelowskiej f na $\mathbb{R}$ mamy

$$f(a) = \int_{\text{Sp } a} f(\lambda) dE(\lambda),$$

Niech χ będzie ewaluacją logiczną zdania:

$$\begin{aligned} \chi(\text{fałsz}) &= 0, \\ \chi(\text{prawda}) &= 1. \end{aligned}$$

Teraz jeśli $\mathcal{R}$ jest jednoargumentową relacją zdefiniowaną na zbiorze liczb rzeczywistych, to $f_{\mathcal{R}}(\lambda) = \chi(\mathcal{R}(\lambda))$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathcal{R}(\lambda)\}$ i (jeśli tylko Δ jest zbiorem mierzalnym) $f_{\mathcal{R}}(a) = E(\Delta)$ jest rzutem spektralnym odpowiadającym Δ . W dalszym ciągu będziemy pisać $\chi(\mathcal{R}(a))$ zamiast $f_{\mathcal{R}}(a)$:

$$\chi(\mathcal{R}(a)) = \int_{\text{Sp } a} \chi(\mathcal{R}(\lambda)) dE(\lambda) = E(\Delta).$$

Obraz tego rzutu będziemy oznaczać symbolem $H(\mathcal{R}(a))$.

W ten sposób nadaliśmy sens wyrażeniom takim jak $\chi(|a| < 2)$, $\chi(a^2 = 1)$, $\chi(a \neq 0)$ itp. Dla przykładu $H(a = 1)$ jest podprzestrzenią własną operatora a odpowiadającą

wartości własnej 1, a $\chi(a = 1)$ jest rzutem na tę podprzestrzeń. Ogólnie jeśli $\Delta \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem borelowskim, to $H(a \in \Delta)$ jest podprzestrzenią spektralną odpowiadającą Δ , a $\chi(a \in \Delta)$ jest odpowiednim rzutem spektralnym.

Na koniec niniejszego podrozdziału wymienimy kilka konwencji dotyczących operacji algebraicznych na operatorach. Jeśli R i S są operatorami działającymi na przestrzeni Hilberta H , to symbolem $R \circ S$ będziemy oznaczać złożenie operatorów R i S . W szczególności

$$D(R \circ S) = \{x \in D(S) : Sx \in D(R)\}.$$

Dla $x \in D(R \circ S)$ będziemy pisać $(R \circ S)x = RSx$. Mimo to symbol „ RS ” (bez wektora) zarezerwujemy dla *domknięcia* operatora $R \circ S$ (nie będziemy stosować tego oznaczenia w przypadku, gdy $R \circ S$ nie jest domykalny). Podobnie sumę operatorów R i S , oznaczaną $R + S$, definiujemy przez

$$D(R + S) = D(R) \cap D(S).$$

Jeśli suma $R + S$ jest operatorem domykalnym, symbol $R + S$ oznaczać będzie domknięcie sumy operatorów R i S (patrz uwaga 6.17). W pozostałych przypadkach domknięcie operatora X będziemy oznaczać $\overline{X}$.

Ostatnim ważnym pojęciem, o którym należy w tym miejscu wspomnieć jest istotna dziedzina operatora. Niech T będzie operatorem domkniętym działającym w przestrzeni Hilberta H . Podzbiór liniowy $D \subset H$ nazwiemy istotną dziedziną dla T , jeśli $D \subset D(T)$ oraz

$$T = \overline{T|_D}.$$

W podrozdziale 6.2 podamy uogólnienie tego pojęcia pochodzące z pracy [17].

2.3 C^* -algebry

W pracy będziemy bardzo często korzystać z teorii C^* -algebr. W szczególności dla C^* -algebry A będziemy rozważać algebrę $M(A)$. Jako zbiór $M(A)$ można identyfikować z przestrzenią operatorów liniowych a na A , dla których istnieje operator liniowy a^* także działający na A taki, że

$$b^*ac = (a^*b)^*c$$

dla wszystkich $b, c \in A$. $M(A)$ jest C^* -algebrą z jedyneką, a A zanurza się w $M(A)$ jako istotny ideał. Ponadto jeśli B jest C^* -algebrą z jedyneką zawierającą A jako istotny ideał, to istnieje epimorfizm z $M(A)$ na B będący identycznością na A . Każdy element $a \in A$ wyznacza element $M(A)$ dany przez mnożenie z lewej strony przez a . W rozdziale 7 będziemy wielokrotnie używać pojęcia *topologii strict* na $M(A)$. Jest to topologia wyznaczona przez rodzinę półnorm

$$M(A) \ni a \longmapsto \|ax\| + \|a^*y\|$$

gdzie $x, y \in A$. Innymi słowy jest to najszlubsza topologia, w której dla każdego $x \in A$ odwzorowania

$$M(A) \ni a \longmapsto ax \in A,$$

$$M(A) \ni a \longmapsto a^*x \in A$$

są ciągłe.

Drugim ważnym pojęciem jest morfizm C^* -algebr. Morfizmem z C^* -algebry A do C^* -algebry B nazywamy $*$ -homomorfizm φ działający z A do $M(B)$ taki, że zbiór

$$\varphi(A)B$$

jest gęsty w B . Warunek ten (zwany warunkiem niezdegenerowania) pozwala na przedłużanie φ do odwzorowania $M(A) \rightarrow M(B)$, a to z kolei umożliwia składanie morfizmów. Zbiór morfizmów z A do B oznaczamy $\text{Mor}(A, B)$.

Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Algebrę operatorów zwartych działających w H oznaczamy symbolem $\mathcal{K}(H)$. Zbiór $\text{Mor}(A, \mathcal{K}(H))$ można utożsamić ze zbiorem wszystkich niezdegenerowanych reprezentacji A w przestrzeni Hilberta H .

Oprócz elementów $M(A)$ rozważać będziemy tak zwane elementy stowarzyszone z C^* -algebrą A . Gęsto zdefiniowany operator T działający na C^* -algebrze A nazwiemy stowarzyszonym z A , jeśli istnieje $z \in M(A)$ taki, że $\|z\| \leq 1$ oraz

$$\left(\begin{array}{l} x \in D(T) \\ y = Tx \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \text{istnieje } a \in A \text{ taki, że} \\ x = (I - z^*z)^{\frac{1}{2}}a \text{ oraz } y = za \end{array} \right)$$

dla wszystkich $x, y \in A$. W takim przypadku piszemy $T \eta A$. Każdy element $a \in A$ wyznacza element stowarzyszony z A dany przez mnożenie z lewej strony przez a . Okazuje się, że morfizmy C^* -algebr przedłużają się na cały zbiór elementów stowarzyszonych. W szczególności dla morfizmu $\pi \in \text{Mor}(A, B)$ i $T \eta A$ mamy $\pi(T) \eta B$.

Zbiór elementów stowarzyszonych z C^* -algebrą $\mathcal{K}(H)$ można utożsamić ze zbiorem $\mathcal{C}(H)$ wszystkich domkniętych operatorów działających w H . Podobnie dla niezdegenerowanej C^* -podalgebry $B \subset B(H)$, zbiór elementów stowarzyszonych z B identyfikujemy z podzbiorem w $\mathcal{C}(H)$.

Przechodzimy teraz do ostatniego zagadnienia niniejszego podrozdziału. Niech A będzie C^* -algebrą i niech $T_1, \dots, T_K$ będą elementami stowarzyszonymi z A . Powiemy, że C^* -algebra A jest generowana przez $T_1, \dots, T_K$, jeśli dla dowolnych przestrzeni Hilberta H , niezdegenerowanej C^* -podalgebry $B \subset B(H)$ i reprezentacji π algebry A w przestrzeni H mamy

$$\left(\pi(T_1), \dots, \pi(T_K) \eta B \right) \implies \left(\pi \in \text{Mor}(A, B) \right).$$

W podrozdziale 7.2 wprowadzimy uogólnienie pojęcia C^* -algebry generowanej przez elementy stowarzyszone.

2.4 Ważna konwencja

W konstrukcji kwantowej grupy „ $az + b$ ” będziemy używać parametru deformacji q , który będzie postaci

$$q = \exp \left\{ \left(x + i \frac{N}{2\pi} \right)^{-1} \right\},$$

gdzie x jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera, a N jest parzystą liczbą całkowitą różną od zera. W rachunkach i oznaczeniach będziemy wielokrotnie używać indeksów przebiegających zbior $\{0, 1, \dots, N-1\}$, jeśli $N > 0$ lub $\{N+1, N+2, \dots, 0\}$, jeśli $N < 0$. Aby uprościć i skrócić zapis wszędzie używamy notacji dla $N > 0$. Przyjeliśmy konwencję, wedle której, jeśli $N < 0$, to symbole typu

$$\{0, 1, \dots, N-1\}$$

lub

$$\sum_{k=0}^{N-1}$$

należy rozumieć odpowiednio jako $\{N+1, N+2, \dots, 0\}$ i $\sum_{k=N+1}^0$. Taka konwencja nie utrudnia zrozumienia treści matematycznej tekstu, a pozwala uniknąć pisania dużej ilości wzorów w dwóch wariantach – jednego dla $N > 0$, a drugiego dla $N < 0$.

Rozdział 3

Klasyczna grupa „ $az + b$ ”

3.1 Grupa i jej $*$ -algebra Hopfa

Klasyczna grupa „ $az + b$ ” jest grupą afinicznych przekształceń płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$ zachowujących orientację. Będziemy tę grupę oznaczać symbolem G_{cl} . Jest ona generowana przez translacje

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto z + b \in \mathbb{C},$$

gdzie b jest dowolną liczbą zespoloną, oraz zespolone homotetie

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto az \in \mathbb{C},$$

przy czym $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. G_{cl} jest oczywiście grupą Liego dyfeomorficzną z rozmaitością $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$. W naturalnym układzie współrzędnych operacja mnożenia w G_{cl} wygląda w następujący sposób:

$$(a, b)(a', b') = (aa', ab' + b).$$

Powyższa reguła mnożenia sugeruje, by utożsamić G_{cl} z grupą macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

gdzie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a $b \in \mathbb{C}$. Przy tym utożsamieniu działanie elementu (3.1) na $z \in \mathbb{C}$ opisane jest mnożeniem macierzowym, pod warunkiem, że utożsamimy z z kolumnowym wektorem $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opiszemy teraz algebrę $\mathcal{A}_{\text{cl}}$ funkcji wielomianowych na grupie G_{cl} . Algebra ta generowana jest przez dwie funkcje współrzędnościowe

$$\begin{aligned} a: \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto a' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ b: \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto b' \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Mnożenie elementów $\mathcal{A}_{\text{Cl}}$ pochodzi z (przemienne) mnożenia funkcji na zbiorze G_{Cl} . W algebrze tej istnieje jedynka I , tj. funkcja tożsamościowo równa 1. Zauważmy, że element $a \in \mathcal{A}_{\text{Cl}}$ jest odwracalny. Ponadto sprzężenie zespolone pozwala wprowadzić na $\mathcal{A}_{\text{Cl}}$ strukturę $*$ -algebry.

Operacje algebraiczne grupy G_{Cl} nadają algebrze $\mathcal{A}_{\text{Cl}}$ dodatkową strukturę. Mnożenie elementów grupy pozwala zdefiniować dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{A}_{\text{Cl}}$ funkcję dwóch zmiennych

$$\Delta(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2).$$

Ponieważ możemy utożsamić przestrzeń wielomianów dwóch zmiennych na G_{Cl} z algebraicznym iloczynem tensorowym $\mathcal{A}_{\text{Cl}} \otimes \mathcal{A}_{\text{Cl}}$, otrzymujemy $*$ -homomorfizm

$$\Delta: \mathcal{A}_{\text{Cl}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\text{Cl}} \otimes \mathcal{A}_{\text{Cl}}.$$

Element neutralny $e \in G_{\text{Cl}}$ wyróżnia charakter ϵ na $*$ -algebrze $\mathcal{A}_{\text{Cl}}$ dany przez

$$\epsilon(f) = f(e).$$

Wreszcie operacja brania elementu odwrotnego pozwala zdefiniować odwzorowanie

$$\kappa: \mathcal{A}_{\text{Cl}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\text{Cl}}$$

wzorem $\kappa(f)(g) = f(g^{-1})$. Jako pochodzące od przekształcenia zbioru G_{Cl} , odwzorowanie κ także jest $*$ -homomorfizmem.

Łatwo sprawdzamy, że na generatorach a i b zdefiniowane wyżej odwzorowania przyjmują następujące wartości:

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= a \otimes a, \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes I,\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\epsilon(a) &= 1, & \kappa(a) &= a^{-1}, \\ \epsilon(b) &= 0, & \kappa(b) &= -a^{-1}b.\end{aligned}$$

Odwzorowania Δ , ϵ i κ nazywamy odpowiednio komnożeniem, kojedynką i koodwrotnością lub antypodem, natomiast strukturę $(\mathcal{A}_{\text{Cl}}, \Delta, \epsilon, \kappa)$ $*$ -algebrą Hopfa ([1]) funkcji wielomianowych na grupie „ $az + b$ ”. Nietrudno sprawdzić, że macierz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}_{\text{Cl}}$$

jest koreprezentacją $\mathcal{A}_{\text{Cl}}$ (patrz [1]).

3.2 Poziom przestrzeni Hilberta

Lewostronnie niezmiennicza miara Haara na grupie G_{Cl} jest absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue’a na $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ z wagą

$$\rho: (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \ni (z_1, z_2) \longmapsto \frac{1}{|z_1|^4} \in \mathbb{R}_+,$$

tak więc oznaczając tę miarę przez h_L , mamy

$$\int_{G_{\text{Cl}}} f dh_L = \int_{(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}^2} f(x + iy, z + it) \frac{dx dy dz dt}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Prawostronnie niezmienniczą miarę Haara h_R można obliczyć korzystając z zależności

$$\int_{G_{\text{Cl}}} f dh_R = \int_{G_{\text{Cl}}} \kappa(f) dh_L$$

i wzoru na koodwrotność κ :

$$(\kappa(f))(z, z') = f(z^{-1}, -z^{-1}z').$$

Otrzymujemy

$$\int_{G_{\text{Cl}}} f dh_R = \int_{(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}^2} f(x + iy, z + it) \frac{dx dy dz dt}{(x^2 + y^2)}.$$

W szczególności funkcja modularna grupy G_{Cl} dana jest wyrażeniem

$$\frac{dh_R}{dh_L}(z, z') = |z|^2.$$

Teraz możemy rozważyć przestrzeń Hilberta $H = L^2(G_{\text{Cl}}, h_R)$. Funkcje a i b generujące $*$ -algebrę Hopfa $\mathcal{A}_{\text{Cl}}$ (patrz podrozdział 3.1) możemy teraz zrealizować jako domknięte, gęsto zdefiniowane operatory na H , których działanie polega na mnożeniu przez te funkcje. Oczywiście operatory te są mocno przemienne, a ich spektra są równe całej płaszczyźnie zespolonej. Ponadto operatory te są normalne. Dokładnie te same własności mają operatory $(a \otimes a, a \otimes b + b \otimes I)$ działające w przestrzeni $H \otimes H$. Będziemy utożsamiać funkcje ciągłe na G_{Cl} z odpowiednimi operatorami mnożenia na H i używać dla tych (a priori różnych) obiektów tych samych oznaczeń.

3.3 Poziom C^* -algebry

Mając przestrzeń Hilberta $H = L^2(G_{\text{Cl}}, h_R)$ możemy przystąpić do konstrukcji operatora Kaca-Takesakiego dla grupy G_{Cl} (patrz [12]). Jest to operator unitarny działający w przestrzeni $H \otimes H = L^2(G_{\text{Cl}} \times G_{\text{Cl}})$ zdefiniowany wzorem

$$(Wf)(g, g') = f(gg', g')$$

dla $f \in H \otimes H$ i prawie wszystkich $g, g' \in G_{\text{Cl}}$. Operator ten ma wiele ciekawych własności. Przede wszystkim jest to tak zwany operator moltiplikatywny unitarny (patrz [4]).

Zawiera on całą informację o grupie G_{Cl} oraz wszystkich jej reprezentacjach unitarnych. W szczególności

$$\begin{aligned} \{(\omega \otimes \text{id})W : \omega \in B(H)_*\}^{\text{domknięcie w normie}} &= C_\infty(G_{\text{Cl}}), \\ \{(\text{id} \otimes \omega)W : \omega \in B(H)_*\}^{\text{domknięcie w normie}} &= C_r^*(G_{\text{Cl}}), \end{aligned}$$

gdzie algebra $C_\infty(G_{\text{Cl}})$ jest (wiernie) wyreprezentowana w przestrzeni H jako operatory mnożenia przez funkcje, a $C_r^*(G_{\text{Cl}})$ jest zredukowaną C^* -algebrą grupową G_{Cl} , to znaczy C^* -algebrą generowaną przez operatory prawej regularnej reprezentacji G_{Cl} na $H = L^2(G_{\text{Cl}}, h_r)$.

Operatory a i b są stowarzyszone (patrz [24]) z C^* -algebrą $C_\infty(G_{\text{Cl}})$, a ponadto operator a^{-1} , którego działanie polega na mnożeniu przez funkcję $g \mapsto a(g)^{-1}$ także jest z nią stowarzyszony. Można także udowodnić, że $C_\infty(G_{\text{Cl}})$ jest generowana (w sensie [28, Definition 3.1]) przez a , a^{-1} oraz b .

Podobnie jak dla algebry $\mathcal{A}_{\text{Cl}}$ wielomianów na G_{Cl} możemy zdefiniować koprodukt Δ , kojedynkę κ i koodwrotność ϵ dla C^* -algebry $A_{\text{Cl}} = C_\infty(G_{\text{Cl}})$. Tym razem są to morfizmy w kategorii C^* -algebr zdefiniowanej w [24]. Dla dowolnego elementu $f \in A_{\text{Cl}}$ (tj. funkcji ciągłej, znikającej w nieskończoności na G_{Cl}) operator mnożenia przez $\Delta(f)$ (tj. funkcję ciągłą i ograniczoną na $G_{\text{Cl}} \times G_{\text{Cl}}$ taką, że $\Delta(f)(g, g') = f(gg')$) na przestrzeni Hilberta $H \otimes H = L^2(G_{\text{Cl}} \times G_{\text{Cl}})$ wyraża się wzorem

$$\Delta(f) = W(f \otimes I)W^*. \quad (3.2)$$

Korzystając ze wzoru (3.2) możemy obliczyć wartość komnożenia na generatorach a i b algebry A_{Cl} :

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a, \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes I. \end{aligned}$$

C^* -algebra $C_\infty(G_{\text{Cl}})$ opisuje topologię lokalnie zwartej przestrzeni G_{Cl} , natomiast morfizm Δ zawiera informację o strukturze grupy topologicznej na tej przestrzeni. Innymi słowy para (A_{Cl}, Δ) jest C^* -algebraiczną wersją lokalnie zwartej grupy G_{Cl} .

Rozdział 4

Kwantowe grupy „ $az + b$ ”

4.1 Algebraiczne kwantowe grupy „ $az + b$ ”

Przedstawimy teraz jednoparametrową rodzinę kwantowych deformacji algebry funkcji wielomianowych na grupie „ $az + b$ ”. Parametrem deformacji będzie liczba zespolona $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Rozważmy $*$ -algebrę $\mathcal{A}_q$ generowaną przez elementy a, a^{-1} oraz b spełniające następujące relacje:

$$\begin{aligned} a^{-1}a &= aa^{-1} = I, \\ a^*a &= aa^*, \quad b^*b = bb^*, \\ ab &= q^2ba, \quad ab^* = b^*a. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Możemy wyposażyć tę algebrę w strukturę $*$ -algebry Hopfa kładąc

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a, \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes I \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \epsilon(a) &= 1, \quad \kappa(a) = a^{-1}, \quad \kappa(a^*) = a^{*-1}, \\ \epsilon(b) &= 0, \quad \kappa(b) = -a^{-1}b, \quad \kappa(b^*) = -a^{*-1}b^*. \end{aligned}$$

Koodwrotność κ jest odwzorowaniem antymultiplikatywnym, a więc możemy je rozszerzyć na całą algebrę $\mathcal{A}_q$. Zauważmy, że w przypadku klasycznym, tj. $q = 1$, algebra $\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_{\text{cl}}$ jest przemienna, a co za tym idzie antymultiplikatywność jest tym samym co multiplikatywność. Ponadto κ spełnia

$$\kappa(\kappa(c)^*)^* = c \tag{4.2}$$

dla wszystkich $c \in \mathcal{A}_q$.

Korzystając z powyższych definicji łatwo obliczamy kwadrat κ :

$$\begin{aligned} \kappa^2(a) &= a, \\ \kappa^2(b) &= a^{-1}ba. \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku klasycznym macierz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & I \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}_q$$

jest dwuwymiarową koreprezentacją $*$ -algebry Hopfa $\mathcal{A}_q$.

Aby sformułować następne własności algebry $\mathcal{A}_q$ zauważmy, że mimo, iż nie zdefiniowaliśmy na niej żadnej topologii, możemy rozważać analityczne odwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}_q$. Powiemy, że odwzorowanie $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}_q$ jest analityczne, jeśli dla dowolnego funkcjonału ϕ na $\mathcal{A}_q$ funkcja $z \mapsto \phi(f(z))$ jest analityczna. W szczególności jeśli $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ jest grupą automorfizmów algebry $\mathcal{A}_q$ i położymy $f(t) = \tau_t(c)$ dla pewnego $c \in \mathcal{A}_q$, to możemy rozważać istnienie przedłużenia analitycznego funkcji f . Jeśli przedłużenie takie istnieje, będziemy pisać $\tau_z(c)$ zamiast $f(z)$ dla $z \in \mathbb{C}$.

Stwierdzenie 4.1 ([22]) *Istnieje inwolutywny $*$ -antyautomorfizm R algebry $\mathcal{A}_q$ oraz jednoparametrowa grupa $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ $*$ -automorfizmów $\mathcal{A}_q$ taka, że $t \mapsto \tau_t(c)$ jest odwzorowaniem analitycznym dla każdego $c \in \mathcal{A}_q$ oraz*

$$\kappa = R \circ \tau_{i/2} = \tau_{i/2} \circ R.$$

Ponadto dla każdego $c \in \mathcal{A}_q$ oraz $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} \Delta(R(c)) &= \sigma(R \otimes R)\Delta(c), \\ \Delta(\tau_t(c)) &= (\tau_t \otimes \tau_t)\Delta(c), \end{aligned}$$

gdzie przez σ oznaczyliśmy odwzorowanie $\mathcal{A}_q \otimes \mathcal{A}_q \ni c \otimes d \mapsto d \otimes c \in \mathcal{A}_q \otimes \mathcal{A}_q$.

DOWÓD. Zaczniemy od definicji grupy $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Niech z będzie taką liczbą zespoloną, że $q = e^z$. Położymy

$$\begin{aligned} \tau_t(a) &= a, \\ \tau_t(b) &= q^{2it}b = e^{2itz}b. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ponieważ elementy $\tau_t(a)$, $\tau_t(a)^{-1}$ i $\tau_t(b)$ spełniają te same relacje co a , a^{-1} i b , (4.3) definiuje automorfizmy algebry $\mathcal{A}_q$. Nietrudno również sprawdzić, że $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ jest jednoparametrową grupą automorfizmów, i że dla każdego $c \in \mathcal{A}_q$ odwzorowanie $t \mapsto \tau_t(c)$ posiada analityczne przedłużenie na całą płaszczyznę zespoloną, przy czym $\tau_z \circ \tau_{z'} = \tau_{z+z'}$ dla wszystkich $z, z' \in \mathbb{C}$. Ponadto mamy

$$\Delta(\tau_t(c)) = (\tau_t \otimes \tau_t)\Delta(c) \tag{4.4}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zanim zdefiniujemy R zauważmy, że dla dowolnego $T \in \mathbb{R}$ odwzorowanie τ_{iT} jest homomorfizmem algebry $\mathcal{A}_q$ w siebie, ale $\tau_{iT}(c^*) = \tau_{-iT}(c)^*$, tj. τ_{iT} nie jest $*$ -homomorfizmem. Niech $R = \kappa \circ \tau_{-i/2}$. Ponieważ κ jest odwzorowaniem antymultiplikatywnym, a $\tau_{-i/2}$ jest homomorfizmem, R jest antyhomomorfizmem $\mathcal{A}_q \rightarrow \mathcal{A}_q$. Wiadomo ([1]), że κ jest antyko-multiplikatywne, tj.

$$\Delta(\kappa(c)) = \sigma(\kappa \otimes \kappa)\Delta(c)$$

dla wszystkich $c \in \mathcal{A}_q$, a więc na mocy (4.4), R także jest antykomulatywna.

Zbadajmy zachowanie R względem inwolucji na $\mathcal{A}_q$. Mamy $\tau_t \circ \kappa = \kappa \circ \tau_t$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, a więc z analityczności wynika, że $\tau_{-i/2} \circ \kappa = \kappa \circ \tau_{-i/2}$. W szczególności

$$R^{-1} = (\kappa \circ \tau_{-i/2})^{-1} = (\tau_{-i/2} \circ \kappa)^{-1} = \kappa^{-1} \circ \tau_{i/2}$$

(koodwrotność $*$ -algebry Hopfa jest zawsze odwracalna ([16])). Rachunek

$$R(c^*) = \kappa(\tau_{-i/2}(c^*)) = \kappa(\tau_{i/2}(c)^*) = \kappa^{-1}(\tau_{i/2}(c))^*,$$

(por. (4.2)) pokazuje, że

$$R(c^*) = R^{-1}(c)^* \quad (4.5)$$

dla wszystkich $c \in \mathcal{A}_q$. Dalej policzmy

$$\begin{aligned} R^2(a) &= \kappa^2(\tau_i(a)) = \kappa^2(a) = a, \\ R^2(b) &= \kappa^2(\tau_i(b)) = q^2 \kappa^2(b) = q^2 a^{-1} b a = b. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że $R^2 = \text{id}$, lub innymi słowy $R = R^{-1}$, co w zestawieniu z (4.5) mówi nam, że R jest inwolutywnym $*$ -antyhomomorfizmem. Q.E.D.

Rozkład koodwrotności $\kappa = R \circ \tau_{i/2}$ nazywany jest *rozkładem biegunowym*. Grupa $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ nosi nazwę *grupy skalującej*, a antyautomorfizm R nazywamy *unitarnym antypodem*. Obiekty te związane są zazwyczaj z C^* -algebraicznymi grupami kwantowymi ([29], [12]), ale w przypadku kwantowych grup „ $az + b$ ” istnieją już na poziomie $*$ -algebry Hopfa. Możemy obliczyć wartości R na generatorach algebry $\mathcal{A}_q$:

$$\begin{aligned} R(a) &= \kappa(a) = a^{-1}, \\ R(b) &= \kappa(\tau_{-i/2}(b)) = q \kappa(b) = -q a^{-1} b, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} R(a^*) &= a^{-1*}, \\ R(b^*) &= -q a^{-1*} b^*. \end{aligned}$$

Na poziomie C^* -algebr będziemy stosować zapis c^R zamiast $R(c)$.

Rozważmy algebrę $\mathcal{B}_q$ generowaną przez elementy c, c^{-1} i d spełniające relacje:

$$\begin{aligned} c^{-1}c &= cc^{-1} = I, \\ c^*c &= cc^*, \quad d^*d = dd^*, \\ cd &= q^{-2}dc, \quad cd^* = d^*c, \end{aligned}$$

czyli relacje (4.1) dla q^{-1} w miejsce q . Innymi słowy $\mathcal{B}_q = \mathcal{A}_{q^{-1}}$. Oznacza to w szczególności, że $\mathcal{B}_q$ ma strukturę $*$ -algebry Hopfa. Ponadto nietrudno sprawdzić, że odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_q \ni c &\longmapsto a^{-1} \in \mathcal{A}_q, \\ \mathcal{B}_q \ni d &\longmapsto a^{-1}b \in \mathcal{A}_q \end{aligned}$$

jest $*$ -izomorfizmem algebr oraz antyizomorfizmem koalgebr. Tym samym badanie kwantowych grup „ $az + b$ ” dla parametrów $q \in \mathbb{C}$ sprowadza się do badania przypadków, gdy $|q| \leq 1$.

4.2 Przykłady S.L. Woronowicza

W pracy [31] S.L. Woronowicz przeprowadził konstrukcję dwóch kwantowych deformacji grupy „ $az + b$ ” na poziomie C^* -algebry. W opisanych tam przykładach dla pewnych szczególnych wartości parametru q skonstruowana została C^* -algebra A wyposażona w komnożenie będące morfizmem Δ z A do $A \otimes A$. Algebra A jest generowana przez stowarzyszone z nią (patrz [28]) nieograniczone elementy a, a^{-1} oraz b spełniające relacje odpowiadające algebraicznym relacjom (4.1) uzupełnione o tak zwany warunek spektralny. W zastosowaniu do owych wyróżnionych elementów, komnożenie działa tak jak w przypadku generatorów $*$ -algebry Hopfa $\mathcal{A}_q$ (tj. wyraża się tymi samymi wzorami):

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= a \otimes a, \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes I,\end{aligned}$$

przy czym w drugim wzorze należy wziąć domknięcie sumy operatorów.

Konstrukcje przykładów S.L. Woronowicza przeprowadzone są w oparciu o teorię poręcznych operatorów moltiplikatywnych unitarnych rozwiniętą w pracy [29]. Operator taki dostarcza informacji nie tylko o samej grupie kwantowej rozumianej jako para (A, Δ) , ale także o koodwrotności κ , będącej w tym przypadku gęsto zdefiniowanym i domkniętym operatorem na przestrzeni Banacha A , oraz jej rozkładzie biegunowym.

Szczególne wartości parametrów, dla których skonstruowano kwantowe grupy „ $az + b$ ” związane są ściśle z wspomnianymi wyżej warunkami spektralnymi. Główna część pracy [31] jest poświęcona badaniu sytuacji, gdy

$$q = e^{\frac{2\pi i}{N}},$$

gdzie N jest liczbą parzystą i $N \geq 6$. Warunek spektralny nakładany na generatory algebry A mówi, że spektra tych elementów mają być zawarte w domknięciu zbioru

$$\bigcup_{k=0}^{N-1} q^k \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}.$$

Wyjątkową cechą tego warunku jest to, że może on być wyrażony algebraicznie, przez żądanie, aby elementy $a^{\frac{N}{2}}$ i $b^{\frac{N}{2}}$ były samosprężone. Na poziomie $*$ -algebry Hopfa prowadzi to do ilorazu algebry $\mathcal{A}_q$, który także okazuje się być $*$ -algebrą Hopfa. Najważniejszą jednak częścią pracy [31] jest konstrukcja C^* -algebraicznej wersji tej grupy kwantowej.

Drugą deformacją grupy „ $az + b$ ” analizowaną w [31] jest przypadek, gdy q jest liczbą rzeczywistą większą od 0 i mniejszą niż 1. Odpowiadający mu warunek spektralny mówi, że spektra elementów a i b mają być zawarte w domknięciu zbioru

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \in q^{\mathbb{Z}}\}.$$

Warunek ten był już wcześniej znany w literaturze na temat grup kwantowych ([26], [25], [3]). Warunek ten nie jest algebraiczny, a co za tym idzie C^* -algebra A nie odpowiada

ilorazowi $*$ -algebry Hopfa $\mathcal{A}_q$. Jest to jednak wdzięczny przykład C^* -algebraicznej grupy kwantowej.

Warto również wspomnieć o tym, że warunki spektralne mogą mieć wpływ na algebraiczne własności C^* -algebry A , nawet jeśli ich natura jest czysto analityczna. Przykładem takiej sytuacji może być fakt, że podczas gdy na algebrze $\mathcal{A}_q$ grupa skalująca $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ nie jest wyznaczona jednoznacznie (niejednoznaczność pochodzi od wieloznaczności wyboru z takiego, że $q = e^z$), w przypadku $0 < q < 1$, warunek spektralny wyklucza możliwość skalowania generatorów o dowolną liczbę dodatnią. Okazuje się, że na odpowiedniej C^* -algebrze istnieje jednak grupa skalująca i jest ona wyznaczona jednoznacznie przez warunki opisane w stwierdzeniu 4.1.

Kolejne przykłady C^* -algebraicznych kwantowych grup „ $az + b$ ” rozważane będą w rozdziale 7 niniejszej pracy. Rozważane parametry będą liczbami zespolonymi o wartości bezwzględnej ściśle mniejszej od 1, spełniającymi pewne dodatkowe warunki. Okazuje się, że konstrukcja kwantowej grupy „ $az + b$ ”, przejawia zarówno cechy podobne do sytuacji pierwiastka z jedynek, jak i liczby rzeczywistej.

Rozdział 5

Funkcje specjalne

5.1 Parametr Deformacji

Wszystkie obiekty, którymi będziemy zajmować się w rozdziałach 5, 6 i 7 będą zależeć od parametru q , który będziemy nazywać parametrem deformacji.

Parametr q będzie niezerową liczbą zespoloną taką, że $|q| < 1$ i $\operatorname{Im} q \neq 0$. Możemy zapisać

$$q = e^{\rho^{-1}},$$

gdzie ρ jest liczbą zespoloną o ściśle ujemnej części rzeczywistej i niezerowej części urojonej. W ten sposób ujednoznaczniliśmy zespolone potęgi parametru q : od teraz

$$q^z = \exp \left\{ \frac{z}{\rho} \right\}$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

W dalszych podrozdziałach będziemy nakładać na ρ dodatkowy warunek: będziemy zakładać, że część urojona ρ należy do zbioru

$$\left\{ \frac{N}{2\pi} : N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

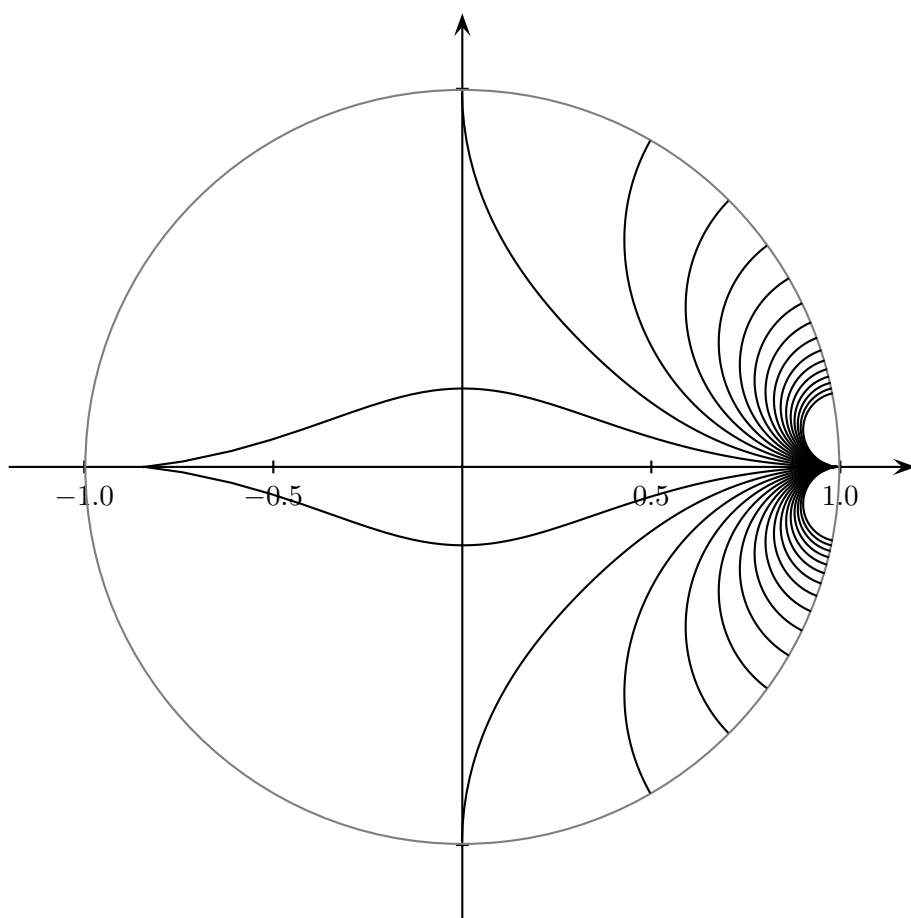
Przy takim ρ parametr q należy do zbioru, którego część przedstawiono na rysunku 5.1.

5.2 Grupa Γ_q

Niech $q = \exp \{\rho^{-1}\}$ będzie parametrem deformacji takim, że $|q| < 1$ and $\operatorname{Im} q \neq 0$. Symbolem Γ_q oznaczamy będziemy mnożącą podgrupę $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ generowaną przez q i $\{q^{it} : t \in \mathbb{R}\}$:

$$\Gamma_q = \{q^n q^{it} : n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}\}. \quad (5.1)$$

Grupa Γ_q zawiera jednoparametrową podgrupę $\Gamma_{q,0} = \{q^{it} : t \in \mathbb{R}\}$. Jako podzbiór $\mathbb{C}$, podgrupa $\Gamma_{q,0}$ jest spiralą logarytmiczną.



Rysunek 5.1: Dopuszczalne wartości parametru q ($N = \pm 2, \dots, \pm 32$)

Lemat 5.1 *Niech $z = e^r e^{i\varphi}$ będzie niezerową liczbą zespoloną. Wówczas*

$$z\Gamma_{q,0} = \exp \left\{ i \left(\varphi + \frac{r \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right) \right\} \Gamma_{q,0}.$$

DOWÓD. Obliczmy

$$\begin{aligned} zq^{it} &= e^r e^{i\varphi} e^{-t \operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} e^{it \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \\ &= e^{r-t \operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} e^{i(\varphi+t \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1})} \\ &= \exp \left\{ \left(\frac{r}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} - t \right) \operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1} \right\} \exp \left\{ i \left[\varphi + \left(t - \frac{r}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right) \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1} + \frac{r \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ i \left(\varphi + \frac{r \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right) \right\} e^{-\left(t - \frac{r}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right) \operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} e^{i \left(t - \frac{r}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right) \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \\ &= \exp \left\{ i \left(\varphi + \frac{r \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right) \right\} q^{i \left(t - \frac{r}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right)}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla ustalonej liczby $\tau \in \mathbb{R}$ odwzorowanie

$$\Gamma_{q,0} \ni q^{it} \longmapsto q^{i(t+\tau)} \in \Gamma_{q,0}$$

jest bijekcją widzimy, że $z\Gamma_{q,0}$ powstaje z $\Gamma_{q,0}$ przez obrót o kąt $\varphi + \frac{r \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}}$. Q.E.D.

Wniosek 5.2 *Mamy*

$$q\Gamma_{q,0} = e^{-i(\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho})^{-1}} \Gamma_{q,0}. \quad (5.2)$$

DOWÓD. Korzystamy z lematu 5.1. Mamy $q = e^{\operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}} e^{i \operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}}$, więc

$$q\Gamma_q = \exp \left\{ i \left(\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1} + \frac{(\operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1})^2}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right) \right\} \Gamma_{q,0} = \exp \left\{ i \frac{(\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1})^2 + (\operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1})^2}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right\} \Gamma_{q,0}$$

lub inaczej

$$q\Gamma_{q,0} = \exp \left\{ i \frac{|\boldsymbol{\rho}^{-1}|^2}{\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} \right\} \Gamma_{q,0}.$$

Wzór (5.2) wynika teraz z tożsamości

$$\frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z} = -(\operatorname{Im} z^{-1})^{-1}. \quad (5.3)$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Q.E.D.

Zdefiniowana na początku niniejszego podrozdziału grupa Γ_q jest lokalnie zwartą grupą abelową, jeśli wyposażymy ją w topologię odziedziczoną z $\mathbb{C}$. Można zatem rozważać grupę dualną do Γ_q w sensie Pontriagina. Przypomnijmy, że lokalnie zwartą grupę abelową G nazywamy samodualną, jeśli jest izomorficzna z grupą dualną $\widehat{G}$.

Stwierdzenie 5.3 *Grupa Γ_q jest samodualna wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho} \in \pi^{-1}\mathbb{Q}$.*

DOWÓD. Zestawiając wzór (5.1) z faktem, iż $\Gamma_{q,0}$ jest podgrupą w Γ_q widzimy, że

$$\Gamma_q = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} q^k \Gamma_{q,0}.$$

Na mocy wniosku 5.2 zbiór ten ma skończoną liczbę spójnych składowych wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(\operatorname{Im} \rho)^{-1}$ jest współmierna z π . Jest jasne, że w takim wypadku Γ_q jest izomorficzna z $\mathbb{R}$ (wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Im} \rho = (2k\pi)^{-1}$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$) albo z $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{R}$, gdzie N jest liczbą spójnych składowych Γ_q . Oczywiście obie te grupy są samodualne.

Jeśli $(\operatorname{Im} \rho)^{-1}$ nie jest współmierna z π , to Γ_q ma nieskończenie wiele spójnych składowych i w konsekwencji jest izomorficzna z $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Jak wiadomo, ta ostatnia grupa nie jest samodualna. Q.E.D.

Elementy $\gamma \in \Gamma_q$ można przedstawiać w postaci $\gamma = q^n q^{it}$. Jeśli jednak $\operatorname{Im} \rho \in \pi^{-1}\mathbb{Q}$, przedstawienie to nie jest jednoznaczne. Mimo to ową niejednoznaczność można kontrolować. Przypuśćmy, że Γ_q ma N składowych. Oznacza to, że $q^N \in \Gamma_{q,0}$, tzn.

$$q^N = q^{it}$$

dla pewnego $t \in \mathbb{R}$. Rozwiązując powyższe równanie względem t otrzymujemy

$$t = -N \frac{\operatorname{Re} \rho^{-1}}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} = N \frac{\operatorname{Re} \rho}{\operatorname{Im} \rho}.$$

Widzimy zatem, że

$$q^n q^{it} = q^{n+N} q^{i(t-N \frac{\operatorname{Re} \rho}{\operatorname{Im} \rho})} \quad (5.4)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$ i $t \in \mathbb{R}$.

W uzupełnieniu A.3 przedstawiliśmy rysunki zbioru Γ_q dla różnych wartości parametru q .

Jako lokalnie zwarta grupa abelowa Γ_q posiada obustronnie niezmienniczą miarę Haara wyznaczoną jednoznacznie z dokładnością do dodatniego czynnika normującego. Przyjmijmy

$$\int_{\Gamma_q} f(\gamma) dh(\gamma) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^k q^{it}) dt \quad (5.5)$$

gdzie N jest liczbą składowych Γ_q (gdy Γ_q ma nieskończenie wiele składowych należy oczywiście zastąpić $N-1$ w powyższych wzorach przez ∞).

Na koniec niniejszego podrozdziału zajmiemy się funkcją

$$\Gamma_q \ni \gamma \longmapsto \bar{\gamma} \in \mathbb{C}. \quad (5.6)$$

Stwierdzenie 5.4 *Ustalmy spójną składową $q^n \Gamma_{q,0}$ grupy Γ_q . Funkcja (5.6) obcięta do tej składowej rozszerza się do funkcji holomorficznej na otoczeniu $q^n \Gamma_{q,0}$ w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

DOWÓD. Niech

$$p = \frac{-\rho}{\bar{\rho}}.$$

Mamy

$$q^p = \bar{q}^{-1}.$$

Niech $\gamma = q^n q^{it} \in q^n \Gamma_{q,0}$. Wówczas

$$\bar{q}^{2n} \gamma^p = \bar{q}^{2n} \bar{q}^{-n} \bar{q}^{-it} = \bar{q}^n \bar{q}^{-it} = \bar{\gamma}.$$

Funkcja $\gamma \mapsto \bar{q}^{2n} \gamma^p$ jest oczywiście holomorficzna wszędzie tam gdzie określona jest holomorficzna gałąź logarytmu. Q.E.D.

Stwierdzenie 5.4 wprowadza nas w zagadnienia, którym poświęcona będzie większa część niniejszego rozdziału. Aby uniknąć rozszerzania funkcji zdefiniowanych na $\bar{\Gamma}_q$ na obszary o skomplikowanym opisie algebraicznym, będziemy stosować przekształcenie $z \mapsto \log z$ (patrz podrozdział 5.4).

5.3 Bicharakter i funkcja α

W tym podrozdziale będziemy zakładać, że grupa Γ_q jest samodualna. Ponadto będziemy wymagać, aby $\text{Im } \rho = \frac{N}{2\pi}$, gdzie $N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. W szczególności Γ_q ma $|N|$ spójnych składowych. Założenie to będzie szczególnie istotne w rozdziałach 6 i 7.

Na każdej lokalnie zwartej, abelowej grupie G takiej, dla której istnieje homomorfizm ϕ w grupę dualną $\widehat{G}$ możemy zdefiniować bicharakter, tj. funkcję dwóch zmiennych na G o wartościach w S^1 będącą homomorfizmem ze względu na każdą zmienną z osobna. Funkcja ta dana jest przez

$$G \times G \ni (g, g') \longmapsto \langle g, \phi(g') \rangle \in S^1.$$

W poniższym twierdzeniu zdefiniujemy pewien bicharakter na samodualnej grupie Γ_q .

Twierdzenie 5.5 *Niech $\text{Im } \rho = \frac{N}{2\pi}$, gdzie $N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wówczas istnieje ciągła funkcja $\chi: \Gamma_q \times \Gamma_q \rightarrow S^1$ będąca symetrycznym i niezdegenerowanym bicharakterem na Γ_q , tzn.*

$$\begin{aligned} \chi(\gamma, \gamma') &= \chi(\gamma', \gamma), \\ \chi(\gamma, \gamma') \chi(\gamma, \gamma'') &= \chi(\gamma, \gamma' \gamma'') \end{aligned} \tag{5.7}$$

dla wszystkich $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma_q$ oraz

$$\left(\begin{array}{l} \chi(\gamma, \gamma') = 1 \text{ dla} \\ \text{wszystkich } \gamma' \in \Gamma_q \end{array} \right) \implies (\gamma = 1). \tag{5.8}$$

Funkcja ta jest wyznaczona jednoznacznie przez warunki

$$\begin{aligned} \chi(\gamma, q) &= \text{Phase } \gamma, \\ \chi(\gamma, q^{it}) &= |\gamma|^{it} \end{aligned} \tag{5.9}$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$ i $t \in \mathbb{R}$. Ponadto istnieje ciągła funkcja $\alpha: \Gamma_q \rightarrow S^1$ taka, że dla dowolnych $\gamma, \gamma' \in \Gamma_q$

$$\chi(\gamma, \gamma') = \frac{\alpha(\gamma\gamma')}{\alpha(\gamma)\alpha(\gamma')}. \quad (5.10)$$

Funkcja α ma także tę własność, że

$$\alpha(\gamma) = \alpha(\gamma^{-1}) \quad (5.11)$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$.

DOWÓD. Każdy element $\gamma \in \Gamma_q$ jest postaci $\gamma = q^n q^{it}$, jest zatem jasne, że równania (5.9) wyznaczają symetryczny bicharakter na Γ_q jednoznacznie. Wystarczy więc podać wzór na χ i sprawdzić, że spełnione są wszystkie wymagane warunki.

Niech $\gamma = q^n q^{it}$ i $\gamma' = q^{n'} q^{it'}$. Zdefiniujmy

$$\chi(\gamma, \gamma') = \chi(q^n q^{it}, q^{n'} q^{it'}) = e^{i(nn' - tt')\text{Im } \rho^{-1}} e^{i(nt' + n't)\text{Re } \rho^{-1}}. \quad (5.12)$$

Pierwszą rzeczą, którą należy sprawdzić jest czy równanie (5.12) określa funkcję na Γ_q , tzn. czy prawa strona (5.12) nie zależy od przedstawień $\gamma = q^n q^{it}$, $\gamma' = q^{n'} q^{it'}$. Mamy

$$\chi(q^{(n+N)} q^{i(i-N\frac{\text{Re } \rho}{\text{Im } \rho})}, q^{n'} q^{it'}) = \lambda \chi(q^n q^{it}, q^{n'} q^{it'}),$$

gdzie czynnik λ możemy obliczyć korzystając z tożsamości (5.3) i założenia o $\text{Im } \rho$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \exp \left\{ i \left[\left(Nn' + t'N\frac{\text{Re } \rho}{\text{Im } \rho} \right) \text{Im } \rho^{-1} + \left(Nt' - n'N\frac{\text{Re } \rho}{\text{Im } \rho} \right) \text{Re } \rho^{-1} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ i \left[\left(Nn' - t'N\frac{\text{Re } \rho^{-1}}{\text{Im } \rho^{-1}} \right) \text{Im } \rho^{-1} + \left(Nt' + n'N\frac{\text{Re } \rho^{-1}}{\text{Im } \rho^{-1}} \right) \text{Re } \rho^{-1} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ i \left[Nn' \text{Im } \rho^{-1} + Nn' \frac{(\text{Re } \rho^{-1})^2}{\text{Im } \rho^{-1}} \right] \right\} \\ &= \exp \{ iNn'(\text{Im } \rho)^{-1} \} = e^{n'2\pi i} = 1. \end{aligned}$$

Dzięki oczywistej symetrii prawej strony (5.12) względem zamiany (n, t) i (n', t') widzimy, że wzór ten definiuje symetryczną funkcję χ na Γ_q . Sprawdźmy warunki (5.9). Mamy

$$\chi(q^{n'} q^{it'}, q) = e^{in' \text{Im } \rho^{-1}} e^{it' \text{Re } \rho^{-1}} = \text{Phase}(q^{n'} q^{it'})$$

oraz

$$\chi(q^{n'} q^{it'}, q^{it}) = e^{-itt' \text{Im } \rho^{-1}} e^{in't \text{Re } \rho^{-1}} = |q^{n'} q^{it'}|^{it}.$$

Dalej pisząc $\gamma'' = q^{n''} q^{it''}$ sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \chi(\gamma, \gamma') \chi(\gamma, \gamma'') &= \chi(q^n q^{it}, q^{n'} q^{it'}) \chi(q^n q^{it}, q^{n''} q^{it''}) \\ &= e^{i(nn' - tt')\text{Im } \rho^{-1}} e^{i(nt' + n't)\text{Re } \rho^{-1}} \\ &\quad \times e^{i(nn'' - tt'')\text{Im } \rho^{-1}} e^{i(nt'' + n''t)\text{Re } \rho^{-1}} \\ &= e^{i[n(n' + n'') - t(t' + t'')]\text{Im } \rho^{-1}} e^{i[n(t' + t'') + (n' + n'')t]\text{Re } \rho^{-1}} \\ &= \chi(q^n, q^{it}, q^{n' + n''} q^{i(t' + t'')}) = \chi(\gamma, \gamma' \gamma''), \end{aligned}$$

co pokazuje, że χ spełnia warunki (5.7).

Aby sprawdzić warunek (5.8) pokażemy, że dla każdego $\gamma \in \Gamma_q$ takiego, że $\gamma \neq 1$ istnieje element $\gamma' \in \Gamma_q$ taki, że $\chi(\gamma, \gamma') \neq 1$. Istotnie: niech $\gamma \neq 1$. Wówczas $\text{Phase } \gamma \neq 1$ lub $|\gamma| \neq 1$. W pierwszym przypadku wystarczy położyć $\gamma' = q$, a w drugim $\gamma' = q^{it}$ dla $t \notin (\log |\gamma|)^{-1} 2\pi\mathbb{Z}$. Z (5.9) wynika, że $\chi(\gamma, \gamma') \neq 1$.

Do zakończenia dowodu musimy jeszcze zdefiniować funkcję α . Niech

$$\alpha(\gamma) = \alpha(q^n q^{it}) = e^{\frac{i}{2}(n^2 - t^2)\text{Im } \rho^{-1}} e^{int \text{Re } \rho^{-1}} = \exp \left\{ i \text{Im } \frac{(n + it)^2}{2\rho} \right\}. \quad (5.13)$$

Podobnie jak w przypadku definicji funkcji χ prawa strona (5.13) nie zależy od przedstawienia $\gamma = q^n q^{it}$. Własności (5.10) i (5.11) wynikają bezpośrednio z podanego wzoru na funkcję α . Q.E.D.

Uwaga 5.6 Traktując S^1 jako trywialny Γ_q -moduł możemy uważać funkcje $\Gamma_q^k \rightarrow S^1$ za łańcuchy na Γ_q o wartościach w S^1 ([2]). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} (d\chi)(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= \gamma_1 \chi(\gamma_2, \gamma_3) \chi(\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3)^{-1} \chi(\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3) \chi(\gamma_1, \gamma_2)^{-1} \\ &= \chi(\gamma_2, \gamma_3) \chi(\gamma_1, \gamma_3)^{-1} \chi(\gamma_2, \gamma_3)^{-1} \chi(\gamma_1, \gamma_2) \chi(\gamma_1, \gamma_3) \chi(\gamma_1, \gamma_2)^{-1} \\ &= 1, \end{aligned}$$

a więc χ jest 2-kocyklem. Równanie (5.10) mówi, że $\chi = (d\alpha)^{-1}$. Widać stąd, że nie można liczyć na jedyność funkcji α . Mimo, iż w wielu miejscach będziemy korzystać tylko z własności (5.10) funkcji α , w dalszych częściach pracy będziemy używać postaci funkcji α danej wzorem (5.13).

Uwaga 5.7 Prawa strona wzoru (5.12) jest konsekwencją warunków (5.9). Z dowodu twierdzenia 5.5 widać zatem, że bicharakter o żądanych własnościach istnieje na Γ_q wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Im } \rho = \frac{N}{2\pi}$, gdzie $N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

5.4 Funkcja $\mathbb{F}_q$

W niniejszym podrozdziale będziemy badać funkcję specjalną $\mathbb{F}_q$. Funkcja ta określona jest na domknięciu Γ_q w $\mathbb{C}$, które będziemy oznaczać

$$\bar{\Gamma}_q = \Gamma_q \cup \{0\}.$$

Dla $\gamma \in \Gamma_q$, $\gamma \neq -1, -q^{-2}, -q^{-4}, \dots$ zdefiniujemy

$$\mathbb{F}_q(\gamma) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 + \overline{q^{2k}\gamma}}{1 + q^{2k}\gamma} \quad (5.14)$$

Uwaga 5.8 Punkty $\{-q^{-2k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$ należą do Γ_q wtedy i tylko wtedy, gdy grupa ta jest samodualna (tj. liczba spójnych składowych jest skończona) i liczba składowych jest parzysta. Istotnie: punkt -1 należy do Γ_q wtedy i tylko wtedy, gdy po pewnej liczbie obrotów o kąt $-(\operatorname{Im} \rho)^{-1}$ spirala logarytmiczna $\Gamma_{q,0}$ obróci się o kąt π . Oczywiście oznacza to, że spirali postaci

$$q^k \Gamma_{q,0}$$

jest skończenie wiele i liczba ich jest parzysta. Z drugiej strony, jeśli grupa Γ_q ma skończenie wiele składowych i liczba tych składowych jest parzysta, to punkt -1 musi do jednej z tych składowych należeć. Ponieważ $q \in \Gamma_q$ z definicji grupy Γ_q , mamy

$$\left(\{-q^{-2k} : k \in \mathbb{Z}_+\} \subset \Gamma_q\right) \iff (-1 \in \Gamma_q).$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy założenie, że punkty $\{-q^{-2k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$ są elementami Γ_q . Jeśli tak nie jest, rozumowania dotyczące nadawania funkcji $\mathbb{F}_q$ wartości w tych punktach należy pominąć.

Stwierdzenie 5.9 *Iloczyn nieskończony (5.14) jest niemal jednostajnie zbieżny na $\Gamma_q \setminus \{-q^{-2k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$. Funkcja $\mathbb{F}_q$ rozszerza się do funkcji ciągłej $\bar{\Gamma}_q \rightarrow S^1$. Po rozszerzeniu $\mathbb{F}_q(0) = 1$ oraz*

$$(1 + \gamma)\mathbb{F}_q(\gamma) = (1 + \bar{\gamma})\mathbb{F}_q(q^2\gamma) \quad (5.15)$$

dla wszystkich $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$.

DOWÓD. Iloczyn nieskończony

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k}\gamma) \quad (5.16)$$

jest zbieżny dla dowolnego $\gamma \in \mathbb{C}$ i zbieżność ta jest niemal jednostajna na $\mathbb{C}$. Mamy oczywiście

$$\mathbb{F}_q(\gamma) = \frac{\prod_{k=0}^{\infty} (1 + \overline{q^{2k}\gamma})}{\prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k}\gamma)}$$

dla $\gamma \in \Gamma_q \setminus \{-q^{-2k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$. Nielmal jednostajna zbieżność iloczynu (5.16) pokazuje, że

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathbb{F}_q(\gamma) = 1. \quad (5.17)$$

Jeśli $\gamma \in \Gamma_q$ zbiega do $-q^{-2n}$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}_+$, to możemy przyjąć, że $\gamma = -q^{-2n}q^{it}$ i rozważać $t \rightarrow 0$. W tej sytuacji

$$\mathbb{F}_q(\gamma) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 + \overline{q^{2k}\gamma}}{1 + q^{2k}\gamma} \cdot \frac{1 + \overline{q^{2n}\gamma}}{1 + q^{2n}\gamma} \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} \frac{1 + \overline{q^{2k}\gamma}}{1 + q^{2k}\gamma}$$

i mamy

$$\lim_{\gamma \rightarrow -q^{-2n}} \frac{1 + \overline{q^{2n}\gamma}}{1 + q^{2n}\gamma} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \overline{q}^{-it}}{1 - q^{it}} = \frac{-\rho}{\overline{\rho}}.$$

Widzimy zatem, że

$$\lim_{\gamma \rightarrow -q^{-2n}} = \frac{-\rho}{\overline{\rho}} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1 + \overline{q^{2k}\gamma}}{1 + q^{2k}\gamma}. \quad (5.18)$$

W świetle (5.17) i (5.18), widzimy, że $\mathbb{F}_q$ rozszerza się do funkcji ciągłej $\overline{\Gamma}_q \rightarrow S^1$.

Wzór (5.15) wynika wprost z definicji funkcji $\mathbb{F}_q$. Istotnie: na mocy (5.14) mamy dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_q \setminus \{-q^{-2k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$

$$\mathbb{F}_q(\gamma) = \frac{1 + \overline{\gamma}}{1 + \gamma} \mathbb{F}_q(q^2\gamma). \quad (5.19)$$

Mnożąc obie strony tego wzoru przez $1 + \gamma$ i korzystając z ciągłości obu stron względem zmiennej γ otrzymujemy (5.15) dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$. Q.E.D.

Uwaga 5.10 Jest jasne, że wzór (5.19) obowiązuje dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q \setminus \{-1\}$. Jeśli $-1 \in \overline{\Gamma}_q$ (a takim przypadkiem będziemy się zajmować w dalszych rozdziałach), przechodząc do granicy $\gamma \rightarrow -1$ w (5.19) otrzymujemy wzór

$$\mathbb{F}_q(-1) = \frac{-\rho}{\overline{\rho}} \mathbb{F}_q(-q^2), \quad (5.20)$$

który będzie później użyteczny.

Z każdą funkcją $f: \overline{\Gamma}_q \rightarrow \mathbb{C}$ i punktem $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$ możemy związać funkcję zmiennej rzeczywistej $f[\gamma]$ wzorem

$$f[\gamma](t) = f(q^{it}\gamma).$$

W dalszych rozważaniach wiele uwagi poświęcimy badaniu przedłużeń analitycznych tego typu funkcji.

Twierdzenie 5.11 1. *Dla dowolnego $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$ funkcja $\mathbb{F}_q[\gamma]$ ma przedłużenie meromorficzne na całą płaszczyznę zespoloną.*

2. *Przedłużenie to jest holomorficzne w dolnej półpłaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Im } \rho = \frac{N}{2\pi}$, gdzie $N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

3. *Jeśli spełniony jest warunek z punktu 2., to zachodzi wzór*

$$\mathbb{F}_q[q\gamma](-i) = (1 + \gamma)\mathbb{F}_q[\gamma](0) = (1 + \gamma)\mathbb{F}_q(\gamma). \quad (5.21)$$

DOWÓD. **Ad 1.** Niech $\gamma = q^n q^{ir}$. Przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} A(t) &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \exp \left\{ \frac{2k + n - i(t+r)}{\bar{\rho}} \right\} \right), \\ B(t) &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \exp \left\{ \frac{2k + n + i(t+r)}{\rho} \right\} \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

gdzie $t \in \mathbb{C}$. Możemy teraz zapisać $\mathbb{F}_q[\gamma](t)$ jako iloraz

$$\mathbb{F}_q[\gamma](t) = \frac{A(t)}{B(t)}. \quad (5.23)$$

Funkcje A i B mają oczywiście przedłużenie holomorficzne na całą płaszczyznę $\mathbb{C}$. Ponadto wszystkie zera funkcji B są zerami pierwszego rzędu. Oznacza to, że (5.23) definiuje funkcję meromorficzną od $t \in \mathbb{C}$.

Ad 2. Zera funkcji A tworzą zbiór

$$(2\mathbb{Z} + 1)\pi\bar{\rho} - i(2\mathbb{Z}_+ + n) - r, \quad (5.24)$$

natomiast zera funkcji B tworzą zbiór

$$(2\mathbb{Z} + 1)\pi\rho + i(2\mathbb{Z}_+ + n) - r. \quad (5.25)$$

Przypuśćmy, że $\text{Im } \rho = \frac{N}{2\pi}$, gdzie $N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Niech $z = (2p+1)\pi\rho + i(2l+n) - r$ będzie zerem funkcji B takim, że $\text{Im } z \leq 0$. Zauważmy, że

$$\rho = \bar{\rho} + \rho - \bar{\rho} = \bar{\rho} + 2i \text{Im } \rho = \bar{\rho} + i\frac{N}{\pi}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} z &= (2p+1)\pi\rho + i(2l+n) - r \\ &= (2p+1)\pi\bar{\rho} + i(2p+1)N + i(2l+n) - r \\ &= (2p+1)\pi\bar{\rho} + i((2p+1)N + 2l+n) - r \\ &= (2p+1)\pi\bar{\rho} + i(2pN + N + 2l + 2n - n) - r \\ &= (2p+1)\pi\bar{\rho} + i(2[pN + \frac{N}{2} + l + n] - n) - r \\ &= (2p+1)\pi\bar{\rho} - i(2[-pN - \frac{N}{2} - l - n] + n) - r \end{aligned}$$

Liczba $-[pN + \frac{N}{2} + l + n]$ jest całkowita i dodatnia, gdyż

$$\begin{aligned} 0 &\geq \text{Im } z = (2p+1)\pi \text{Im } \rho + 2l + n \\ &= (2p+1)\pi \frac{N}{2\pi} + 2l + n \\ &= pN + \frac{N}{2} + 2l + n \\ &= [pN + \frac{N}{2} + l + n] + l, \end{aligned}$$

a więc

$$- \left[pN + \frac{N}{2} + l + n \right] \geq l \in \mathbb{Z}_+.$$

Oznacza to, że z jest zerem funkcji A . Ponieważ wszystkie zera funkcji A i B są pierwszego rzędu, widzimy, że osobliwości $\mathbb{F}_q[\gamma]$ leżące w dolnej półpłaszczyźnie są usuwalne.

Z drugiej strony, przypuśćmy, że leżące w dolnej półpłaszczyźnie zero funkcji B

$$z = \pi \boldsymbol{\rho} - i(2l_1 + n) - r \quad (5.26)$$

jest równocześnie zerem funkcji A , tzn.

$$z = \pi \overline{\boldsymbol{\rho}} + i(2l_2 + n) - r. \quad (5.27)$$

Przyrównując części urojone (5.26) i (5.27) otrzymujemy

$$\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho} = \frac{2(l_1 + l_2 + n)}{2\pi}.$$

Ad 3. Przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \exp \left\{ \frac{2k + n + 1 - i(t + r)}{\overline{\boldsymbol{\rho}}} \right\} \right), \\ \tilde{B}(t) &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \exp \left\{ \frac{2k + n + 1 + i(t + r)}{\boldsymbol{\rho}} \right\} \right) \end{aligned}$$

(to nie są te same funkcje co w (5.22)). Wtedy

$$\mathbb{F}_q[q\gamma](t) = \frac{\tilde{A}(t)}{\tilde{B}(t)}.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \tilde{A}(-i) &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \exp \left\{ \frac{2k + n + ir}{\overline{\boldsymbol{\rho}}} \right\} \right) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \overline{q^{2k}\gamma} \right), \\ \tilde{B}(-i) &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \exp \left\{ \frac{2(k+1) + n + ir}{\boldsymbol{\rho}} \right\} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{2k}\gamma), \end{aligned}$$

co pokazuje, że

$$\mathbb{F}_q[q\gamma](-i) = \frac{\prod_{k=0}^{\infty} (1 + \overline{q^{2k}\gamma})}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{2k}\gamma)} = (1 + \gamma) \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 + \overline{q^{2k}\gamma}}{1 + q^{2k}\gamma} = (1 + \gamma) \mathbb{F}_q(\gamma)$$

Q.E.D.

Stwierdzenie 5.12 Dla każdego $\varepsilon > 0$, $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$ i dowolnego $M > 0$ istnieje $R > 0$ takie, że dla wszystkich $\tau \in \mathbb{R}$ takich, że $|\tau| \leq M$ i dla wszystkich $t > R$ mamy

$$|\mathbb{F}_q[\gamma](-\operatorname{Im}(\boldsymbol{\rho})t - i\tau) - 1| < \varepsilon.$$

DOWÓD. Zauważmy, że dla rzeczywistego t mamy

$$q^{it} \xrightarrow[t \rightarrow \operatorname{Im}(\boldsymbol{\rho})\infty]{} \infty$$

oraz

$$q^{it} \xrightarrow[t \rightarrow -\operatorname{Im}(\boldsymbol{\rho})\infty]{} 0.$$

Z dowodu stwierdzenia 5.9 wiemy, że funkcja

$$w \mapsto \frac{\prod_{k=0}^{\infty} (1 + \overline{q^{2k}w})}{\prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k}w)}$$

jest ciągła w otoczeniu 0 i dąży do 1 dla $w \rightarrow 0$. Jest również jasne, że dla ustalonego $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$, $M > 0$ oraz τ takich, że $|\tau| < M$ mamy

$$\gamma q^{i(t-i\tau)} \xrightarrow[t \rightarrow -\operatorname{Im}(\boldsymbol{\rho})\infty]{} 0,$$

jako że $|\gamma q^{i(t-i\tau)}| = e^{-t \operatorname{Im} \boldsymbol{\rho}^{-1}} e^{\tau \operatorname{Re} \boldsymbol{\rho}^{-1}} |\gamma|$.

Stąd wniosek, że

$$\mathbb{F}_q[\gamma](-\operatorname{Im}(\boldsymbol{\rho})t - i\tau) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$$

jednostajnie dla $|\tau| < M$, co chcieliśmy wykazać.

Q.E.D.

Proste zastosowanie wzorów (5.15) i (5.21) daje nam

Wniosek 5.13 Dla dowolnego $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$ mamy

$$\mathbb{F}_q[-q\gamma](-i) = (1 - \overline{\gamma})\mathbb{F}_q(-q^2\gamma). \quad (5.28)$$

Uwaga 5.14 Niech $\operatorname{Im} \boldsymbol{\rho} = \frac{N}{2\pi}$, gdzie $N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wówczas dla dowolnego $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$, holomorphyzna w dolnej półpłaszczyźnie funkcja $\mathbb{F}_q[\gamma]$ nie ma zer w pasku

$$\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

Wynika to natychmiast ze wzoru (5.24), który w szczególności mówi, że części urojone zer funkcji $\mathbb{F}_q[\gamma]$ są liczbami całkowitymi.

Zauważmy także, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ oraz $\varepsilon \geq 0$ mamy $\mathbb{F}_q[\gamma](t - i\varepsilon) = \mathbb{F}_q[q^{it}\gamma](-i\varepsilon)$. Istotnie: dla $s \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathbb{F}_q[\gamma](t + s) = \mathbb{F}_q[q^{it}\gamma](s),$$

a co za tym idzie, mamy także równość dla s w dolnej półpłaszczyźnie. Wynika stąd, że funkcja $\mathbb{F}_q[\gamma]$ posiada co najwyżej jedno zero na prostej $\{t - i : t \in \mathbb{R}\}$. Istnieje ono wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma \in q^{\frac{N}{2}+1}\Gamma_{q,0}$. Wnioskujemy o tym ze wzoru (5.21), który możemy przepisać jako

$$\mathbb{F}_q[\gamma](t - i) = (1 + q^{it}q^{-1}\gamma)\mathbb{F}_q(q^{-1}q^{it}\gamma). \quad (5.29)$$

Podobnie wzór (5.28) można zapisać ogólniej jako

$$\mathbb{F}_q[-q\gamma](t - i) = (1 - \overline{q^{it}\gamma})\mathbb{F}_q(-q^2q^{it}\gamma) = (1 - \overline{q^{it}\gamma})\mathbb{F}_q[-q^2\gamma](t) \quad (5.30)$$

dla $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$.

Możliwa jest oczywiście dokładniejsza analiza zer funkcji $\mathbb{F}_q[\gamma]$: z dowodu punktu 2. twierdzenia 5.11 widzimy, że zera funkcji B (patrz (5.23), (5.24), (5.25)), które leżą w dolnej półpłaszczyźnie skracają się z zerami funkcji A . Ponieważ wszystkie zera są pierwszego rzędu, jedynymi zerami funkcji $\mathbb{F}_q[\gamma]$ (w dolnej półpłaszczyźnie) są te elementy zbioru (5.24), które nie są elementami zbioru (5.25). Oznacza to, że wszystkie zera funkcji $\mathbb{F}_q[\gamma]$ (w dolnej półpłaszczyźnie) leżą poniżej prostej

$$\mathbb{R}\rho + (-r + ni),$$

gdzie $\gamma = q^n q^{ir}$. Dla pewnego, konkretnego γ wyznaczymy tę prostą w następującym przykładzie:

Przykład 5.15 Niech $k \in \mathbb{Z}$ i niech $\gamma = -q^{k+2}$. Zapiszmy γ w postaci $q^n q^{ir}$. W naszym przypadku mamy

$$\gamma = q^{\frac{N}{2}+k+2}q^{ir_0},$$

gdzie r_0 wyznaczamy z równania

$$e^{-r_0 \operatorname{Im} \rho^{-1}} = |q^{ir_0}| = \left| q^{\frac{N}{2}} \right|^{-1} = e^{-\frac{N}{2} \operatorname{Re} \rho^{-1}},$$

czyli

$$r_0 = \frac{N \operatorname{Re} \rho^{-1}}{2 \operatorname{Im} \rho^{-1}} = -\frac{N \operatorname{Re} \rho}{2 \operatorname{Im} \rho} = -\pi \operatorname{Re} \rho.$$

Dla takiego γ wszystkie zera funkcji $\mathbb{F}_q[\gamma]$ leżą poniżej prostej

$$\mathbb{R}\rho + \left(\pi \operatorname{Re} \rho + i\left(\frac{N}{2} + k + 2\right) \right) = \mathbb{R}\rho + i(k + 2).$$

5.4.1 Formuła wiążąca funkcje $\mathbb{F}_q$ i α

Odtąd będziemy stale zakładać, że $\operatorname{Im} \rho = \frac{N}{2\pi}$, gdzie $N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Twierdzenie 5.16 Dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_q$ zachodzi wzór

$$\mathbb{F}_q(\gamma)\mathbb{F}_q(q^2\gamma^{-1}) = C_q\alpha(q^{-1}\gamma), \quad (5.31)$$

gdzie

$$C_q = \text{Phase} \left(q^{\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k})^4 \right)^{-1}.$$

Dowód twierdzenia 5.16 jest dość skomplikowany, a przeprowadzone w nim rachunki nie są wykorzystywane w dalszych częściach pracy. W związku z tym dowód ten zamieszczamy w dodatku A.1. Wzór (5.31) będziemy nazywać *formułą iloczynową*.

Uwaga 5.17 Można znaleźć prostsze wyrażenie na stałą C_q . Używając oznaczeń wprowadzonych w dowodzie twierdzenia 5.16 mamy

$$C_q = e^{-\frac{i}{2}\text{Im}\rho^{-1}} (\text{Phase } G_0(0))^{-2}.$$

Z drugiej strony ponieważ

$$G_0(0) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{2k}),$$

mamy

$$(\text{Phase } G_0(0))^{-2} = \frac{\overline{G_0(0)}}{G_0(0)} = \mathbb{F}_q(1)\mathbb{F}_q(q^2).$$

Stąd

$$C_q = e^{-\frac{i}{2}\text{Im}\rho^{-1}} \mathbb{F}_q(1)\mathbb{F}_q(q^2) = e^{-\frac{i}{2}\text{Im}\rho^{-1}} \mathbb{F}_q(1)^2,$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy ze wzoru (5.15) dla $\gamma = 1$.

Oczywiście wzór ten można również uzyskać wstawiając $\gamma = 1$ we wzorze (5.31) i korzystając z definicji funkcji α danej przez (5.13).

Twierdzenie 5.16 pozwala na analizę tempa wzrostu przedłużenia holomorficznego funkcji $t \mapsto \mathbb{F}_q(q^{it}\gamma)$.

Wniosek 5.18 Funkcja $\mathbb{F}_q[\gamma]$ ma następujące zachowanie asymptotyczne:

$$|\mathbb{F}_q[\gamma](t - i\tau)| = \Xi_\gamma(t - i\tau) |q^{-1}q^{it}\gamma|^\tau \quad (5.32)$$

gdzie $t, \tau \in \mathbb{R}$ oraz

$$\lim_{t \rightarrow \text{Im}(\rho)\infty} \Xi_\gamma(t - i\tau) = 1.$$

DOWÓD. Funkcja

$$t \mapsto \mathbb{F}_q[\gamma](t) \mathbb{F}_q[q^2 \gamma^{-1}](-t) = \mathbb{F}_q(q^{it} \gamma) \mathbb{F}_q(q^2 (q^{it} \gamma)^{-1}) = C_q \alpha(q^{-1} q^{it} \gamma)$$

rozszerza się do funkcji całkowitej. Ze stwierdzenia 5.12 wiemy, że przy ograniczonym τ

$$\mathbb{F}_q[q^2 \gamma^{-1}](-t - i\tau) \xrightarrow[t \rightarrow \text{Im}(\rho)_\infty]{} 1.$$

Oznaczając odwrotność wartości bezwzględnej tej funkcji przez Ξ_γ mamy

$$|\mathbb{F}_q[\gamma](t - i\tau)| \Xi_\gamma(t - i\tau)^{-1} = |\alpha[q^{-1} \gamma](t - i\tau)|.$$

Pozostaje więc zbadać zachowanie asymptotyczne przedłużenia holomorficznego funkcji α . Pisząc $\gamma = q^m q^{is}$ i korzystając z definicji funkcji α (5.13), mamy

$$\begin{aligned} |\alpha[q^{-1} \gamma](t - i\tau)| &= \left| e^{\frac{i}{2}((m-1)^2 - (s+t-t\tau)^2) \text{Im } \rho^{-1}} e^{i(m-1)(s+t-i\tau) \text{Re } \rho^{-1}} \right| \\ &= e^{-(s+t)\tau \text{Im } \rho^{-1}} e^{\tau(m-1) \text{Re } \rho^{-1}} \\ &= |q^{-1} q^m q^{is} q^{it}|^\tau = |q^{-1} \gamma q^{it}|^\tau. \end{aligned}$$

Q.E.D.

5.4.2 Transformata Fouriera funkcji $\mathbb{F}_q$

Przejdziemy teraz do rozważań dotyczących transformaty Fouriera funkcji $\mathbb{F}_q$. Transformatę tę rozumiemy będziemy jako transformatę dystrybucji temperowanej na grupie Γ_q . W tym celu zdefiniujemy przestrzeń $\mathcal{S}(\Gamma_q)$ jako przestrzeń tych funkcji φ na Γ_q , dla których wszystkie funkcje

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \varphi(q^k q^{it})$$

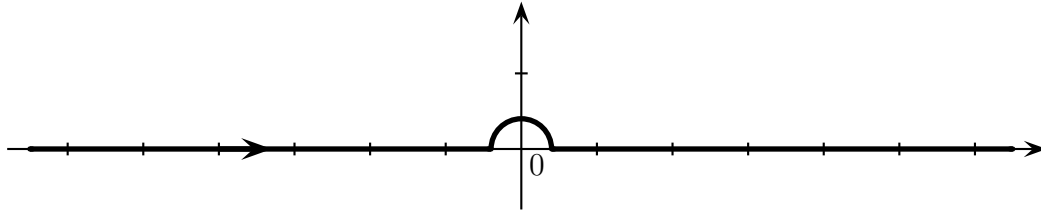
($k = 1, \dots, N-1$) należą do przestrzeni Schwartza szybko znikających funkcji gładkich na $\mathbb{R}$. Rozważmy funkcję

$$\mathbb{H}(\gamma) = \frac{\chi(\gamma, -q^{-2})\gamma}{(1 - \bar{\gamma})\mathbb{F}_q(-q^2\gamma)}$$

zdefiniowaną dla $\gamma \in \Gamma_q \setminus \{1\}$. Funkcja ta zadaje dystrybucję temperowaną na Γ_q . Dla funkcji f , których nośnik nie zawiera punktu $1 \in \Gamma_q$ jest to po prostu

$$\langle f, \mathbb{H} \rangle = \int_{\Gamma_q} f(\gamma) \mathbb{H}(\gamma) dh(\gamma) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^k q^{it}) \mathbb{H}(q^k q^{it}) dt. \quad (5.33)$$

Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{S}(\Gamma_q)$ musimy ominąć biegun funkcji $\mathbb{H}$. Robimy to zmieniając kontur całkowania, tj. całkując po $\mathbb{R} + i\varepsilon$ zamiast po $\mathbb{R}$ i biorąc granicę $\varepsilon \searrow 0$, przy czym funkcję $\mathbb{H}$ przedłużamy holomorficznie na obszar zawierający nowy kontur całkowania, a

Rysunek 5.2: Kontur l z zaznaczoną orientacją

dla funkcji próbnej definiujemy rozszerzenie, jako $f(t + i\varepsilon) = f(t)$. Oczywiście w sumie po prawej stronie (5.33) procedurę tę wystarczy stosować tylko do składnika, w którym $k = 0$. W pozostałych prowadzi ona do wyjściowej definicji.

Teraz rozważmy transformatę Fouriera dystrybucji $\mathbb{H}$. Formalnie możemy ją zapisać jako

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_q} \chi(\gamma, \gamma') \mathbb{H}(\gamma') dh(\gamma') &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} \frac{\chi(\gamma, q^{it}) \chi(q^{it}, -q^{-2}) q^{it}}{(1 - \bar{q}^{-it}) \mathbb{F}_q(-q^2 q^{it})} dt \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma, q^k q^{it}) \chi(q^k q^{it}, -q^{-2}) q^k q^{it}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-it}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} dt, \end{aligned}$$

gdzie w pierwszej całce bierzemy przedłużenie holomorficzne funkcji podcałkowej do prostej $\mathbb{R} + i\varepsilon$.

Korzystając z holomorficzności funkcji podcałkowej i własności (5.8) możemy zapisać tę całkę jako

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(\gamma, q^k q^{it}) \chi(q^k q^{it}, -q^{-2}) q^k q^{it}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-it}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2} \gamma, q^k q^{it}) q^k q^{it}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-it}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} dt, \quad (5.34)$$

gdzie l jest konturem przedstawionym na rysunku 5.2 (w części l leżącej poza osią rzeczywistą dokonujemy przedłużenia holomorficznego funkcji podcałkowej). Oczywiście dla $k \neq 1$ możemy całkować po $\mathbb{R}$ zamiast l , ale ze względu na holomorficzność funkcji podcałkowych, wynik jest ten sam, gdy stosujemy ten sam kontur we wszystkich całkach.

Należy pamiętać, że całka (5.34) jest dobrze zdefiniowaną dystrybucją temperowaną. Jej działanie na funkcję próbną polega na scałkowaniu wyrażenia (5.34) z tą funkcją próbną względem γ , a następnie wykonanie całki względem t . Dystrybucja ta jest transformatą Fouriera dystrybucji $\mathbb{H}$.

Ponieważ rachunki potrzebne do dowodów przedstawionych poniżej stwierdzeń 5.19, 5.20 oraz wniosku 5.21 są dość zawile i nie mają związku z dalszą częścią pracy, dowody te zostały zgromadzone w uzupełnieniu A.2.

Stwierdzenie 5.19 *Całka (5.34) jest zbieżna jako całka niewłaściwa. Dokładniej istnieje granica*

$$\Phi_q(\gamma) = \lim_{R \rightarrow \text{Im}(\rho) \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{l^R} \frac{\chi(\gamma, q^k q^{it}) \chi(q^k q^{it}, -q^{-2}) q^k q^{it}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-it}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} dt, \quad (5.35)$$

gdzie l^R jest częścią konturu l biegnącą od $-\infty$ do punktu $R \in \mathbb{R}$ w przypadku gdy $\text{Im } \rho > 0$, a od R do $+\infty$, gdy $\text{Im } \rho < 0$. Ponadto mamy następujące wyrażenie na $\Phi_q(\gamma)$:

$$\Phi_q(\gamma) = -2\pi \bar{\rho} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1} + \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{Phase} - q^{-2} \gamma)^k \int_{\mathbb{R}-i\tau} \frac{|\gamma|^{iz} |q|^{-2iz} q^{iz}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-iz}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](z)} dz, \quad (5.36)$$

gdzie τ jest dowolną liczbą z przedziału $]0, 1[$.

W następnym stwierdzeniu zajmujemy się analitycznymi własnościami funkcji Φ_q .

Stwierdzenie 5.20 1. Φ_q jest funkcją ciągłą na Γ_q i rozszerza się do funkcji ciągłej na $\bar{\Gamma}_q$.
Ponadto

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \Phi_q(\gamma) = -2\pi \bar{\rho} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1}.$$

2. Dla dowolnego $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$ funkcja $\Phi_q[\gamma] : \mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_q(q^{it} \gamma) \in \mathbb{C}$ ma przedłużenie holomorficzne na dolną półtłaszczyznę.
3. Dla dowolnego $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$ zachodzi wzór

$$\Phi_q[q\gamma](-i) = (1 + \gamma) \Phi_q[\gamma](0) = (1 + \gamma) \Phi_q(\gamma). \quad (5.37)$$

4. Dla ustalonego $\delta > 0$ i dowolnego $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$ istnieją stałe A_1 i A_2 takie, że dla każdego $0 \leq \sigma < 1$ mamy

$$|\Phi_q[\gamma](s - i\sigma)| \leq A_1 + A_2 |q^{-1} \gamma q^{is}|^{1+\delta}.$$

Ze stwierdzenia 5.20 możemy wyciągnąć następujący wniosek:

Wniosek 5.21 *Funkcje Φ_q i $\mathbb{F}_q$ są proporcjonalne:*

$$\mathbb{F}_q = -2\pi \bar{\rho} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1} \Phi_q. \quad (5.38)$$

Możemy teraz zapisać funkcję $\mathbb{F}_q$ w postaci całkowej:

Wniosek 5.22 *Dla każdego $\gamma \in \Gamma_q$ mamy*

$$\mathbb{F}_q(\gamma) = -\frac{\mathbb{F}_q(-q^2)}{2\pi \bar{\rho}} \int_{\Gamma_q} \frac{\chi(-q^{-2}, \gamma') \chi(\gamma, \gamma')}{(1 - \bar{\gamma}') \mathbb{F}_q(-q^2 \gamma')} dh(\gamma')$$

w sensie teorii dystrybucji.

5.5 Potrzebne lematy

W niniejszym podrozdziale podamy kilka lematów potrzebnych do udowodnienia wyników z podrozdziału 6.4. Wyniki te będą się opierały na twierdzeniach zawartych w pracach [30] i [31]. Aby skorzystać z wyników tych prac musimy wprowadzić kilka oznaczeń i zdefiniować nowe obiekty.

Rozważmy funkcję $\text{Ph}: \Gamma_q \rightarrow S^1$ daną wzorem

$$\text{Ph}(q^n q^{it}) = e^{-\frac{2\pi i n}{N}},$$

gdzie $N = 2\pi \text{Im } \rho \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, czyli $|N|$ jest liczbą spójnych składowych grupy Γ_q .

Lemat 5.23 *Dla każdego $\gamma \in \Gamma_q$ ma miejsce tożsamość*

$$\gamma = \text{Ph}(\gamma)|\gamma|^{1+\frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N}}. \quad (5.39)$$

DOWÓD. Zauważmy, że γ i $\text{Ph}(\gamma)$ należą do tej samej spójnej składowej grupy Γ_q . Oznacza to, że ich iloraz jest elementem $\Gamma_{q,0}$:

$$\gamma = \text{Ph}(\gamma)q^{it_0}$$

dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}$. Z równości

$$|\gamma| = |q^{it_0}| = e^{-t_0 \text{Im } \rho^{-1}}$$

wnioskujemy, że $t_0 = -\frac{\log |\gamma|}{\text{Im } \rho^{-1}}$ i

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{Ph}(\gamma)q^{-i\frac{\log |\gamma|}{\text{Im } \rho^{-1}}} = \text{Ph}(\gamma) \exp \left\{ -i (\text{Re } \rho^{-1} + i \text{Im } \rho^{-1}) \frac{\log |\gamma|}{\text{Im } \rho^{-1}} \right\} \\ &= \text{Ph}(\gamma)|\gamma|^{1-i\frac{\text{Re } \rho^{-1}}{\text{Im } \rho^{-1}}} = \text{Ph}(\gamma)|\gamma|^{1+i\frac{\text{Re } \rho}{\text{Im } \rho}}, \end{aligned}$$

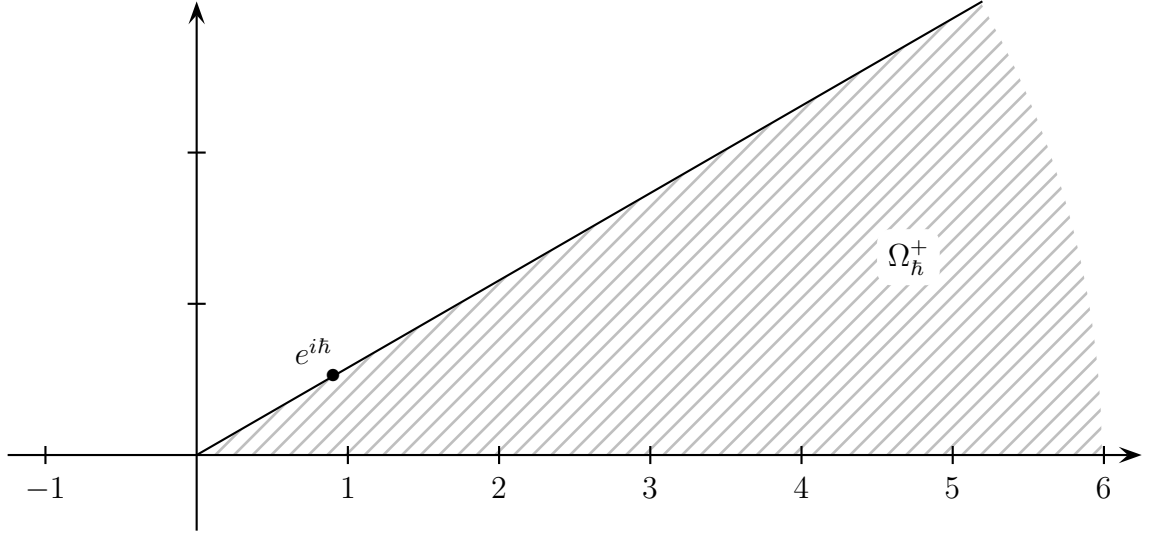
co w zestawieniu z założeniami o $\text{Im } \rho$ daje (5.39).

Q.E.D.

Uwaga 5.24 Funkcja Ph jest charakterem grupy Γ_q , a więc istnieje element $\gamma' \in \Gamma_q$ taki, że $\text{Ph}(\gamma) = \chi(\gamma, \gamma')$ dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$. Ponadto $\text{Ph}(\gamma)^N = 1$ dla każdego γ , co oznacza, że γ' jest elementem rzędu co najwyżej $|N|$. Z drugiej strony mamy $\text{Ph}(q) = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$, a zatem γ' jest elementem rzędu dokładnie $|N|$. W Γ_q istnieje tylko jeden taki element, mianowicie jedyna liczba o module 1 należąca do spirali $q\Gamma_{q,0}$. W konsekwencji otrzymujemy

$$\text{Ph}(\gamma) = \chi\left(\gamma, e^{-\frac{2\pi i}{N}}\right) \quad (5.40)$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$.

Rysunek 5.3: Obszar Ω_h^+

W pracy [30] dla parametru $-\pi < \hbar < \pi$ zdefiniowany został obszar

$$\Omega_h^+ = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \hbar \arg z \geq 0, |\arg z| \in [0, |\hbar|]\}.$$

Obszar ten dla $\hbar > 0$ przedstawiony jest na rysunku 5.3.

Ważną rolę odgrywa także przestrzeń

$$\mathcal{H}_h^+ = \left\{ f \in C(\Omega_h^+) : \begin{array}{l} f \text{ jest holomorficzna na wnętrzu } \Omega_h^+ \text{ oraz} \\ \text{dla dowolnego } \lambda > 0 \text{ funkcja } z \mapsto e^{-\lambda \ell(z)^2} f(z) \\ \text{jest ograniczona na } \Omega_h^+ \end{array} \right\},$$

gdzie $\ell(z)$ jest gałęzią główną logarytmu:

$$\ell(z) = \log |z| + i \arg z.$$

Uwaga 5.25 Z założeń o parametrze ρ wynika, że $-\pi < \operatorname{Im} \rho^{-1} < \pi$. Istotnie: mamy

$$2\pi^2 |\rho|^2 = 2\pi^2 \left[(\operatorname{Re} \rho)^2 + \left(\frac{N}{2\pi} \right)^2 \right] = 2\pi^2 (\operatorname{Re} \rho)^2 + \frac{N^2}{2} > |N|$$

(pamiętamy, że $\operatorname{Im} \rho = \frac{N}{2\pi}$, gdzie $N \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $\operatorname{Re} \rho \neq 0$). Stąd

$$|\operatorname{Im} \rho^{-1}| = \frac{|\operatorname{Im} \rho|}{|\rho|^2} = \frac{|N|}{2\pi |\rho|^2} < \pi.$$

Oznacza to, że $\operatorname{Im} \rho^{-1}$ może pełnić rolę parametru $\hbar$.

Lemat 5.26 Dla $k \in \{0, \dots, N-1\}$ oznaczmy przez f_k funkcję na $\mathbb{R}_+$ daną wzorem

$$f_k(r) = \mathbb{F}_q \left(e^{\frac{2\pi i k}{N}} r^{1 + \frac{2\pi i \operatorname{Re} \rho}{N}} \right).$$

Wówczas dla każdego $k \in \{0, \dots, N-1\}$ funkcja f_k rozszerza się do ciągłej funkcji na $\Omega_{\operatorname{Im} \rho^{-1}}^+$, która jest holomorficzna na wnętrzu $\Omega_{\operatorname{Im} \rho^{-1}}^+$. Oznaczając to rozszerzenie tym samym symbolem mamy $f_k \in \mathcal{H}_{\operatorname{Im} \rho^{-1}}^+$. Ponadto dla każdego $\tau \in]0, 1[$ funkcja $f_k^{-1} \in \mathcal{H}_{\tau \operatorname{Im} \rho^{-1}}^+$.

DOWÓD. Mamy

$$f_k(r) = \mathbb{F}_q(\gamma),$$

gdzie $\gamma = e^{\frac{2\pi i k}{N}} r^{1 + \frac{2\pi i \operatorname{Re} \rho}{N}}$. Łatwo sprawdzić, że $\gamma = q^k q^{it}$, gdzie

$$t = \frac{1}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} (k \operatorname{Re} (\rho^{-1}) - \log r).$$

Innymi słowy

$$f_k(r) = \mathbb{F}_q[\tilde{\gamma}] \left(-\frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} \right) \quad (5.41)$$

dla pewnego $\tilde{\gamma} \in \Gamma_q$.

Z punktu 2. twierdzenia 5.11 wiemy, że funkcja $\mathbb{F}_q[\tilde{\gamma}]$ ma przedłużenie holomorficzne na dolną półpłaszczyznę. Dalej, zauważmy, że argument z ma ten sam znak, co $\operatorname{Im} \rho^{-1}$, a co za tym idzie, gdy zmienna $z = r e^{i \arg z}$ przebiega zbiór $\overline{\Omega_{\operatorname{Im} \rho^{-1}}^+}$, zmienna

$$t = \frac{1}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} (k \operatorname{Re} (\rho^{-1}) - \log z) = \frac{1}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} (k \operatorname{Re} (\rho^{-1}) - \log r - \arg z)$$

przebiega pasek $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 0\}$ leżący w dolnej półpłaszczyźnie. Stąd funkcje $z \mapsto f_k(z)$ są ciągłe na $\overline{\Omega_{\operatorname{Im} \rho^{-1}}^+}$ i holomorficzne we wnętrzu tego zbioru.

Aby wykazać, że funkcje te należą do $\mathcal{H}_{\operatorname{Im} \rho^{-1}}^+$, musimy udowodnić, że dla dowolnego $\lambda > 0$ i każdego $k \in \{0, \dots, N-1\}$ funkcja

$$z \mapsto e^{-\lambda \ell(z)^2} f_k(z) \quad (5.42)$$

(gdzie $\ell(z) = \log |z| + i \arg z$) jest ograniczona. Jest to prostą konsekwencją wzoru (5.32). Istotnie: zgodnie z (5.41) mamy

$$f_k(r e^{i\varphi}) = \mathbb{F}_q[\tilde{\gamma}] \left(-\frac{\log r + i\varphi}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} \right),$$

a zatem, na mocy (5.32)

$$\begin{aligned} |f_k(r e^{i\varphi})| &= \Xi_{\tilde{\gamma}} \left(-\frac{\log r + i\varphi}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} \right) \left| q^{-1} \tilde{\gamma} q^{-i \frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}}} \right|^{\frac{\varphi}{\operatorname{Im} \rho^{-1}}} \\ &= \Xi_{\tilde{\gamma}} \left(-\frac{\log r + i\varphi}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} \right) \exp \left\{ \frac{\varphi}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} (\log |\tilde{\gamma}| - \operatorname{Re} \rho^{-1} + \log r) \right\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Zauważmy, że gdy $r \rightarrow +\infty$, mamy

$$-\frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} \longrightarrow \operatorname{Im}(\rho) \infty.$$

Korzystając z wniosku 5.18 widzimy, że funkcja (5.42) jest ograniczona.

Pamiętamy, że zgodnie z uwagą 5.14 funkcja $\mathbb{F}_q[\tilde{\gamma}]$ nie ma zer we wnętrzu paska $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Tak więc ze wzoru (5.43) wynika, że dla $0 < \tau < 1$, funkcja

$$\Omega_{\tau \operatorname{Im} \rho^{-1}}^+ \ni z \longmapsto (f_k(z))^{-1} e^{-\lambda \ell(z)} \in \mathbb{C}$$

jest ograniczona.

Q.E.D.

Lemat 5.27 *Niech $(f_k)_{k=0, \dots, N-1}$ będzie rodziną funkcji na $\Omega_{\operatorname{Im} \rho^{-1}}^+$ wprowadzoną w lemacie 5.26. Wówczas dla dowolnego $r > 0$ mamy*

$$f_k(e^{i \operatorname{Im} \rho^{-1}} r) = (1 + q^{-1} \gamma) \mathbb{F}_q(q^{-1} \gamma),$$

gdzie $\gamma = e^{\frac{2\pi i k}{N}} r^{1 + \frac{2\pi i \operatorname{Re} \rho}{N}}$.

DOWÓD. Wzór, który mamy udowodnić, jest po prostu innym zapisem wzoru (5.21). Mamy

$$f_k(r) = \mathbb{F}_q[\tilde{\gamma}] \left(-\frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} \right),$$

gdzie $\tilde{\gamma} = q^k q^{i \frac{\operatorname{Re} \rho^{-1}}{\operatorname{Im} \rho^{-1}}} = q^k q^{-i \frac{\operatorname{Re} \rho}{\operatorname{Im} \rho}}$. Stąd

$$\begin{aligned} f_k(re^{i \operatorname{Im} \rho^{-1}}) &= \mathbb{F}_q[\tilde{\gamma}] \left(-\frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}} - i \right) \\ &= \mathbb{F}_q \left[q^{-i \log r / \operatorname{Im} \rho^{-1}} \tilde{\gamma} \right] (-i) \\ &= \left(1 + q^{-1} q^{-i \frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}}} \tilde{\gamma} \right) \mathbb{F}_q \left[q^{-1} q^{-i \log r / \operatorname{Im} \rho^{-1}} \tilde{\gamma} \right] \quad (0) \\ &= \left(1 + q^{-1} q^{-i \frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}}} \tilde{\gamma} \right) \mathbb{F}_q \left(q^{-1} q^{-i \frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}}} \tilde{\gamma} \right). \end{aligned}$$

Dowód kończymy zauważając, że $q^{-i \frac{\log r}{\operatorname{Im} \rho^{-1}}} \tilde{\gamma} = \gamma$.

Q.E.D.

Lemat 5.28 *Niech $(f_k)_{k=0, \dots, N-1}$ będzie rodziną funkcji na $\Omega_{\operatorname{Im} \rho^{-1}}^+$ wprowadzoną w lemacie 5.26. Wówczas dla $k \in \{0, \dots, N-1\}$ mamy następujące zachowanie asymptotyczne funkcji f_k :*

$$|f_k(z)| = \Theta_k(z) |q^{-1} z|^{\frac{\arg z}{\operatorname{Im} \rho^{-1}}},$$

gdzie $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Theta_k(z) = 1$.

DOWÓD. Tak jak w dowodzie lematu 5.27, dla $z = re^{i\varphi} \in \Omega_{\text{Im } \rho^{-1}}^+$ mamy

$$f_k(re^{i\varphi}) = \mathbb{F}_q[\tilde{\gamma}] \left(-\frac{\log r}{\text{Im } \rho^{-1}} \right),$$

gdzie $\tilde{\gamma} = q^k q^{i \frac{\text{Re } \rho^{-1}}{\text{Im } \rho^{-1}}} = q^k q^{-i \frac{\text{Re } \rho}{\text{Im } \rho}}$. Korzystając ze wzoru (5.43) i oznaczając $\Theta_k(re^{i\varphi}) = \Xi_{\tilde{\gamma}} \left(-\frac{\log r + i\varphi}{\text{Im } \rho^{-1}} \right)$ otrzymujemy

$$|f_k(z)| = \Theta_k(z) \left| q^{-1} \tilde{\gamma} q^{-i \frac{\log r}{\text{Im } \rho^{-1}}} \right|^{\frac{\varphi}{\text{Im } \rho^{-1}}} = \Theta_k(z) \left| q^{-1} \tilde{\gamma} q^{-i \frac{\log r}{\text{Im } \rho^{-1}}} \right|^{\frac{\arg z}{\text{Im } \rho^{-1}}}.$$

Dalej, tak jak w lemacie 5.27, mamy $q^{-i \frac{\log r}{\text{Im } \rho^{-1}}} \tilde{\gamma} = e^{\frac{2\pi i k}{N}} r^{1 + \frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N}}$, a więc

$$\left| q^{-1} \tilde{\gamma} q^{-i \frac{\log r}{\text{Im } \rho^{-1}}} \right| = \left| e^{\frac{2\pi i k}{N}} r^{1 + \frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N}} \right| = |q^{-1}| r = |q^{-1} z|.$$

Q.E.D.

Rozdział 6

Relacje komutacyjne

6.1 Sformułowanie problemu

W niniejszym rozdziale zajmiemy się nadaniem ścisłego, analitycznego sensu algebraicznym relacjom

$$\begin{aligned} R^*R &= RR^*, & S^*S &= SS^*, \\ SR &= q^2RS, & SR^* &= R^*S. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Na razie możemy traktować R i S jako odwracalne elementy pewnej $*$ -algebry.

Terminem „analityczna realizacja relacji (6.1)” określać będziemy listę warunków, które nałożone na parę operatorów normalnych (R, S) działających w pewnej przestrzeni Hilberta H gwarantują, że złożenia $S \circ R$, $R \circ S$, $S \circ R^*$ i $R^* \circ S$ są domykalne oraz

$$SR = q^2RS, \quad SR^* = R^*S.$$

Z jednej strony chcielibyśmy, aby taka lista warunków była wystarczająco restryktywna, by zapewnić pewne dodatkowe własności (na przykład możliwość utworzenia sumy $R + S$, patrz podrozdziały 6.4 i 6.5). Z drugiej strony par spełniających te warunki powinno być dostatecznie dużo.

Rozważmy powyższe zagadnienie na poziomie formalnym. Przypuśćmy, że A i B są operatorami działającymi w przestrzeni Hilberta. Dalej załóżmy, że

$$\begin{aligned} (\text{Phase } B) |A| &= r_1 |A| (\text{Phase } B), \\ |B| (\text{Phase } A) &= r_2 (\text{Phase } A) |B|, \\ (\text{Phase } B) (\text{Phase } A) &= e^{i\varphi_1} (\text{Phase } A) (\text{Phase } B), \\ |B| |A| &= e^{i\varphi_2} |A| |B|, \end{aligned} \tag{6.2}$$

gdzie $r_1, r_2 > 0$ oraz $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$ (ostatnią relację (6.2) traktujemy na razie jedynie formalnie). Chcemy, aby A i B były operatorami normalnymi, a więc

$$\begin{aligned} (\text{Phase } A) |A| &= |A| (\text{Phase } A), \\ (\text{Phase } B) |B| &= |B| (\text{Phase } B). \end{aligned}$$

Przypuśćmy teraz, że para (A, B) spełnia (wciąż formalnie) warunki

$$\begin{aligned} AB &= q^2 BA, \\ AB^* &= B^* A. \end{aligned}$$

Wówczas prosty rachunek pokazuje, że

$$r_1 = r_2 = |q|, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad e^{i\varphi_1} = \text{Phase } q.$$

Pamiętając, że $\text{Phase } q = e^{i \text{Im } \rho^{-1}}$ widzimy, że powinniśmy rozważać relacje postaci

$$\begin{aligned} (\text{Phase } S) |R| &= |q| |R| (\text{Phase } S), \\ |S| (\text{Phase } R) &= |q| (\text{Phase } R) |S|, \\ (\text{Phase } S) (\text{Phase } R) &= e^{i \text{Im } \rho^{-1}} (\text{Phase } R) (\text{Phase } S), \\ |S|^{it} |R|^{it'} &= e^{-itt' \text{Im } \rho^{-1}} |R|^{it'} |S|^{it}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

przy czym ostatnią równość (6.3) traktujemy jako analityczne wyrażenie algebraicznej relacji

$$|S| |R| = (\text{Phase } q) |R| |S|$$

(patrz [33], [31]).

W dalszych częściach niniejszego rozdziału pokażemy, że warunki (6.3) stanowią analityczną realizację relacji (6.1). Wyróżnimy również klasę operatorów spełniającą (6.3) oraz mającą pewne ważne, dodatkowe własności.

6.2 Dziedzina operatorowa $\tilde{\mathcal{D}}$

Definicja dziedziny operatorowej jest ściśle związana z „mierzalnymi” i „zwartymi” dziedzinami, które są przedmiotem badań w pracy [10], oraz z W^* -kategoriami badanymi w [23] i [28]. Pod pojęciem dziedziny operatorowej $\mathcal{D}$ będziemy rozumieć przyporządkowanie każdej przestrzeni Hilberta H podzbioru $\mathcal{D}_H$ w zbiorze $\mathcal{C}(H)^k$ (gdzie $\mathcal{C}(H)$ oznacza zbiór wszystkich domkniętych operatorów działających w H , a $k \in \mathbb{N}$ jest ustalone) takie, że

1. dla każdego odwzorowania unitarnego $u: H \rightarrow K$ mamy

$$\left((a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{D}_H \right) \implies \left((ua_1u^*, \dots, ua_ku^*) \in \mathcal{D}_K \right),$$

2. dla dowolnego rozkładu $H = H_1 \oplus H_2$, $a_i = a_i^1 \oplus a_i^2$, $i = 1, \dots, k$ zachodzi równoważność

$$\left((a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{D}_H \right) \iff \left(\begin{array}{c} (a_1^j, \dots, a_k^j) \in \mathcal{D}_{H_j} \\ \text{dla } j = 1, 2 \end{array} \right).$$

W niniejszym podrozdziale zdefiniujemy pewną dziedzinę operatorową i wykazemy, że zadowala ona analityczną realizację relacji (6.1).

Definicja 6.1 Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech (R, S) będzie parą domkniętych operatorów działających w H . Dziedzinę operatorową $\tilde{\mathcal{D}}$ definiujemy następującą równowożnością:

$$\left((R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H \right) \iff \left(\begin{array}{l} R \text{ i } S \text{ są operatorami normalnymi,} \\ \ker R = \ker S = \{0\} \text{ oraz} \\ \text{para } (R, S) \text{ spełnia relacje (6.3)} \end{array} \right).$$

W dalszych rozważaniach przyda nam się także następująca definicja:

Definicja 6.2 ([17], Def. 2.6) Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną domykalnych operatorów działających w H . Podprzestrzeń $D \subset H$ nazywamy istotną dziedzina dla $\mathcal{T}$, jeśli

1. $D \subset D(T)$ dla wszystkich $T \in \mathcal{T}$,
2. dla każdego $x \in H$ istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów D taki, że $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ oraz

$$\left(\begin{array}{l} T \in \mathcal{T}, \\ x \in D(\overline{T}) \end{array} \right) \implies \left(Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{T}x \right).$$

Teraz możemy przytoczyć odpowiednio do naszych celów przeformułowane i nieznacznie uogólnione twierdzenie 2.7 z pracy [17].

Twierdzenie 6.3 Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $T_1, \dots, T_p$ będą normalnymi operatorami działającymi w H . Oznaczmy przez $\mathcal{T}$ rodzinę wszystkich złożań postaci

$$T_{i_1}^\# \circ \dots \circ T_{i_k}^\#,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$, a $T^\#$ oznacza T lub T^* . Załóżmy, że dla każdej pary wskaźników $i, j \in \{1, \dots, p\}$ spełniony jest jeden z następujących warunków:

1. T_i i T_j są mocno przemienne,
2. $(T_i, T_j) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$,
3. $(T_j, T_i) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$.

Wówczas wszystkie operatory z rodziny $\mathcal{T}$ są gęsto określone i domykalne. Ponadto istnieje istotna dziedzina dla $\mathcal{T}$.

Z twierdzenia 6.3 natychmiast wynika następujące

Twierdzenie 6.4 Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$. Wówczas złożenia $S \circ R$, $R \circ S$, $S \circ R^*$ i $R^* \circ S$ są gęsto określone i domykalne. Oznaczając przez SR , RS , SR^* i R^*S odpowiednie domknięcia mamy

$$SR = q^2 RS, \quad SR^* = R^*S. \quad (6.4)$$

DOWÓD. Stosujemy twierdzenie 6.3 z $p = 2$, $T_1 = R$ i $T_2 = S$. Niech D_0 będzie istotną dziedziną dla rodziny $\mathcal{T}$, tak jak w twierdzeniu 6.3. Jako że D_0 zawiera się w przecięciu $D(S \circ R) \cap D(R \circ S) \cap D(S \circ R^*) \cap D(R^* \circ S)$ z relacji (6.3) wynika, że

$$SRy = q^2RSy \quad \text{oraz} \quad SR^*y = R^*Sy$$

dla wszystkich $y \in D_0$. Niech $x \in D(SR)$ i niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów D_0 opisanym w definicji 6.2. Ponieważ $x_n \in D_0$ dla wszystkich n mamy $x_n \in D(RS)$ i

$$RSx_n = q^{-2}SRx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q^{-2}SRx.$$

Na mocy domkniętości operatora RS oznacza to, że $x \in D(SR)$ i $SRx = q^{-2}RSx$, a co za tym idzie $SR \subset q^2RS$. Tak samo pokazujemy, że $SR \supset q^2RS$ i otrzymujemy pierwszą z równości (6.4). Drugą dostajemy stosując analogiczne rozumowanie. Q.E.D.

6.3 Dziedzina operatorowa $\mathcal{D}$

Zdefiniujemy teraz najważniejszą dla nas dziedzinę operatorową, która posłuży do konstrukcji deformacji grupy „ $az + b$ ”. Podzbiór $\bar{\Gamma}_q \subset \mathbb{C}$ został opisany w podrozdziale 5.2, a funkcja specjalna χ w podrozdziale 5.3.

Definicja 6.5 Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech (R, S) będzie parą domkniętych operatorów działających w H . Powiemy, że $(R, S) \in \mathcal{D}_H$, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\left(\begin{array}{l} R \text{ i } S \text{ są operatorami normalnymi,} \\ \ker R = \ker S = \{0\}, \\ \operatorname{Sp} R, \operatorname{Sp} S \subset \bar{\Gamma}_q \text{ oraz} \\ \chi(S, \gamma)\chi(R, \gamma') = \chi(\gamma, \gamma')\chi(R, \gamma')\chi(S, \gamma) \\ \text{dla wszystkich } \gamma, \gamma' \in \Gamma_q. \end{array} \right)$$

Uwaga 6.6 Przyporządkowanie $H \mapsto \mathcal{D}_H$ opisane w definicji 6.5 jest dziedziną operatorową.

Uwaga 6.7 Przez analogię do postaci Weyla kanonicznych reguł komutacyjnych w mechanice kwantowej, równanie

$$\chi(S, \gamma)\chi(R, \gamma') = \chi(\gamma, \gamma')\chi(R, \gamma')\chi(S, \gamma) \tag{6.5}$$

będziemy nazywać *relacją Weyla*.

Podamy teraz przykład pary (R, S) spełniającej warunki z definicji 6.5.

Przykład 6.8 Niech $H = L^2(\Gamma_q)$, przy czym na Γ_q rozważamy miarę Haara daną przez (5.5). Na H mamy prawą regularną reprezentację grupy Γ_q , tj. mocno ciągłą rodzinę $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_q}$ operatorów unitarnych w H taką, że

$$(U_\gamma f)(\gamma') = f(\gamma'\gamma)$$

dla wszystkich $f \in H$, $\gamma \in \Gamma_q$ i prawie wszystkich $\gamma' \in \Gamma_q$. W tej sytuacji twierdzenie SNAG ([14, Ch. VI, Thm. 29]) zapewnia istnienie miary spektralnej E na $\widehat{\Gamma}_q = \Gamma_q$ takiej, że

$$U_\gamma = \int_{\Gamma_q} \chi(\gamma, \gamma') dE(\gamma'). \quad (6.6)$$

Niech

$$S = \int_{\Gamma_q} \gamma dE(\gamma) \quad (6.7)$$

i niech R będzie operatorem mnożenia przez funkcję identycznościową:

$$(Rf)(\gamma) = \gamma f(\gamma)$$

dla wszystkich $f \in H$ i prawie wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$. Jest jasne, że R i S są gęsto określonymi, domkniętymi i normalnymi operatorami na H . Aby wykazać, że $(R, S) \in \mathcal{D}_H$ musimy jeszcze sprawdzić relację Weyla. Weźmy $f \in H$. Korzystając z faktu, że $\chi(S, \gamma) = U_\gamma$ (por. (6.6) i (6.7)) obliczamy

$$\begin{aligned} (\chi(S, \gamma)\chi(R, \gamma')f)(\gamma'') &= (\chi(R, \gamma')f)(\gamma\gamma'') \\ &= \chi(\gamma\gamma'', \gamma')f(\gamma\gamma'') \\ &= \chi(\gamma, \gamma')\chi(\gamma'', \gamma')f(\gamma\gamma'') \\ &= \chi(\gamma, \gamma')\chi(\gamma'', \gamma')(\chi(S, \gamma)f)(\gamma'') \\ &= \chi(\gamma, \gamma')(\chi(R, \gamma')\chi(S, \gamma)f)(\gamma'') \end{aligned}$$

dla wszystkich $\gamma, \gamma' \in \Gamma_q$ i prawie wszystkich $\gamma'' \in \Gamma_q$. Tym samym wykazaliśmy, że $(R, S) \in \mathcal{D}_H$.

Na podstawie analogii z reprezentacją reguł komutacyjnych dla operatorów pędu i położenia w mechanice kwantowej będziemy nazywać parę operatorów skonstruowaną w przykładzie 6.8 *parą Schrödingera*.

Ze sławnego twierdzenia Mackey'a-Stone'a-von Neumanna ([14], Ch. VIII, Thm. 4) wynika następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 6.9 Niech K będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \mathcal{D}_K$. Wówczas para (R, S) jest unitarnie równoważna sumie prostej pewnej rodziny par Schrödingera.

Uwaga 6.10 Opisana w przykładzie 6.8 para Schrödingera jest nieprzywiedlna, w tym sensie, że zbiór $\{\chi(S, \gamma)\chi(R, \gamma') : \gamma, \gamma' \in \Gamma_q\} \subset B(L^2(\Gamma_q))$ jest nieprzywiedlnym zbiorem operatorów. Stwierdzenie 6.9 pokazuje, że każda nieprzywiedlna para $(R, S) \in \mathcal{D}_K$ jest unitarnie równoważna parze Schrödingera.

Stwierdzenie 6.11 *Dziedzina operatorowa $\mathcal{D}$ zawiera się w dziedzinie operatorowej $\tilde{\mathcal{D}}$, tzn. dla każdej przestrzeni Hilberta H mamy $\mathcal{D}_H \subset \tilde{\mathcal{D}}_H$.*

DOWÓD. Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \mathcal{D}_H$. Podstawiając w relacji Weyla (6.5) kolejno $(\gamma, \gamma') = (q, q^{it})$, $(\gamma, \gamma') = (q^{it}, q)$, $(\gamma, \gamma') = (q, q)$ i $(\gamma, \gamma') = (q^{it}, q^{it'})$ i korzystając ze wzorów (5.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\text{Phase } S) |R|^{it} &= |q|^{it} |R|^{it} (\text{Phase } S), \\ |S|^{it} (\text{Phase } R) &= |q|^{it} (\text{Phase } R) |S|^{it}, \\ (\text{Phase } S) (\text{Phase } R) &= e^{i \text{Im } \rho^{-1}} (\text{Phase } R) (\text{Phase } S), \\ |S|^{it} |R|^{it'} &= e^{-itt' \text{Im } \rho^{-1}} |R|^{it'} |S|^{it} \end{aligned}$$

dla wszystkich $t, t' \in \mathbb{R}$. Na podstawie elementarnych wyników teorii analitycznych generatorów jedoparametrowych grup ([7]) możemy dokonać przedłużenia analitycznego w dwóch pierwszych równaniach do punktu $t = -i$. Otrzymujemy wówczas relacje (6.3), co dowodzi, że $(R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$. Q.E.D.

Uwaga 6.12 Niech $(R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$. Z ostatniej z relacji (6.3) wynika, że wyrażenie

$$V_t = e^{i \frac{t^2}{2} \text{Im } \rho^{-1}} |S|^{it} |R|^{it} = e^{-i \frac{t^2}{2} \text{Im } \rho^{-1}} |R|^{it} |S|^{it}$$

definiuje mocno ciąglą jedoparametrową grupę operatorów unitarnych na H . Używając metod przedstawionych w [30, Example 3.1] można udowodnić, że $e^{-\frac{i}{2} \text{Im } \rho^{-1}} |S| |R| = e^{\frac{i}{2} \text{Im } \rho^{-1}} |R| |S|$ jest analitycznym generatorem $(V_t)_{t \in \mathbb{R}}$. W szczególności $e^{\frac{i}{2} \text{Im } \rho^{-1}} |R| |S|$ jest operatorem dodatnim i samosprężonym.

Stwierdzenie 6.13 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \mathcal{D}_H$. Wówczas*

1. *dla każdego $\gamma \in \Gamma_q$ mamy*

$$\alpha(\gamma)\chi(R, \gamma)\chi(S, \gamma) = \alpha(R)^*\chi(S, \gamma)\alpha(R) = \alpha(S)\chi(R, \gamma)\alpha(S)^*, \quad (6.8)$$

2. *mają miejsce następujące równości*

$$qRS = \alpha(R)^* S \alpha(R) = \alpha(S) R \alpha(S)^*;$$

w szczególności RS jest operatorem normalnym i $\text{Sp } RS \subset \bar{\Gamma}_q$,

3. dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_q$

$$\chi(q^{-1}SR, \gamma) = \alpha(\gamma)\chi(R, \gamma)\chi(S, \gamma). \quad (6.9)$$

DOWÓD. **Ad 1.** Z relacji Weyla (6.5) i faktu, że χ jest bicharakterem, wynikają wzory

$$\begin{aligned} \chi(S, \gamma)\chi(R, \gamma')\chi(S, \gamma)^* &= \chi(\gamma R, \gamma'), \\ \chi(R, \gamma)^*\chi(S, \gamma')\chi(R, \gamma) &= \chi(\gamma S, \gamma'). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Wstawiając $\gamma = q$ w (6.10) i korzystając z własności (5.9) funkcji χ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \chi(S, \gamma) (\text{Phase } R) \chi(S, \gamma)^* &= (\text{Phase } \gamma) R, \\ \chi(R, \gamma)^* (\text{Phase } S) S \chi(R, \gamma) &= (\text{Phase } \gamma) S. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Podobnie kładąc $\gamma' = q^{it}$ w równaniach (6.10) i dokonując przedłużenia holomorficznego do $t = -i$, dostaniemy

$$\begin{aligned} \chi(S, \gamma)|R|\chi(S, \gamma)^* &= |\gamma||R|, \\ \chi(R, \gamma)^*|S|\chi(R, \gamma) &= |\gamma||S|. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Pomnóżmy teraz stronami odpowiednie równania z (6.11) i (6.12). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \chi(S, \gamma)R\chi(S, \gamma)^* &= \gamma R, \\ \chi(R, \gamma)^*S\chi(R, \gamma) &= \gamma S. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Teraz możemy zaaplikować funkcję α do obu stron obu równań (6.13).

$$\begin{aligned} \chi(S, \gamma)\alpha(R)\chi(S, \gamma)^* &= \alpha(\gamma R), \\ \chi(R, \gamma)^*\alpha(S)\chi(R, \gamma) &= \alpha(\gamma S), \end{aligned}$$

co można przepisać jako

$$\begin{aligned} \chi(S, \gamma)\alpha(R) &= \alpha(\gamma R)\chi(S, \gamma), \\ \alpha(S)\chi(R, \gamma) &= \chi(R, \gamma)\alpha(\gamma S). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Teraz mnożymy obie strony pierwszego z równań (6.14) z lewej przez $\alpha(R)^*$, a obie strony drugiego równania z prawej przez $\alpha(S)^*$:

$$\begin{aligned} \alpha(R)^*\chi(S, \gamma)\alpha(R) &= \alpha(R)^*\alpha(\gamma R)\chi(S, \gamma), \\ \alpha(S)\chi(R, \gamma)\alpha(S)^* &= \chi(R, \gamma)\alpha(S)^*\alpha(\gamma S). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Pamiętając, że $\alpha(\gamma)\overline{\alpha(\gamma)} = 1$ dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$ możemy przepisać (6.15) jako

$$\begin{aligned} \alpha(R)^*\chi(S, \gamma)\alpha(R) &= \alpha(\gamma)(\alpha(\gamma R)\alpha(\gamma)^*\alpha(R)^*)\chi(S, \gamma), \\ \alpha(S)\chi(R, \gamma)\alpha(S)^* &= \alpha(\gamma)\chi(R, \gamma)(\alpha(\gamma S)\alpha(\gamma)^*\alpha(S)^*). \end{aligned}$$

Teraz na mocy (5.10) otrzymujemy (6.8).

Ad 2. Kładąc $\gamma = q^{it}$ w równaniu (6.8), otrzymujemy

$$e^{-i\frac{t^2}{2}\text{Im}\rho^{-1}}|R|^{it}|S|^{it} = \alpha(R)^*|S|^{it}\alpha(R) = \alpha(S)|R|^{it}\alpha(S)^*. \quad (6.16)$$

Ponieważ lewa strona (6.16) pokrywa się z V_t (patrz uwaga 6.12), widzimy że

$$e^{\frac{i}{2}\text{Im}\rho^{-1}}|R||S| = \alpha(R)^*|S|\alpha(R) = \alpha(S)|R|\alpha(S)^*. \quad (6.17)$$

Podobnie wstawiając $\gamma = q$ w (6.8), znajdujemy

$$e^{\frac{i}{2}\text{Im}\rho^{-1}}(\text{Phase } R)(\text{Phase } S) = \alpha(R)^*(\text{Phase } S)\alpha(R) = \alpha(S)(\text{Phase } R)\alpha(S)^*. \quad (6.18)$$

Dalej zauważmy, że dla $y \in D_0$ mamy

$$(\text{Phase } R)(\text{Phase } S)|R||S|y = |q|(\text{Phase } R)|R|(\text{Phase } S)|S|y = |q|RSy,$$

co pokazuje, że

$$(\text{Phase } R)(\text{Phase } S)|R||S| = |q|(\text{Phase } R)|R|(\text{Phase } S)|S| = |q|RS.$$

Jeśli teraz pomnożymy stronami równania (6.17) i (6.18), dostaniemy

$$\alpha(R)^*S\alpha(R) = \alpha(S)R\alpha(S)^* = |q|e^{i\text{Im}\rho^{-1}}RS = qRS.$$

Ad 3. Zgodnie z uwagą 6.12, operator $e^{\frac{i}{2}\text{Im}\rho^{-1}}|R||S|$ jest dodatni i samosprężony. Możemy zatem znaleźć rozkład biegunowy operatora $q^{-1}SR$:

$$\begin{aligned} q^{-1}SR &= qRS = e^{i\text{Im}\rho^{-1}}|q|(\text{Phase } R)|R|(\text{Phase } S)|S| \\ &= e^{i\text{Im}\rho^{-1}}|q|(\text{Phase } R)|q|^{-1}(\text{Phase } S)|R||S| \\ &= \left(e^{\frac{i}{2}\text{Im}\rho^{-1}}(\text{Phase } R)(\text{Phase } S)\right)\left(e^{\frac{i}{2}\text{Im}\rho^{-1}}|R||S|\right). \end{aligned}$$

Przystępujemy teraz do dowodu wzoru (6.9). Niech $\gamma = q^n q^{it}$.

$$\begin{aligned} \chi(q^{-1}SR, \gamma) &= (\text{Phase } q^{-1}SR)^n |q^{-1}SR|^{it} \\ &= e^{\frac{i}{2}n\text{Im}\rho^{-1}}[(\text{Phase } R)(\text{Phase } S)]^n e^{-i\frac{t^2}{2}\text{Im}\rho^{-1}}|R|^{it}|S|^{it}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystaliśmy fakt, że znamy grupę unitarną, której analitycznym generatorem jest $|q^{-1}SR|$. W końcu korzystając z relacji (6.3) przekształcamy:

$$\begin{aligned} \chi(q^{-1}SR, \gamma) &= e^{\frac{i}{2}n\text{Im}\rho^{-1}} e^{\frac{i}{2}\frac{n(n-1)}{2}\text{Im}\rho^{-1}} e^{-i\frac{t^2}{2}\text{Im}\rho^{-1}} (\text{Phase } R)^n (\text{Phase } S)^n |R|^{it}|S|^{it} \\ &= e^{\frac{i}{2}(n^2-t^2)\text{Im}\rho^{-1}} e^{int\text{Re}\rho^{-1}} (\text{Phase } R)^n |R|^{it} (\text{Phase } S)^n |S|^{it} \\ &= \alpha(q^n q^{it})\chi(R, q^n q^{it})\chi(S, q^n q^{it}) = \alpha(\gamma)\chi(R, \gamma)\chi(S, \gamma). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Stwierdzenie 6.13 pozwala na tworzenie nowych par operatorów spełniających warunki z definicji 6.5.

Twierdzenie 6.14 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \mathcal{D}_H$. Wówczas*

$$(S^{-1}, R), (R, SR), (RS, S) \in \mathcal{D}_H$$

oraz dla dowolnych $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_q$

$$(\gamma_1 R, \gamma_2 S) \in \mathcal{D}_H.$$

DOWÓD. Zaczniemy od ostatniego wzoru. Mnożąc obie strony relacji Weyla (6.5) przez $\chi(\gamma_2, \gamma)\chi(\gamma_1, \gamma')$ i korzystając z własności (5.7) funkcji χ , otrzymujemy

$$\chi(\gamma_2 S, \gamma)\chi(\gamma_1 R, \gamma') = \chi(\gamma, \gamma')\chi(\gamma_1 R, \gamma')\chi(\gamma_2 S, \gamma),$$

co na mocy definicji 6.5 oznacza, że $(\gamma_1 R, \gamma_2 S) \in \mathcal{D}_H$.

Teraz zastosujemy sprzężenie do obu stron (6.5). Dzięki oczywistym związkom

$$\begin{aligned}\chi(S, y)^* &= \chi(S^{-1}, \gamma), \\ \chi(R, \gamma')^* &= \chi(R, \gamma'^{-1})\end{aligned}$$

widzimy, że

$$\chi(R, \gamma'^{-1})\chi(S^{-1}, \gamma) = \chi(\gamma'^{-1}, \gamma)\chi(S^{-1}, \gamma)\chi(R, \gamma'^{-1}).$$

Tym samym $(S^{-1}, R) \in \mathcal{D}_H$.

Wróćmy do pary $(R, S) \in \mathcal{D}_H$. Jeśli zastosujemy do obu operatorów transformacje $m \mapsto \alpha(R)^* m \alpha(R)$ oraz $m \mapsto \alpha(S) m \alpha(S)^*$, to na mocy punktu 2. pary $(R, qRS), (qRS, S)$ są unitarnie równoważne (R, S) . Stąd $(R, qRS), (qRS, S) \in \mathcal{D}_H$. Możemy teraz skorzystać z pierwszego udowodnionego wzoru i faktu, że $SR = q^2 RS$, które pokazują, że $(R, SR), (RS, S) \in \mathcal{D}_H$. Q.E.D.

6.4 Równości operatorowe w $\mathcal{D}$

Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \mathcal{D}_H$. Przy pomocy funkcji $\text{Ph}: \Gamma_q \rightarrow S^1$ możemy utworzyć operatory unitarne $\text{Ph } R$ i $\text{Ph } S$ (patrz podrozdział 5.5). Ponieważ $\text{Ph}(\gamma)^N = 1$ dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_q$, mamy

$$(\text{Ph } S)^N = I = (\text{Ph } R)^N.$$

Korzystając ze wzoru (5.40) i relacji Weyla (6.5), wyprowadzamy relacje:

$$\begin{aligned}(\text{Ph } S) |R| &= |R| (\text{Ph } S), \\ |S| (\text{Ph } R) &= (\text{Ph } R) |S|, \\ (\text{Ph } S) (\text{Ph } R) &= e^{\frac{2\pi i}{N}} (\text{Ph } R) (\text{Ph } S), \\ |S|^{it} |R|^{it'} &= e^{-itt' \text{Im } \rho^{-1}} |R|^{it'} |S|^{it}\end{aligned} \tag{6.19}$$

dla dowolnych $t, t' \in \mathbb{R}$. Ponadto z tożsamości (5.39) wynika, że

$$\begin{aligned}R &= (\text{Ph } R) |R|^{1 + \frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N}}, \\ S &= (\text{Ph } S) |S|^{1 + \frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N}}.\end{aligned} \tag{6.20}$$

Uwaga 6.15 Połóżmy $A = (\text{Ph } R) |R|^{\rho|}$ oraz $B = (\text{Ph } S) |S|^{\rho|}$. Wówczas para operatorów (A, B) spełnia relacje komutacyjne badane w pracy [31, Sect. 2], to znaczy

$$\begin{aligned} (\text{Phase } B) |A| &= |A| (\text{Phase } B), \\ |B| (\text{Phase } A) &= (\text{Phase } A) |B|, \\ (\text{Phase } B) (\text{Phase } A) &= e^{\frac{2\pi i}{N}} (\text{Phase } A) (\text{Phase } B), \\ |B|^{it} |A|^{it'} &= e^{-tt' \frac{2\pi i}{N}} |A|^{it'} |B|^{it}, \end{aligned}$$

a dzięki temu, że $(\text{Phase } A)^N = (\text{Phase } B)^N = I$, para (A, B) spełnia także warunki spektralne opisane w pracy [31].

Wniosek 6.16 Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \mathcal{D}_H$. Wtedy istnieje jednoparametrowa grupa $(\mathcal{R}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ indeksowana mnożymylną grupą $\mathbb{R}_+$, operatorów unitarnych na H taka, że

$$\begin{aligned} (\text{Ph } R) \mathcal{R}_t &= \mathcal{R}_t (\text{Ph } R), & (\text{Ph } S) \mathcal{R}_t &= \mathcal{R}_t (\text{Ph } S), \\ \mathcal{R}_t |R| \mathcal{R}_t^* &= |R|^t, & \mathcal{R}_t^* |S| \mathcal{R}_t &= |S|^t \end{aligned} \quad (6.21)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$.

DOWÓD. Niech (A, B) będzie parą operatorów rozważaną w uwadze 6.15. Na mocy [31, Proposition 2.3] istnieje jednoparametrowa grupa operatorów unitarnych $(\mathcal{R}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ taka, że

$$\begin{aligned} (\text{Phase } A) \mathcal{R}_t &= \mathcal{R}_t (\text{Phase } A), & (\text{Phase } B) \mathcal{R}_t &= \mathcal{R}_t (\text{Phase } B), \\ \mathcal{R}_t |A| \mathcal{R}_t^* &= |A|^t, & \mathcal{R}_t^* |B| \mathcal{R}_t &= |B|^t \end{aligned} \quad (6.22)$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$. Pierwsze linijki (6.22) i (6.21) są identyczne, natomiast z drugiej linii (6.22) przechodzimy do odpowiadających jej wzorów dla (R, S) stosując funkcję $\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto r^{|\rho|^{-1}} \in \mathbb{R}_+$ do odpowiednich operatorów dodatnich. Q.E.D.

Uwaga 6.17 W następnym twierdzeniu zajmujemy się domknięciem operatora $S + R \circ S$, gdzie $(R, S) \in \mathcal{D}_H$ dla pewnej przestrzeni Hilberta H . Okazuje się, że domknięcie to jest równe domknięciu operatora $S + RS$. Istotnie: niech $x \in D(S) \cap D(RS)$ i niech D_0 będzie podprzestrzenią H skonstruowaną w twierdzeniu 6.4 (na mocy stwierdzenia 6.11 twierdzenie 6.4 można stosować do pary $(R, S) \in \mathcal{D}_H$). Istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów D_0 taki, że

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} x, \\ Sx_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} Sx, \\ RSx_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} RSx. \end{aligned}$$

Zatem ciąg $((S + R \circ S)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny i w konsekwencji x należy do dziedziny domknięcia operatora $S + R \circ S$. Ponadto

$$\overline{(S + R \circ S)} x = \lim_{n \rightarrow \infty} (S + R \circ S)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n + RSx_n = Sx + RSx = \overline{(S + RS)} x.$$

Zauważmy, że $D(S) \cap D(RS)$ jest istotną dziedziną dla $\overline{S + RS}$, a więc

$$\overline{S + RS} \subset \overline{S + R \circ S}.$$

Z drugiej strony oczywista inkluzja $S + R \circ S \subset S + RS$ prowadzi do

$$\overline{S + RS} \supset \overline{S + R \circ S}.$$

W dalszym ciągu będziemy oznaczać domknięcie sumy operatorów znakiem „ $\dot{+}$ ”:

$$\overline{S + R \circ S} = \overline{S + RS} = S \dot{+} RS.$$

Twierdzenie 6.18 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \mathcal{D}_H$. Wówczas suma $S + R \circ S$ jest gęsto określonym i domykalnym operatorem, a jego domknięcie*

$$S \dot{+} RS = \mathbb{F}_q(R)^* S \mathbb{F}_q(R). \quad (6.23)$$

W szczególności $S \dot{+} RS$ jest operatorem normalnym i $\text{Sp}(S \dot{+} RS) \subset \overline{\Gamma}_q$.

DOWÓD. Jak już zauważyliśmy w uwadze 6.17, $S + R \circ S$ jest operatorem gęsto zdefiniowanym (D_0 zawiera się w jego dziedzinie). Nietrudno jest także wykazać, że jest on domykalny: istotnie, wystarczy wykazać, że operator sprzężony do $S + R \circ S$ jest gęsto zdefiniowany. Oczywiście $(S + R \circ S)^* \supset S^* + S^* \circ R^*$, a D_0 zawiera się w dziedzinie tego ostatniego operatora. Dla dowodu reszty twierdzenia użyjemy metod rozwiniętych w pracy [31].

Na początek wykażemy, że $S \dot{+} RS \subset \mathbb{F}_q(R)^* S \mathbb{F}_q(R)$. Niech $H_k = H \left(\text{Ph}(R) = e^{\frac{2\pi i k}{N}} I \right)$ (patrz podrozdział 2.2). Oczywiście mamy

$$H = \bigoplus_{k=1}^{N-1} H_k. \quad (6.24)$$

Z drugiego równania (6.19) wynika, że $|S|$ zachowuje rozkład (6.24). Możemy zatem rozważać każdy składnik prosty oddzielnie.

Zauważmy, że przyjmując $\hbar = \text{Im } \boldsymbol{\rho}^{-1}$ mamy

$$|R| \dashv \! \! \dashv |S|,$$

gdzie symbolem „ $\dashv \! \! \dashv$ ” oznaczyliśmy *relację Zakrzewskiego* (patrz [33]). Podobnie dla dowolnego $\tau \in]0, 1[$ zachodzi

$$|R| \dashv \! \! \dashv |S|^\tau \quad \text{przy} \quad \hbar = \tau \text{Im } \boldsymbol{\rho}^{-1}. \quad (6.25)$$

Na mocy twierdzenia 3.1 (2) z [30], na każdej z podprzestrzeni H_k mamy

$$f_k \left(e^{i \text{Im } \boldsymbol{\rho}^{-1}} |R| \right) |S| \subset |S| f_k(|R|),$$

co w świetle lematu 5.27 oznacza, że

$$\left(1 + q^{-1}e^{\frac{2\pi i}{N}}|R|^{1+\frac{2\pi i \operatorname{Re} \rho}{N}}\right) \mathbb{F}_q \left(q^{-1}e^{\frac{2\pi i}{N}}|R|^{1+\frac{2\pi i \operatorname{Re} \rho}{N}}\right) |S| \subset |S| \mathbb{F}_q \left(q^{-1}e^{\frac{2\pi i}{N}}|R|^{1+\frac{2\pi i \operatorname{Re} \rho}{N}}\right).$$

Korzystając z relacji (6.20) i biorąc sumę prostą po k otrzymujemy

$$(1 + q^{-1}R) \mathbb{F}_q(q^{-1}R)|S| \subset |S| \mathbb{F}_q(R)$$

co można przepisać jako

$$|S| + q^{-1}R \circ |S| \subset \mathbb{F}_q(q^{-1}R)^* |S| \mathbb{F}_q(R). \quad (6.26)$$

Wreszcie mnożąc obie strony (6.26) z lewej przez $\operatorname{Phase} S$, wykorzystując relacje (6.3) i biorąc domknięcie obu stron dostaniemy

$$S \dot{+} RS \subset \mathbb{F}_q(R)^* S \mathbb{F}_q(R).$$

Aby udowodnić inkluzję w drugą stronę, wystarczy wykazać, że $D(S + R \circ S)$ jest istotną dziedziną dla $\mathbb{F}_q(R)^* S \mathbb{F}_q(R)$. W tym celu użyjemy grupy operatorów regularyzujących wprowadzonej we wniosku 6.16.

Lemat 5.26, relacja (6.25) i twierdzenie 3.1 (3) z pracy [31] mówią nam, że dla dowolnego $\tau \in]0, 1[$

$$f_k \left(e^{i\tau \operatorname{Im} \rho^{-1}} |R| \right) |S|^\tau = |S|^\tau f_k(|R|) \quad (6.27)$$

na H_k . Niech $x \in D(\mathbb{F}_q(R)^* S \mathbb{F}_q(R)) = D(|S| \mathbb{F}_q(R))$. Dla $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ niech $x_k = \chi \left(\operatorname{Ph} R = e^{\frac{2\pi i k}{N}} I \right) x$. Oczywiście dla dowolnego $\tau \in]0, 1[$ mamy $\mathbb{F}_q(R)x \in D(|S|^\tau)$. Nietrudno także dowieść, że $\mathbb{F}_q(R)x_k \in D(|S|^\tau)$ dla wszystkich $\tau \in]0, 1[$ i $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Ale na H_k mamy $\mathbb{F}_q(R)y = f_k(|R|)y$. Oznacza to, że

$$f_k(|R|)x_k \in D(|S|^\tau), \quad (6.28)$$

przy k i τ takich jak wyżej.

Z (6.28) i (6.27) wynika

$$x_k \in D \left(f_k \left(e^{i\tau \operatorname{Im} \rho^{-1}} |R| \right) |S|^\tau \right),$$

a dzięki (6.21) dostajemy

$$\mathcal{R}_\tau x_k \in D \left(f_k \left(e^{i\tau \operatorname{Im} \rho^{-1}} |R|^{\tau^{-1}} \right) |S| \right). \quad (6.29)$$

Przy ustalonym $\tau \in]0, 1[$ funkcja $\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto \left| f_k \left(e^{i\tau \operatorname{Im} \rho^{-1}} r^{\tau^{-1}} \right) \right|$ jest oddzielona od 0 i zachowuje się asymptotycznie jak r (patrz lematy 5.28 i 5.26). Zatem z (6.29) wynika, że $|S| \mathcal{R}_\tau x_k \in D(R)$. Ta ostatnia podprzestrzeń jest niezmiennicza dla $\operatorname{Phase} S$, a więc

$$S \mathcal{R}_\tau x_k \in D(R).$$

Biorąc sumę prostą po k otrzymujemy

$$\mathcal{R}_\tau x \in D(S), \quad S\mathcal{R}_\tau x \in D(R)$$

dla dowolnego $\tau \in]0, 1[$. Oznacza to, że

$$\mathcal{R}_\tau x \in D(S + R \circ S). \quad (6.30)$$

Ponadto mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q(R)^* S\mathbb{F}_q(R) \mathcal{R}_\tau x &= \mathbb{F}_q \left((\text{Ph } R) |R|^{1+\frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N}} \right)^* S\mathbb{F}_q \left((\text{Ph } R) |R|^{1+\frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N}} \right) \mathcal{R}_\tau x \\ &= \mathcal{R}_\tau \mathbb{F}_q \left((\text{Ph } R) |R|^{\tau-1(1+\frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N})} \right)^* (\text{Ph } S) |S|^{\tau(1+\frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N})} \\ &\quad \times \mathbb{F}_q \left((\text{Ph } R) |R|^{\tau-1(1+\frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N})} \right) x. \end{aligned}$$

W połączeniu z mocną ciągłością grupy $(\mathcal{R}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ daje to następujące zbieżności:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\tau x &\xrightarrow[\tau \nearrow 1]{} x, \\ \mathbb{F}_q(R)^* S\mathbb{F}_q(R) \mathcal{R}_\tau x &\xrightarrow[\tau \nearrow 1]{} \mathbb{F}_q(R)^* S\mathbb{F}_q(R) x. \end{aligned}$$

Teraz z (6.30) wnioskujemy, że $D(S + R \circ S)$ jest istotną dziedziną dla $\mathbb{F}_q(R)^* S\mathbb{F}_q(R)$, co chcieliśmy udowodnić. Q.E.D.

Twierdzenie 6.19 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \mathcal{D}_H$. Wówczas*

1. *Operator $S + R$ jest gęsto określony i domykalny. Mamy*

$$S \dot{+} R = \mathbb{F}_q(RS^{-1})^* S\mathbb{F}_q(RS^{-1}), \quad (6.31)$$

oraz

$$S \dot{+} R = \mathbb{F}_q(R^{-1}S)R\mathbb{F}_q(R^{-1}S)^*. \quad (6.32)$$

W szczególności $S \dot{+} R$ jest operatorem normalnym i $\text{Sp}(S \dot{+} R) \subset \overline{\Gamma}_q$.

2. *Funkcja $\mathbb{F}_q$ ma własność eksponencjalną:*

$$\mathbb{F}_q(S \dot{+} R) = \mathbb{F}_q(R)\mathbb{F}_q(S). \quad (6.33)$$

DOWÓD. **Ad 1.** Na mocy twierdzenia 6.14 para $(S^{-1}, R) \in \mathcal{D}_H$, a więc (na podstawie tego samego twierdzenia) do $\mathcal{D}_H$ należą również pary (R^{-1}, S^{-1}) , (S, R^{-1}) , $(S, R^{-1}S)$, $((R^{-1}S)^{-1}, S) = (S^{-1}R, S)$ i wreszcie $(q^2 S^{-1}R, S) = (RS^{-1}, S)$. Możemy teraz zastosować twierdzenie 6.18 do tej pary i otrzymamy (6.31).

Dla dowodu (6.32) obserwujemy, że dzięki twierdzeniu 5.16 mamy

$$\mathbb{F}_q(\gamma) = C_q \alpha(q^{-1}\gamma) \overline{\mathbb{F}_q(q^2\gamma^{-1})}$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$. Zatem

$$\mathbb{F}_q(RS^{-1}) = C_q \alpha(q^{-1}RS^{-1}) \mathbb{F}_q(q^2SR^{-1})^*. \quad (6.34)$$

ponadto para $(q^{-1}RS^{-1}, S)$ należy do $\mathcal{D}_H$, więc na mocy punktu 2. twierdzenia 6.13

$$\alpha(q^{-1}RS^{-1})^* S \alpha(q^{-1}RS^{-1}) = R. \quad (6.35)$$

Wstawiając (6.34) do (6.31) i używając (6.35) otrzymujemy (6.32).

Ad 2. Oznaczmy $T = R^{-1}S$. Używając kilkakrotnie twierdzenia 6.14 łatwo sprawdzić, że jeśli $(R, S) \in \mathcal{D}_H$, to $(R, T), (S, T) \in \mathcal{D}_H$.

Dalej, stosując transformację $m \mapsto \mathbb{F}_q(R^{-1}S)m\mathbb{F}_q(R^{-1}S)^*$ do pary (R, T) otrzymujemy $(S \dot{+} R, T) \in \mathcal{D}_H$, na mocy (6.32). Ponowne użycie twierdzenia 6.14 daje teraz $((S \dot{+} R)T, T) \in \mathcal{D}_H$. Wstawiając tę ostatnią parę w miejsce (R, S) we wzorze (6.31) dostaniemy

$$\mathbb{F}_q(S \dot{+} R)^* T \mathbb{F}_q(S \dot{+} R) = T \dot{+} (S \dot{+} R)T, \quad (6.36)$$

natomiast dzięki temu, że $(R, T), (S, T) \in \mathcal{D}_H$, a S jest mocno przemienny z RT , mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q(S)^* \mathbb{F}_q(R)^* T \mathbb{F}_q(R) \mathbb{F}_q(S) &= \mathbb{F}_q(S)^* (T \dot{+} RT) \mathbb{F}_q(S) \\ &= \mathbb{F}_q(S)^* T \mathbb{F}_q(S) \dot{+} RT = (T \dot{+} ST) \dot{+} RT. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Zauważmy także, że T jest mocno przemienny z $RS^{-1} = q^2T^{-1}$, oraz że $(RS^{-1}, ST) \in \mathcal{D}_H$ (jako, że $(S, T) \in \mathcal{D}_H$ implikuje, że $(ST, T) \in \mathcal{D}_H$, a stąd $(RS^{-1}, ST) = (T^{-1}, ST) \in \mathcal{D}_H$). Zatem, na mocy (6.31) i (6.23),

$$\begin{aligned} (S \dot{+} R)T &= \mathbb{F}_q(RS^{-1})^* S \mathbb{F}_q(RS^{-1})T \\ &= \mathbb{F}_q(RS^{-1})^* ST \mathbb{F}_q(RS^{-1}) \\ &= \overline{ST + RS^{-1} \circ ST} = ST \dot{+} RT. \end{aligned} \quad (6.38)$$

W świetle równania (6.38), prawa strona (6.36) jest równa $T \dot{+} (ST \dot{+} RT)$. Ponadto operatory po prawych stronach (6.36) i (6.37) pokrywają się na podprzestrzeni $D(T) \cap D(ST) \cap D(RT)$. Wykażemy, że

$$D(T) \cap D(ST) \cap D(RT) \text{ jest istotną dziedziną dla } T \dot{+} (S \dot{+} R)T. \quad (6.39)$$

Z (6.39) wynika, że $T \dot{+} (S \dot{+} R)T \subset (T \dot{+} ST) \dot{+} RT$, a jako że oba te operatory są normalne widzimy, że $T \dot{+} (S \dot{+} R)T = (T \dot{+} ST) \dot{+} RT$. W takim razie, ze wzorów (6.36) oraz (6.37) wynika, że operator $\mathbb{F}_q(R)\mathbb{F}_q(S)\mathbb{F}_q(S \dot{+} R)^*$ jest przemienny z T , a co za tym idzie jest on również przemienny z $|T|^{it}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{F}_q(R)\mathbb{F}_q(S)\mathbb{F}_q(S \dot{+} R)^* = |T|^{it} \mathbb{F}_q(R)\mathbb{F}_q(S)\mathbb{F}_q(S \dot{+} R)^* |T|^{-it}.$$

Z drugiej strony, skoro $(R, T), (S, T)$ oraz $((S \dot{+} R), T)$ należą do D_H , mamy (patrz (6.3))

$$\begin{aligned} |T|^{it} R |T|^{-it} &= q^{it} R, \\ |T|^{it} S |T|^{-it} &= q^{it} S, \\ |T|^{it} (S \dot{+} R) |T|^{-it} &= q^{it} (S \dot{+} R). \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\mathbb{F}_q(R)\mathbb{F}_q(S)\mathbb{F}_q(S \dot{+} R)^* = \mathbb{F}_q(q^{it}R)\mathbb{F}_q(q^{it}S)\mathbb{F}_q(q^{it}(S \dot{+} R))^* \quad (6.40)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Teraz gdy $t \rightarrow \text{Im}(\rho) \infty$, prawa strona 6.40 dąży mocno do I , natomiast lewa strona nie zależy od t . Stąd wnioskujemy, że ma miejsce własność (6.33).

Wróćmy do (6.39). Na początek wykażemy, że

$$D(T^2) \cap D((S \dot{+} R)T) \text{ jest istotną dziedziną dla } T \dot{+} (S \dot{+} R)T. \quad (6.41)$$

Zauważmy, że $|T| \rightarrow |S \dot{+} R|$ jeśli przyjmiemy $\hbar = -\text{Im} \rho^{-1}$. Teraz dla $\tau > 0$ zdefiniujmy funkcję $f_\tau: \Omega_{-\text{Im} \rho^{-1}}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$f_\tau(z) = \begin{cases} e^{-\tau(\log z)^2} & \text{dla } z \neq 0, \\ 0 & \text{dla } z = 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzamy, że f_τ jest ciągłą i ograniczoną funkcją na $\overline{\Omega_{-\text{Im} \rho^{-1}}^+}$, holomorficzną na $\Omega_{-\text{Im} \rho^{-1}}^+$. Ponadto przy $\tau \rightarrow 0$ funkcje f_τ zbiegają niemal jednostajnie na $\Omega_{-\text{Im} \rho^{-1}}^+$ do funkcji stałej, równej 1. Na mocy twierdzenia 3.1 (2) z pracy [30] mamy

$$f_\tau(e^{-i \text{Im} \rho^{-1}}|T|)|S \dot{+} R| \subset |S \dot{+} R|f_\tau(|T|),$$

a zatem

$$f_\tau(e^{-i \text{Im} \rho^{-1}}|T|)|S \dot{+} R|T \subset |S \dot{+} R|Tf_\tau(|T|).$$

Po pomnożeniu obu stron tej relacji z lewej przez $\text{Phase}(S \dot{+} R)$ i skorzystaniu z (6.3) (z parą $(S \dot{+} R, T)$ w miejsce (R, S)), otrzymujemy

$$f_\tau(q^{-1}|T|)(S \dot{+} R)T \subset (S \dot{+} R)Tf_\tau(|T|).$$

W szczególności dla każdego $x \in D((S \dot{+} R)T)$, zachodzi $f_\tau(|T|x) \in D((S \dot{+} R)T)$. Dalej, ponieważ funkcja $z \mapsto |z|^2 f_\tau(|z|)$ jest ograniczona, wektor $x \in D(T^2)$. Teraz ze względu na wspomnianą niemal jednostajną zbieżność rodziny funkcji $(f_\tau)_{\tau>0}$, mamy $f_\tau(|T|x) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} x$ w topologii wykresu $T \dot{+} (S \dot{+} R)T$. Istotnie:

$$\begin{aligned} (T \dot{+} (S \dot{+} R)T)f_\tau(|T|x) &= Tf_\tau(|T|x) + (S \dot{+} R)Tf_\tau(|T|x) \\ &= f_\tau(|T|)Tx + f_\tau(q^{-1}|T|)(S \dot{+} R)Tx \end{aligned}$$

i prawa strona zbiega do $Tx + (S \dot{+} R)Tx = (T \dot{+} (S \dot{+} R)T)x$. Tym samym udowodniliśmy (6.41).

Skorzystamy teraz z wniosku 6.16 dla pary (RS^{-1}, ST) , która jak już wcześniej argumentowaliśmy, należy do $\mathcal{D}_H$. Istnieje zatem jednoparametrowa grupa operatorów unitarnych $(\mathcal{R}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ na H taka, że

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t|RS^{-1}|\mathcal{R}_t^* &= |RS^{-1}|^t, \\ \mathcal{R}_t^*|ST|\mathcal{R}_t &= |ST|^t \end{aligned} \quad (6.42)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$. Weźmy $x \in D(ST \dot{+} RT) = D(\overline{ST + RS^{-1} \circ ST})$. Tak samo jak w dowodzie twierdzenia 6.18, można pokazać, że $\mathcal{R}_t x \in D(ST) \cap D(RT)$ oraz $\mathcal{R}_t x$ zbiega do x w topologii wykresu operatora $ST \dot{+} RT$, gdy $t \rightarrow 1$.

Z relacji $RS^{-1} = q^2 T^{-1}$ i pierwszego z równań (6.42) widzimy, że

$$\mathcal{R}_t^* |T| \mathcal{R}_t = |T|^{t^{-1}} \quad (6.43)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$. Załóżmy teraz, że $\frac{1}{2} \leq t < 1$, oraz że $x \in D(T^2)$. Skoro $t^{-1} \leq 2$, mamy $x \in D(|T|^{t^{-1}})$, a zatem, na mocy (6.43), $\mathcal{R}_t x \in D(T)$. Jeśli przepisujemy (6.43) jako

$$|T| \mathcal{R}_t x = \mathcal{R}_t |T|^{t^{-1}} x,$$

zobaczymy, że $\mathcal{R}_t x \xrightarrow[t \nearrow 1]{} x$ w topologii wykresu T .

Wykazaliśmy, że jeśli $x \in D(T^2) \cap D((S \dot{+} R)T)$, to przy $\frac{1}{2} \leq t < 1$ mamy $\mathcal{R}_t x \in D(T) \cap D(ST) \cap D(RT)$ oraz $\mathcal{R}_t x \xrightarrow[t \nearrow 1]{} x$ w topologiach wykresów T i $ST \dot{+} RT$. Stąd $\mathcal{R}_t x$ zbiega do x w topologii wykresu $T \dot{+} (ST \dot{+} RT) = T \dot{+} (S \dot{+} R)T$. Oznacza to, że (6.39) wynika z udowodnionego już (6.41). Q.E.D.

6.5 Wyróżnienie dziedziny $\mathcal{D}$

W niniejszym podrozdziale zajmiemy się badaniem opisanych w podrozdziałach 6.2 i 6.3 dziedzin operatorowych i związku między nimi. Pierwszy wynik dotyczący tych zagadnień zawarty jest w stwierdzeniu 6.11. Naszym obecnym celem będzie udowodnienie twierdzenia 6.28, które precyzuje relację między dziedzinami operatorowymi $\tilde{\mathcal{D}}$ i $\mathcal{D}$. Twierdzenia tego typu pojawiły się w literaturze po raz pierwszy w pracy [25]. Ponieważ wyniki te są niewielką tylko modyfikacją przedstawionych w [25, Sect. 2] i [24, Sect. 3], zamieszczone poniżej dowody będą kładły nacisk na idee leżące u podstaw tych zagadnień, nie wdając się zbyt głęboko w kwestie techniczne.

Twierdzenie 6.4 mówi, że dla dowolnej przestrzeni Hilberta pary $(R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$ stanowią analityczną realizację relacji (6.1). Z kolei punkt 1. twierdzenia 6.19 mówi, że jeśli $(R, S) \in \mathcal{D}_H$, to możemy utworzyć sumę $R + S$, która jest operatorem domykającym, a jego domknięcie jest operatorem normalnym. Okazuje się, że własność ta w dużej mierze charakteryzuje pary z dziedziny operatorowej $\mathcal{D}$. Zauważmy, że ponieważ para (R, S) jest unitarnie równoważna parze (R, qRS) (punkt 2. stwierdzenia 6.13), możemy równie dobrze za punkt odniesienia przyjąć tezę twierdzenia 6.18.

Stwierdzenie 6.20 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$. Wówczas widma operatorów R i S są sumami orbit naturalnego działania grupy Γ_q na $\mathbb{C}$.*

DOWÓD. Z relacji (6.3) wynika, że:

$$\begin{aligned} (\text{Phase } S) R (\text{Phase } S)^* &= qR, & |S|^{it} R |S|^{-it} &= q^{it} R, \\ (\text{Phase } R)^* S (\text{Phase } R) &= qS, & |R|^{-it} S |R|^{it} &= q^{it} S. \end{aligned}$$

Tak więc jeśli punkt γ należy do widma operatora R , to cała orbita $\Gamma_q \gamma$ zawiera się w $\text{Sp } R$. Podobnie rzecz się ma z operatorem S . Pozostaje zauważyć, że widma operatorów normalnych zawsze mają niepuste przecięcie z $\mathbb{C}$.¹ Q.E.D.

Stwierdzenie 6.21 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$. Załóżmy, że para (R, S) jest nieprzywiedlna (patrz uwaga 6.10). Wówczas istnieją niezerowe liczby zespolone λ_1, λ_2 takie, że*

$$\begin{aligned}\text{Sp } R &= \lambda_1 \overline{\Gamma}_q, \\ \text{Sp } S &= \lambda_2 \overline{\Gamma}_q.\end{aligned}$$

DOWÓD. Problem jest symetryczny względem zamiany R i S , więc możemy prowadzić rozumowanie przy założeniu, że widmo operatora R jest sumą $\{0\}$ i więcej niż jednej orbity postaci $z\Gamma_q$, gdzie $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Możemy rozłożyć $\text{Sp } R$ na sumę Γ_q -niezmienniczych zbiorów

$$\text{Sp } R = A_1 \cup \{0\} \cup A_2$$

Dla $i = 1, 2$ niech $\chi(R \in A_i)$ będzie rzutem spektralnym R na podzbiór A_i (patrz podrozdział 2.2). Rzuty te są oczywiście przemienne z R , ale także

$$\begin{aligned}(\text{Phase } S) \chi(R \in A_i) (\text{Phase } S)^* &= \chi((\text{Phase } S) R (\text{Phase } S)^* \in A_i) \\ &= \chi(qR \in A_i) = \chi(R \in q^{-1}A_i) = \chi(R \in A_i),\end{aligned}$$

gdyż podzbiory A_i są Γ_q -niezmiennicze. Tak samo pokazujemy, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$|S|^{it} \chi(R \in A_i) |S|^{-it} = \chi(R \in A_i).$$

Rzuty spektralne $\chi(R \in A_i)$ są niezerowe (jeśli oba byłyby równe 0, to operator R byłby równy 0), a więc w szczególności, para (R, S) nie jest nieprzywiedlna, gdyż istnieją niezerowe rzuty przemienne zarówno z R jak i z S (por. [14, Ch. V]). Q.E.D.

Ponieważ pomnożenie obu operatorów R i S przez niezerowy czynnik nie zmienia istotnych dla nas własności sumy $S + RS$, w dalszej analizie będziemy zakładać, że $\text{Sp } S = \overline{\Gamma}_q$. Ustalmy przestrzeń Hilberta H i nieprzywiedlną parę $(R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$ i przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{aligned}Q_0 &= S + RS, \\ Q &= \overline{Q_0}, \\ Q' &= (Q^*|_{D(Q)})^*.\end{aligned}$$

Zauważmy, że definicja operatora Q' ma sens, tj. $D(Q) \subset D(Q^*)$. Istotnie: jeśli $(R, S) \in \mathcal{D}_H$, to Q jest normalny (twierdzenie 6.18) i $D(Q) = D(Q^*)$. Jeśli zaś para (R, S) nie należy do $\mathcal{D}_H$, to na mocy stwierdzenia 6.25 (poniżej) mamy $D(Q) = D(|S|) \cap D(|RS|)$, a

$$D(|S|) \cap D(|RS|) = D(|S|) \cap D(|SR|) = D(S^* + (RS)^*) \subset D(Q^*).$$

¹Stosujemy konwencję, według której widmem operatora nieograniczonego jest dopełnienie zbioru rezolwentowego w $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Uwaga 6.22 Operator Q_0 jest domykalny na mocy argumentu podanego w dowodzie twierdzenia 6.18. Z uwagi 6.17 wynika, że domknięcie $S + R \circ S$ jest równe domknięciu $S + RS$. Oba te fakty były wcześniej wykorzystywane jedynie dla par $(R, S) \in \mathcal{D}_H$, ale są prawdziwe dla $(R, S) \in \widetilde{\mathcal{D}}_H$, ponieważ opierają się na twierdzeniu 6.3.

Uwaga 6.23 Jak już wspomnieliśmy, nieprzywiedlną parę $(R, S) \in \widetilde{\mathcal{D}}_H$ można pomnożyć przez niezerową liczbę zespoloną (a nawet wystarczy rzeczywista lub liczba o module 1) tak, aby $\text{Sp } S = \overline{\Gamma}_q$. W świetle definicji 6.5 i stwierdzenia 6.10 oznacza to, że para taka jest równoważna parze powstałej z pary Schrödingera przez pomnożenie operatora R przez niezerową liczbę.

Uwaga 6.24 Para Schrödingera działa w przestrzeni $L^2(\Gamma_q)$ i możemy opisać funkcje należące do dziedziny operatorów R i S w terminach ich własności analitycznych. Ponieważ R i S są normalne, $D(R) = D(|R|)$ oraz $D(S) = D(|S|)$. Funkcja g należy do $D(|R|)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\gamma \mapsto |\gamma|g(\gamma)$ jest całkowalna z kwadratem. Korzystając z tego, że grupa $(|S|^{it})_{t \in \mathbb{R}}$ jest równoważna grupie translacji na $L^2(\mathbb{R})$ oraz z twierdzeń [7, Thm. 6.1] i twierdzenia Paleya-Wienera w wersji podanej w [9, Sect. 7.1] można wykazać, że funkcja f należy do dziedziny $|S|$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla $n = 0, 1, \dots, N-1$ istnieje funkcja $\tilde{f}_n$ zdefiniowana na pasku $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \text{Im } z \leq 0\}$, holomorficzna we wnętrzu tego paska, taka, że dla $\tau \in [0, 1]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \tilde{f}_n(t - i\tau) \right|^2 dt < \text{const.}$$

oraz funkcje $t \mapsto \tilde{f}_n(t - i\tau)$ zbiegają w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$ do $t \mapsto f(q^n q^{it})$, gdy $\tau \searrow 0$, a do funkcji $t \mapsto \tilde{f}_n(t - i)$, gdy $\tau \nearrow 1$. Mówimy, że funkcja f posiada własność przedłużenia holomorficznego (patrz [25, Sect. 1]).

Stwierdzenie 6.25 *Jeśli $\text{Sp } R \neq \overline{\Gamma}_q$, to operator Q_0 jest domknięty (a zatem $Q_0 = Q$) i nie jest normalny.*

DOWÓD. Korzystamy z uwagi 6.23. Możemy utożsamić przestrzeń H z $L^2(\Gamma_q)$, a operator S z operatorem opisanym w przykładzie 6.8. Wiemy, że istnieje liczba $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ taka, że $\text{Sp } R = \lambda \overline{\Gamma}_q$. Przy powyższym utożsamieniu

$$(Rf)(\gamma) = \lambda \gamma f(\gamma) \tag{6.44}$$

dla $f \in L^2(\Gamma_q)$.

Ponieważ $\text{Sp } R \neq \overline{\Gamma}_q$, mamy $\lambda \notin \Gamma_q$, a co za tym idzie istnieje stała $c > 0$ taka, że $|1 + \lambda\gamma| \geq c$ dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$. Stąd

$$\|(I + R)f\| \geq c\|f\|$$

dla wszystkich $f \in D(R)$. Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów $D(Q_0) = D(S) \cap D(RS)$ zbieżnym do pewnego $f_\infty \in L^2(\Gamma_q)$ takim, że ciąg $(Q_0 f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do pewnej funkcji $g \in L^2(\overline{\Gamma}_q)$. Korzystając z twierdzenia 6.3 możemy wybrać ciąg $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$\begin{aligned} f_n - f'_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ Sf_n - Sf'_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ RSf_n - RSf'_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Istotnie: wystarczy wziąć odpowiedni ciąg $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ z istotnej dziedziny dla rodziny wszystkich złożań operatorów R i S .

Ponieważ dla każdego n wektor $f'_n \in D(R \circ S)$, mamy

$$\|Sf'_n - Sf'_m\| \leq c^{-1} \|Q_0 f'_n - Q_0 f'_m\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0.$$

Z domkniętości operatora S wnioskujemy więc, że $f_\infty \in D(S)$ i

$$Sf_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} Sf'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Sf_n.$$

Skoro tak, to ciąg $(RSf'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ także jest zbieżny, gdyż

$$RSf'_n = Q_0 f'_n - Sf'_n.$$

Dlatego $f_\infty \in D(RS)$ i

$$RSf_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} RSf'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} RSf_n.$$

Wykazaliśmy więc, że $f_\infty \in D(S) \cap D(RS) = D(Q_0)$ oraz, że

$$Q_0 f_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (S + RS)f'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 f_n = g.$$

Oznacza to, że operator Q_0 jest domknięty.

Przejdźmy teraz do badania normalności operatora Q_0 . Wiemy, że

$$Q_0^* = (S + RS)^* \supset S^* + (RS)^* = S^* + S^* R^* \supset S^* + S^* \circ R^* = S^* \circ (I + R)^*$$

(w drugiej równości skorzystaliśmy z faktu, że $(RS)^* = S^* R^*$, którego dowodzi się tak samo jak związków (6.4) wyprowadzonych w twierdzeniu 6.4).

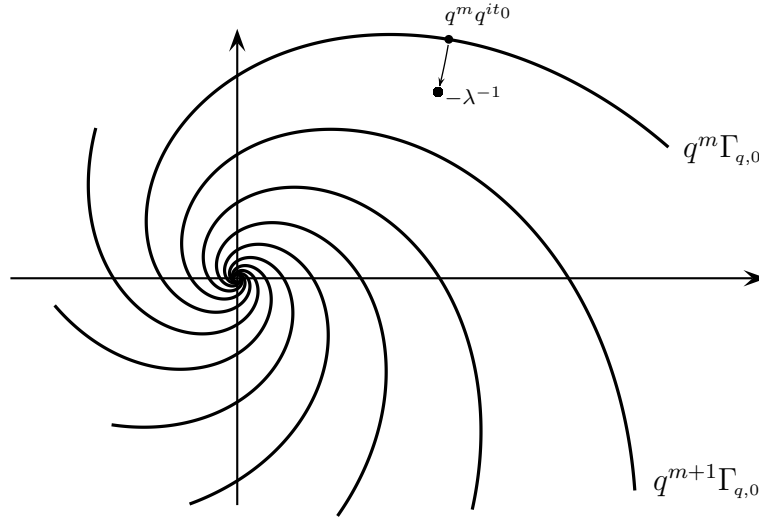
Dziedzina operatora S^* jest równa $D(|S|)$, a więc do dziedziny $S^* \circ (I + R)^*$ należą te funkcje f z $L^2(\Gamma_q)$, dla których funkcja

$$\Gamma_q \ni \gamma \longmapsto (1 + \overline{\lambda \gamma})f(\gamma)$$

jest całkowalna z kwadratem i należy do dziedziny operatora $|S|$.

Aby wykazać, że $D(Q_0^*)$ jest ściśle większa niż $D(Q_0)$ ustalmy m oraz $t_0 \in \mathbb{R}$ takie, że istnieje $\tau \in]0, 1[$ takie, że

$$-\lambda^{-1} = q^m q^{i(t_0 - i\tau)}$$



Rysunek 6.1: Dobór parametrów m i t_0 dla liczby λ . Strzałką zaznaczono początkowy fragment trajektorii $[0, 1] \ni \tau \mapsto q^m q^{it_0} q^\tau$.

(patrz rysunek 6.1). Zdefiniujmy funkcję $f \in L^2(\Gamma_q)$ kładąc $f(q^k q^{it}) = 0$ dla $k \neq m$ oraz

$$f(q^m q^{it}) = e^{-t^2} \frac{1}{1 + \overline{\lambda q^m q^{it}}}.$$

Pamiętając o opisie dziedziny operatora S podanym w uwadze 6.24, nietrudno sprawdzić, że funkcja f należy do $D(S^* \circ (I + R)^*) \subset D(Q_0^*)$, gdyż funkcja

$$\gamma \mapsto ((I + R)^* f)(\gamma) = (1 + \overline{\lambda \gamma}) f(\gamma)$$

należy do $D(S^*) = D(|S|)$.

Z drugiej strony skonstruowana wyżej funkcja f nie należy do $D(Q_0)$, ponieważ, jak wykazaliśmy w pierwszej części dowodu, $D(Q_0) = D(S) \cap D(RS) \subset D(|S|)$. Jest jasne, że f nie należy do $D(|S|)$, jako że odpowiednie przedłużenie istnieje (por. uwaga 5.4), ale nie jest holomorficzne — ma biegun pierwszego rzędu w punkcie $t = t_0 - i\tau$. Q.E.D.

Stwierdzenie 6.26 *Dziedzinę operatora Q opisuje następująca relacja*

$$D(Q) = D(Q^*) \cap D(Q'). \quad (6.45)$$

DOWÓD. Jeśli $(R, S) \in \mathcal{D}_H$, to na mocy twierdzenia 6.18, Q jest operatorem normalnym i $Q' = Q$. W szczególności zachodzi równość (6.45). Możemy zatem założyć, że $\text{Sp } R = \lambda \overline{\Gamma}_q$, gdzie $\lambda \notin \overline{\Gamma}_q$.

Jak już wykazaliśmy w stwierdzeniu 6.25, operator $S + RS$ jest domknięty na dziedzinie $D(S) \cap D(RS)$. Aby pogłębić analizę tego operatora wykażemy, że

$$D(S) \cap D(RS) = D(R \circ S).$$

Istotnie: niech D_0 będzie istotną dziedziną dla rodziny wszystkich złożów operatorów R, S, R^* i S^* . Dla $f \in D(S) \cap D(RS)$ istnieje ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów D_0 taki, że

$$\begin{aligned} f_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \\ Sf_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} Sf, \\ RSf_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} RSf. \end{aligned}$$

W szczególności ciąg $(Sf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów $D(R)$ takim, że ciąg $(R(Sf_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. W konsekwencji $Sf \in D(R)$, czyli $f \in D(R \circ S)$.

Wnioskujemy więc, że $Q = S + R \circ S = (I + R) \circ S$. Teraz przejdziemy do analizy operatora Q^* . Najprostszym sposobem wykazania, że $Q^* = S^*(I + R)^*$ będzie odwołanie się do wyników pracy [30]. Rozłożmy przestrzeń Hilberta H na sumę prostą podprzestrzeni własnych operatora $(\text{Ph } R)$ (patrz podrozdział 6.4). Na każdej z tych podprzestrzeni mamy

$$(I + R) \circ S = (\text{Phase } S) g_k(e^{i\hbar}|R|) \circ |S|,$$

gdzie $\hbar = \text{Im } \rho^{-1}$, a

$$g_k(r) = 1 + q^{-1} e^{\frac{2\pi i k}{N} - \text{Re } \rho^{-1}} r^{1 + \frac{2\pi i \text{Re } \rho}{N}}$$

(por. (6.20)). Teraz możemy zastosować punkt (2) twierdzenia 3.1 z pracy [30] i krótki rachunek daje

$$Q^* = S^*(I + R)^*.$$

Stosując podobne rozumowanie można wykazać, że

$$Q' = S(I + q^{-2}R). \quad (6.46)$$

Istotnie: $Q' = (Q^*|_{D_0})^*$, jako, że D_0 jest istotną dziedziną dla Q . Dalej ponieważ na D_0 można swobodnie zamieniać kolejność stosowania operatorów R i S , mamy

$$Q^*|_{D_0} = S^*(I + R)^*|_{D_0} = (I + q^{-2}R)^*S^*|_{D_0}$$

i stosując taką samą procedurę znajdowania operatora sprzężonego jak przedstawiona powyżej dla Q , otrzymujemy (6.46).

Rozumowanie zaprezentowane w dowodzie stwierdzenia 6.25 pokazuje, że operator $S^* + S^*R^*$ jest domknięty. Dalej tak jak w przypadku operatora Q można udowodnić, że $S^* + S^*R^* = S^* \circ (I + R)^*$ oraz $S + q^{-2}SR = S \circ (I + q^{-2}R)$. W szczególności dziedziną Q^* jest zbiór tych funkcji z $L^2(\Gamma_q)$, które pomnożone przez $\gamma \mapsto (1 + \overline{\lambda}\overline{\gamma})$ są całkowalne z kwadratem i mają własność przedłużenia holomorficznego, a dziedzinę Q' stanowią te funkcje z $L^2(\Gamma_q)$, które pomnożone przez $\gamma \mapsto (1 + \lambda q^{-2}\gamma)$ są całkowalne z kwadratem i mają własność przedłużenia holomorficznego.

Innymi słowy dziedziny operatorów Q^* i Q' różnią się tym, w jakim punkcie zeruje się funkcja, przez którą mnożymy ich elementy przed przedłużeniem holomorficznym. Oznacza to, że funkcje należące do tych dziedzin muszą posiadać własność przedłużenia meromorficznego z co najwyżej jednym biegunem i po przedłużeniu muszą być całkowalne

z kwadratem pomnożone przez $\gamma \mapsto (1 + |\gamma|)$. Bieguny te mogą pojawić się w jednym miejscu dla funkcji z dziedziny Q^* , a w innym dla funkcji z dziedziny Q' . W szczególności przedłużenia funkcji z części wspólnej tych dziedzin nie mogą mieć osobliwości.

Częścią wspólną tych dziedzin jest zatem zbiór funkcji, które posiadają własność przedłużenia holomorficznego i są całkowalne z kwadratem po pomnożeniu przez $\gamma \mapsto (1 + |\gamma|)$. Jest to dokładnie dziedzina operatora Q . Q.E.D.

Wniosek 6.27 *Niech $\tilde{Q}$ będzie rozszerzeniem normalnym operatora Q . Wówczas $\tilde{Q} = Q$.*

DOWÓD. Mamy $\tilde{Q}^* \subset Q^*$, a ponieważ $D(\tilde{Q}^*) = D(\tilde{Q}) \supset D(Q)$,

$$Q^*|_{D(Q)} \subset \tilde{Q}.$$

Stąd

$$\tilde{Q} \subset (Q^*|_{D(Q)})^* = Q',$$

a co za tym idzie

$$D(\tilde{Q}) \subset D(Q'). \tag{6.47}$$

Teraz skoro $D(\tilde{Q}) = D(\tilde{Q}^*) \subset D(Q^*)$, na mocy (6.47) i (6.45) otrzymujemy

$$D(\tilde{Q}) \subset D(Q).$$

Jako, że $\tilde{Q}$ jest rozszerzeniem Q , oznacza to, że $\tilde{Q} = Q$. Q.E.D.

Teraz możemy podsumować stwierdzenia 6.26, 6.25 i wniosek 6.27 w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6.28 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech para $(R, S) \in \tilde{\mathcal{D}}_H$ będzie nieprzywiedlna i znormalizowana tak, że $\text{Sp } S = \overline{\Gamma}_q$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *operator $R + S$ posiada normalne rozszerzenie,*
2. *operator $R \dot{+} S$ jest normalny,*
3. *$(R, S) \in \mathcal{D}_H$.*

DOWÓD. Tak samo jak w dowodzie punktu 1. twierdzenia 6.19 możemy podstawić parę $(S_0, R_0) = (RS^{-1}, S)$ we wniosku 6.27 i otrzymamy implikację 1. $\Rightarrow$ 2. Wynikanie w przeciwną stronę jest oczywiste. Dalej z punktu 1. twierdzenia 6.19 wynika, że 3. pociąga za sobą 2. Z kolei stwierdzenie 6.25 mówi, że 1. $\Rightarrow$ 2. Ponieważ 1. i 2. są równoważne, otrzymujemy równoważność wszystkich trzech warunków. Q.E.D.

Rozdział 7

Nowe deformacje grupy „ $az + b$ ”

Konstrukcję deformacji grupy „ $az + b$ ” dla nowych wartości parametru deformacji q rozpoczniemy od zdefiniowania dziedziny operatorowej pełniącej rolę przestrzeni grupy.

Definicja 7.1 Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech (a, b) będzie parą domkniętych operatorów działających w H . Dziedzinę operatorową $\mathcal{G}$ definiujemy następującą równoważnością:

$$\left((a, b) \in \mathcal{G}_H \right) \iff \left(\begin{array}{l} \text{operatory } a \text{ i } b \text{ są normalne,} \\ \text{Sp } a, \text{Sp } b \subset \overline{\Gamma}_q, \text{ ker } a = \{0\}, \\ (\text{Phase } a) b (\text{Phase } a)^* = qb \\ \text{oraz } |a|^{it} b |a|^{-it} = q^{it} b \\ \text{dla wszystkich } t \in \mathbb{R} \end{array} \right). \quad (7.1)$$

Uwaga 7.2 Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(a, b) \in \mathcal{G}_H$. Wówczas operator a zachowuje rozkład przestrzeni H na sumę prostą $H = \ker b \oplus (\ker b)^\perp$. Oznacza to, że możemy rozłożyć parę (a, b) na sumę prostą par $(a_0, 0)$ i (a_1, b_1) , przy czym $(a_0, 0)$ działa w przestrzeni $\ker b$, a (a_1, b_1) działa w $(\ker b)^\perp$. Pisząc $H_0 = \ker b$ oraz $H_1 = (\ker b)^\perp$ i korzystając z definicji 6.5 i z elementów dowodu stwierdzenia 6.11 otrzymujemy

$$\left((a, b) \in \mathcal{G}_H \right) \iff \left(\begin{array}{l} H = H_0 \oplus H_1, \\ a = a_0 \oplus a_1, \quad b = 0 \oplus b_1, \\ \text{Sp } a_2 \subset \overline{\Gamma}_q, \quad \text{ker } a_2 = \{0\}, \\ (b_1, a_1) \in \mathcal{D}_{H_1} \end{array} \right).$$

7.1 Operator mnożący unitarny

Lemat 7.3 Niech H i K będą przestrzeniami Hilberta i niech $(a, b) \in \mathcal{G}_H$ oraz $(\widehat{a}, \widehat{b}) \in \mathcal{G}_K$. Wówczas zachodzi następujący związek pomiędzy operatorami na $K \otimes H$:

$$\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a)(\widehat{b} \otimes I) = (\widehat{b} \otimes a)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a). \quad (7.2)$$

DOWÓD. Z definicji 7.1 wynika, że

$$\chi(\widehat{a}, \gamma)\widehat{b} = \gamma\widehat{b}\chi(\widehat{a}, \gamma) \quad (7.3)$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$.

Rozważmy teraz operatory $\widehat{b} \otimes a$, $\widehat{a} \otimes I$ oraz $I \otimes a$. Wszystkie one są stowarzyszone z C^* -algebrą $\mathcal{K}(K) \otimes C_\infty(\Gamma_q) \subset B(K \otimes H)$, gdzie algebrę $C_\infty(\Gamma_q)$ zanurzamy w $B(H)$ morfizmem

$$C_\infty(\Gamma_q) \ni f \longmapsto f(a) \in B(H).$$

Na mocy stwierdzenia 7.20

$$\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \in M(\mathcal{K}(K) \otimes C_\infty(\Gamma_q)).$$

Ponieważ χ jest elementem odwracalnym, mamy

$$\begin{aligned} \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a)(\widehat{b} \otimes I) &\eta \mathcal{K}(K) \otimes C_\infty(\Gamma_q), \\ (\widehat{b} \otimes a)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) &\eta \mathcal{K}(K) \otimes C_\infty(\Gamma_q) \end{aligned}$$

(patrz [24, Example 2]). Wiadomo ([28, wzór (2.6)]), że zbiór elementów stowarzyszonych z $\mathcal{K}(K) \otimes C_\infty(\Gamma_q)$ jest równy zbiorowi funkcji z Γ_q w zbiór elementów stowarzyszonych z $\mathcal{K}(K)$, tj. zbiór wszystkich domkniętych operatorów działających w K , ciągłych w topologii zbieżności niemal jednostajnej ([28, Sect. 2]). W szczególności aby wykazać równość dwóch elementów stowarzyszonych z $\mathcal{K}(K) \otimes C_\infty(\Gamma_q)$, wystarczy porównać wartości odpowiadających im funkcji. Niech ξ_γ będzie funkcjonałem ewaluacji:

$$C_\infty(\Gamma_q) \ni f \longmapsto f(\gamma) \in \mathbb{C}.$$

Dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_q$ mamy

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \xi_\gamma)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a)(\widehat{b} \otimes I) &= \chi(\widehat{a}, \gamma)\widehat{b}, \\ (\text{id} \otimes \xi_\gamma)(\widehat{b} \otimes a)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) &= \gamma\widehat{b}\chi(\widehat{a}, \gamma), \end{aligned}$$

co na mocy (7.3), oznacza, że obie strony (7.2) są równe.

Q.E.D.

Stwierdzenie 7.4 Niech $(a, b) \in \mathcal{G}_H$ i niech $\ker b = \{0\}$. Wówczas operator unitarny

$$W = \mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)\chi(b^{-1} \otimes I, I \otimes a) \quad (7.4)$$

spełnia

$$\begin{aligned} W(a \otimes I)W^* &= a \otimes a, \\ W(b \otimes I)W^* &= a \otimes b + b \otimes I. \end{aligned} \quad (7.5)$$

DOWÓD. Mamy $(a, b^{-1}) \in \mathcal{D}_H$, więc kładąc $\widehat{a} = b^{-1}$, $\widehat{b} = a$ otrzymujemy $(\widehat{a}, \widehat{b}), (a, b) \in \mathcal{G}_H$. Z lematu 7.3 dostajemy wzór

$$\chi(b^{-1} \otimes I, I \otimes a)(a \otimes I)\chi(b^{-1} \otimes I, I \otimes a)^* = a \otimes a.$$

Dalej korzystając z faktu, że $(b, a) \in \mathcal{D}_H$ nietrudno się przekonać, że $a \otimes a$ jest operatorem mocno przemiennym z $b^{-1}a \otimes b$. Oznacza to, że

$$\begin{aligned} W(a \otimes I)W^* &= \mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)\chi(b^{-1}a \otimes I, I \otimes a)(a \otimes I)\chi(b^{-1} \otimes I, I \otimes a)^*\mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)^* \\ &= \mathbb{F}_q(b^{-1} \otimes b)(a \otimes a)\mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)^* \\ &= a \otimes a. \end{aligned}$$

Dla dowodu drugiego ze wzorów (7.5) zauważmy, że para $(R, S) = (b \otimes I, a \otimes b) \in \mathcal{D}_{H \otimes H}$. Ponieważ $b \otimes I$ komutuje z $\chi(b^{-1} \otimes I, I \otimes a)$, korzystając ze wzoru (6.32) otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(b \otimes I)W^* &= \mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)\chi(b^{-1} \otimes I, I \otimes a)(b \otimes I)\chi(b^{-1} \otimes I, I \otimes a)^*\mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)^* \\ &= \mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)(b \otimes I)\mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)^* \\ &= \mathbb{F}_q(R^{-1}S)R\mathbb{F}_q(R^{-1}S)^* = S \dot{+} R \\ &= a \otimes b \dot{+} b \otimes I. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Stwierdzenie 7.5 Niech H i K będą przestrzeniami Hilberta i niech $(a, b) \in \mathcal{G}_H$, przy czym $\ker b = \{0\}$ oraz niech $(\widehat{a}, \widehat{b}) \in \mathcal{G}_K$. Wówczas operator W dany przez (7.4) oraz

$$V = \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes b)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \in B(K \otimes H) \quad (7.6)$$

spełniają

$$W_{23}V_{12} = V_{12}V_{13}W_{23} \quad (7.7)$$

w przestrzeni $K \otimes H \otimes H$.

DOWÓD. korzystając ze wzorów (7.5) mamy

$$\begin{aligned} W_{23}V_{12}W_{23}^* &= (I \otimes W)(\mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes I) \otimes I)(I \otimes W)^* \\ &\quad \times (I \otimes W)(\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \otimes I)(I \otimes W)^* \\ &= \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes (a \otimes b \dot{+} b \otimes I))\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes a). \end{aligned}$$

Teraz

$$\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes a) = \chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes I)\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes I \otimes a),$$

ponieważ funkcja χ jest bicharakterem na Γ_q .

Rozważymy teraz dwa przypadki. Jeśli $\widehat{b} = 0$, to $V = \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a)$ i

$$\begin{aligned} W_{23}V_{12}W_{23}^* &= \chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes a) \\ &= \chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes I)\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes I \otimes a) \\ &= V_{12}V_{13}. \end{aligned}$$

Jeśli $\ker b = \{0\}$, to $(\widehat{b}, \widehat{a}) \in \mathcal{D}_K$ i możemy rozważać parę

$$(R, S) = (\widehat{b} \otimes b \otimes I, \widehat{b} \otimes a \otimes b) \in \mathcal{D}_{K \otimes H \otimes H}. \quad (7.8)$$

Z lematu 7.3 wiemy, że

$$(\widehat{b} \otimes a)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) = \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a)(\widehat{b} \otimes I),$$

a co za tym idzie

$$(\widehat{b} \otimes a \otimes b)\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes I) = \chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes I)(\widehat{b} \otimes I \otimes b) \quad (7.9)$$

Stosujemy wzór (6.33) do pary (7.8):

$$\mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes (a \otimes b + b \otimes I)) = \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes a \otimes b + \widehat{b} \otimes b \otimes I) = \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes b \otimes I)\mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes a \otimes b).$$

Podsumowując otrzymujemy

$$\begin{aligned} W_{23}V_{12}W_{23}^* &= \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes (a \otimes b + b \otimes I))\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes a) \\ &= \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes (a \otimes b + b \otimes I))\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes I)\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes I \otimes a) \\ &= \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes b \otimes I)\mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes a \otimes b)\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes I)\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes I \otimes a) \\ &= \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes b \otimes I)\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes a \otimes I)\mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes I \otimes b)\chi(\widehat{a} \otimes I \otimes I, I \otimes I \otimes a) \\ &= V_{12}V_{13}. \end{aligned}$$

gdzie w przedostatniej równości skorzystaliśmy ze wzoru (7.9).

W przypadku ogólnym dokonujemy rozkładu przestrzeni $K \otimes H \otimes H$ na sumę prostą $(\ker \widehat{b} \otimes H \otimes H) \oplus (K(\widehat{b} \neq 0) \otimes H \otimes H)$ i w każdym ze składników wyprowadzamy wzór (7.7) oddzielnie. Q.E.D.

Podstawiając w stwierdzeniu 7.5 $K = H$ i $(\widehat{a}, \widehat{b}) = (b^{-1}, b^{-1}a)$ (korzystamy tu z twierdzenia 6.14), otrzymujemy $V = W$. W konsekwencji dostajemy następujący wniosek:

Wniosek 7.6 *Operator W wprowadzony wzorem (7.4) jest operatorem mnożącym unitarnym w sensie [4].*

Do konstrukcji grupy kwantowej potrzebne są dodatkowe własności operatora W . Właścią, która umożliwi nam konstrukcję deformacji grupy „ $az + b$ ” będzie modularność ([20]).

Lemat 7.7 *Niech H i K będą przestrzeniami Hilberta i niech $\widehat{a}$ oraz a będą domkniętymi operatorami działającymi odpowiednio w K i H . Dla dowolnej ograniczonej funkcji borelowskiej na $\text{Sp } \widehat{a} \times \text{Sp } a$ i wszystkich $z, x \in K$, $u, y \in H$ mamy*

$$(\overline{z} \otimes u | f(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) | \overline{x} \otimes y) = (x \otimes u | f(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) | z \otimes y). \quad (7.10)$$

DOWÓD. Wzór (7.10) jest oczywisty dla funkcji postaci $f(z_1, z_2) = f_1(z_1)f_2(z_2)$:

$$\begin{aligned} & (x \otimes u | f(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) | z \otimes y) \\ &= (x \otimes u | f_1(\widehat{a} \otimes I) f_2(I \otimes a) | z \otimes y) \\ &= (x \otimes u | (f_1(\widehat{a}) \otimes I) (I \otimes f_2(a)) | z \otimes y) \\ &= (f_1(\widehat{a})^* x | z) (u | f_2(a) y) \\ &= \left((f_1(\widehat{a})^*)^\top \overline{z} | \overline{x} \right) (u | f_2(a) y) \\ &= \left((f_1(\widehat{a})^\top)^* \overline{z} | \overline{x} \right) (u | f_2(a) y) \\ &= \left((f_1(\widehat{a}^\top))^* \overline{z} | \overline{x} \right) (u | f_2(a) y) \\ &= ((f_1(\widehat{a}^\top \otimes I)^* (\overline{z} \otimes u)) | (I \otimes f_2(a)) (\overline{x} \otimes y)) \\ &= (\overline{z} \otimes u | (f_1(\widehat{a}^\top) \otimes I) (I \otimes f_2(a)) | \overline{x} \otimes y) \\ &= (\overline{z} \otimes u | f(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) | \overline{x} \otimes y). \end{aligned}$$

Dla dowolnej funkcji f korzystamy z ciągłości i liniowości obu stron (7.10) względem f . Q.E.D.

Stwierdzenie 7.8 *Niech H i K będą przestrzeniami Hilberta i niech $(a, b) \in \mathcal{G}_H$, $(\widehat{a}, \widehat{b}) \in \mathcal{G}_K$. Załóżmy także, że $\ker b = \{0\}$ i $\ker \widehat{b} = \{0\}$. Przyjmijmy oznaczenie $Q = |a|$ i niech $x, z \in K$, $u \in D(Q)$ oraz $y \in D(Q^{-1})$. Zdefiniujmy również funkcje $\varphi, \psi: \Gamma_q \rightarrow \mathbb{C}$ wzorami*

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma) &= \left(x \otimes u | \chi(\widehat{b} \otimes b, \gamma) \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) | z \otimes y \right), \\ \psi(\gamma) &= \left(\overline{z} \otimes Qu | \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma) \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) | \overline{x} \otimes Q^{-1}y \right). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Wówczas

1. $\psi(\gamma) = \overline{\alpha(\gamma)} |\gamma| \chi(-1, \gamma) \varphi(\gamma)$,
2. jeśli $x \in D(\widehat{b}^{\pm 1})$, $u \in D(b^{\pm 1} \circ Q^{\pm 2})$ i $y \in D(Q^{\pm 2})$ dla wszystkich możliwych kombinacji znaków, to φ i ψ należą do przestrzeni $\mathcal{S}(\Gamma_q)$.

DOWÓD. **Ad 1.** Ponieważ $(a, b) \in \mathcal{D}_H$ i $Q = |a|$, mamy

$$(I \otimes Q^{-it})(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b)(I \otimes Q^{it}) = q^{-it}(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b)$$

(patrz relacje (6.3)). Po zastosowaniu do obu stron powyższego równania funkcji $\gamma' \mapsto \chi(\gamma', \gamma)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (I \otimes Q^{-it})\chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma)(I \otimes Q^{it}) \\
 &= \chi(q^{-it}(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b), \gamma) \\
 &= \chi(q^{-it}, \gamma)\chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma) \\
 &= |\gamma|^{-it}\chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma).
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Pamiętamy, że Q komutuje z a , a co za tym idzie $(I \otimes Q^{it})$ komutuje z $\chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a)$. Stąd

$$\begin{aligned}
 &\left(\overline{z} \otimes Q^{it}u \middle| \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma)\chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \middle| \overline{x} \otimes Q^{it}y\right) \\
 &= \left(\overline{z} \otimes u \middle| (I \otimes Q^{-it})\chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma)\chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a)(I \otimes Q^{it}) \middle| \overline{x} \otimes y\right) \\
 &= \left(\overline{z} \otimes u \middle| (I \otimes Q^{-it})\chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma)(I \otimes Q^{it})\chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \middle| \overline{x} \otimes y\right) \\
 &= |\gamma|^{-it} \left(\overline{z} \otimes u \middle| \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma)\chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \middle| \overline{x} \otimes y\right)
 \end{aligned}$$

Dokonując przedłużenia holomorficznego do punktu $t = i$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 &\left(\overline{z} \otimes Qu \middle| \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma)\chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \middle| \overline{x} \otimes Q^{-1}y\right) \\
 &= |\gamma| \left(\overline{z} \otimes u \middle| \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma)\chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \middle| \overline{x} \otimes y\right).
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma) &= \chi(-1, \gamma)\chi(\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma) \\
 &= \chi(-1, \gamma)\chi(\widehat{b}^\top \otimes I, \gamma)\chi(I \otimes qa^{-1}b, \gamma) \\
 &= \chi(-1, \gamma)\chi(\widehat{b}, \gamma)^\top \otimes \chi(qa^{-1}b, \gamma).
 \end{aligned}$$

Możemy zatem kontynuować przekształcenia

$$\begin{aligned}
 &\left(\overline{z} \otimes Qu \middle| \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma)\chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \middle| \overline{x} \otimes Q^{-1}y\right) \\
 &= |\gamma|\chi(-1, \gamma) \left(\overline{z} \otimes u \middle| \left(\chi(\widehat{b}, \gamma)^\top \otimes \chi(qa^{-1}b, \gamma)\right) \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \middle| \overline{x} \otimes y\right) \\
 &= |\gamma|\chi(-1, \gamma) \left(\overline{\chi(\widehat{b}, \gamma)z} \otimes \chi(qa^{-1}b, \gamma)^*u \middle| \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \middle| \overline{x} \otimes y\right) \\
 &= |\gamma|\chi(-1, \gamma) \left(x \otimes \chi(qa^{-1}b, \gamma)^*u \middle| \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \middle| \chi(\widehat{b}, \gamma)z \otimes y\right),
 \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z lematu 7.7. Dalej

$$\begin{aligned} & \left(\bar{z} \otimes Qu \left| \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma) \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \right| \bar{x} \otimes Q^{-1}y \right) \\ &= |\gamma| \chi(-1, \gamma) \left(x \otimes u \left| (I \otimes \chi(qa^{-1}b, \gamma)) \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) (\chi(\widehat{b}, \gamma) \otimes I) \right| z \otimes y \right) \\ &= |\gamma| \chi(-1, \gamma) \left(x \otimes u \left| (I \otimes \chi(qa^{-1}b, \gamma)) \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \chi(\widehat{b} \otimes I, \gamma) \right| z \otimes y \right). \end{aligned}$$

Na mocy lematu 7.3 ostatnie wyrażenie jest równe

$$|\gamma| \chi(-1, \gamma) \left(x \otimes u \left| (I \otimes \chi(qa^{-1}b, \gamma)) \chi(\widehat{b} \otimes a, \gamma) \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \right| z \otimes y \right).$$

Położmy $R = I \otimes qa^{-1}b$, $S = \widehat{b} \otimes a$. Nietrudno sprawdzić, że wówczas $(R, S) \in \mathcal{D}_{K \otimes H}$. korzystając ze wzoru (6.9) mamy

$$\begin{aligned} \chi(qa^{-1}b, \gamma) \chi(\widehat{b} \otimes a, \gamma) &= \chi(R, \gamma) \chi(S, \gamma) \\ &= \overline{\alpha(\gamma)} \chi(q^{-1}RS, \gamma) \\ &= \overline{\alpha(\gamma)} \chi(\widehat{b} \otimes b, \gamma). \end{aligned}$$

Uwzględniając tę informację otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left(\bar{z} \otimes Qu \left| \chi(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma) \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \right| \bar{x} \otimes Q^{-1}y \right) \\ &= \overline{\alpha(\gamma)} |\gamma| \chi(-1, \gamma) \left(x \otimes u \left| \chi(\widehat{b} \otimes b, \gamma) \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \right| z \otimes y \right), \end{aligned}$$

co kończy dowód punktu 1.

Ad 2. Aby uprościć dalsze rozumowanie, na początek udowodnimy krótki lemat natury technicznej:

Lemat 7.9 *Niech f będzie funkcją na $\mathbb{R}$ taką, że $t \mapsto e^{\pm t} f(t)$ posiada przedłużenie holomorficzne do ograniczonej funkcji na pasku $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$. Wówczas $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

DOWÓD LEMATU 7.9. f jest oczywiście funkcją klasy C^∞ na $\mathbb{R}$. Dalej możemy wyrazić f jako

$$f(t) = e^{-t} u(t),$$

gdzie u jest funkcją ograniczoną. Ustalmy $t_0 \in \mathbb{R}$. Mamy

$$f^{(k)}(t_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|z-t_0|=\frac{1}{2}} \frac{f(z) dz}{(z-t_0)^{k+1}}.$$

W szczególności

$$|f^{(k)}(t_0)| \leq 2^k k! \sup_{|z-t_0|=\frac{1}{2}} |e^{-z}| \sup_{|z-t_0|=\frac{1}{2}} |u(z)| \leq \text{const.} \cdot e^{-t_0},$$

a więc wszystkie pochodne f dążą do 0 przy $t_0 \rightarrow \infty$ szybciej niż odwrotność dowolnego wielomianu. Przedstawiając f jako $f(t) = e^t w(t)$, otrzymamy takie samo zachowanie pochodnych dla $t_0 \rightarrow -\infty$. Q.E.D.

Teraz możemy przystąpić do dowodu punktu **2**. Postępując tak samo jak przy wyprowadzaniu wzoru (7.12), otrzymujemy

$$(I \otimes Q^{-it})\chi(\widehat{b} \otimes b, \gamma)(I \otimes Q^{it}) = |\gamma|^{-it}\chi(\widehat{b} \otimes b, \gamma)$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$ i wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Stąd

$$\begin{aligned} & \left(x \otimes Q^{it}u \left| \chi(\widehat{b} \otimes b, \gamma)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \right| z \otimes Q^{it}y \right) \\ &= |\gamma|^{-it} \left(x \otimes u \left| \chi(\widehat{b} \otimes b, \gamma)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \right| z \otimes y \right) = |\gamma|^{-it}\varphi(\gamma). \end{aligned}$$

Jeśli dokonamy przedłużenia holomorficznego do punktu $t = \pm 2i$, dostaniemy

$$\left(x \otimes Q^{\pm 2i}u \left| \chi(\widehat{b} \otimes b, \gamma)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \right| z \otimes Q^{\pm 2i}y \right) = |\gamma|^{\pm 2}\varphi(\gamma).$$

Podstawiając $\gamma = q^k q^{it}$ otrzymamy

$$e^{\mp 2t \operatorname{Im} \rho^{-1}} \varphi(q^k q^{it}) = \left(x \otimes Q^{\pm 2i}u \left| \left(\operatorname{Phase} \widehat{b} \otimes b \right) |\widehat{b} \otimes b|^{it} \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \right| z \otimes Q^{\pm 2i}y \right).$$

Z założeń o wektorach x , y oraz u wynika, że $x \otimes Q^{\pm 2i}u \in D(\widehat{b} \otimes b)$, a co za tym idzie funkcje

$$t \longmapsto e^{\mp 2t \operatorname{Im} \rho^{-1}} \varphi(q^k q^{it})$$

posiadają przedłużenie holomorficzne na pasek $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$ i przedłużenie to jest w tym pasku ograniczone. Na mocy lematu 7.9, funkcje $t \mapsto \varphi(q^k q^{it})$ należą do przestrzeni $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, czyli $\varphi \in \mathcal{S}(\Gamma_q)$.

Ze wzoru z punktu **1**. widzimy, że funkcje

$$t \longmapsto \psi(q^k q^{it})$$

są gładkie oraz, że $t \mapsto e^{\pm t \operatorname{Im} \rho^{-1}} \psi(q^k q^{it})$ posiadają ograniczone przedłużenie holomorficzne na pasek $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$ i korzystając ponownie z lematu 7.9, dostajemy $\psi \in \mathcal{S}(\Gamma_q)$. Q.E.D.

Stwierdzenie 7.10 *Niech f i g będą ograniczonymi funkcjami borelowskimi na Γ_q . Oznaczmy przez $\widehat{f}$ i $\widehat{g}$ ich odwrotne transformaty Fouriera (f i g traktujemy jako dystrybucje temperowane na Γ_q):*

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \int_{\Gamma_q} \widehat{f}(\gamma') \chi(\gamma, \gamma') dh(\gamma'), \\ g(\gamma) &= \int_{\Gamma_q} \widehat{g}(\gamma') \chi(\gamma, \gamma') dh(\gamma'). \end{aligned} \tag{7.13}$$

Założmy, że dla prawie wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$

$$\widehat{f}(\gamma) = \overline{\alpha(\gamma)} |\gamma| \chi(-1, \gamma) \widehat{g}(\gamma). \quad (7.14)$$

Wtedy dla Q oraz x, z, u, y takich jak w stwierdzeniu 7.8 mamy

$$\begin{aligned} & \left(x \otimes u \left| f(\widehat{b} \otimes b, \gamma) \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \right| z \otimes y \right) \\ &= \left(\bar{z} \otimes Qu \left| g(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma) \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \right| \bar{x} \otimes Q^{-1}y \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

DOWÓD. Przypuśćmy, że wektory x, z, u, y spełniają warunki z punktu 2. stwierdzenia 7.8. Wtedy funkcje (7.11) należą do przestrzeni $\mathcal{S}(\Gamma_q)$. Możemy zatem korzystać z teorii transformaty Fouriera. Ze wzorów (7.11) i (7.13) wynika, że

$$\begin{aligned} & \left(x \otimes u \left| f(\widehat{b} \otimes b, \gamma) \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \right| z \otimes y \right) = \int_{\Gamma_q} \widehat{f}(\gamma') \varphi(\gamma') dh(\gamma'), \\ & \left(\bar{z} \otimes Qu \left| g(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b, \gamma) \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a) \right| \bar{x} \otimes Q^{-1}y \right) = \int_{\Gamma_q} \widehat{g}(\gamma') \psi(\gamma') dh(\gamma'). \end{aligned}$$

Z punktu 1. stwierdzenia 7.8 i równości (7.14) natychmiast wynika, że prawe strony powyższych wzorów są równe, co pokazuje prawdziwość (7.15) dla x, z, u i y spełniających wspomniane warunki. Dalej zauważmy, że zbiór $D(\widehat{b}) \cap D(\widehat{b}^{-1})$ jest gęsty w K , natomiast z twierdzenia 6.3 wynika, że przestrzenie

$$D(b \circ Q^2) \cap D(b \circ Q^{-2}) \cap D(b^{-1} \circ Q^2) \cap D(b^{-1} \circ Q^{-2})$$

oraz

$$D(Q^2) \cap D(Q^{-2})$$

są istotnymi dziedzinami odpowiednio dla Q i Q^{-1} . Oznacza to, że równość (7.15) zachodzi dla wszystkich $x \in K$, $z \in H$, $u \in D(Q)$ oraz $y \in D(Q^{-1})$. Q.E.D.

Przypomnijmy definicję modularnego operatora moltiplikatywnego unitarnego:

Definicja 7.11 ([20]) Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Operator moltiplikatywny unitarny $W \in B(H \otimes H)$ nazywamy modularnym, jeśli istnieją dodatnie, samosprężone operatory Q i $\widehat{Q}$ działające w H oraz operator unitarny $\widehat{W} \in B(\overline{H} \otimes H)$ takie, że $\ker Q = \ker \widehat{Q} = \{0\}$,

$$W(\widehat{Q} \otimes Q)W^* = \widehat{Q} \otimes Q \quad (7.16)$$

oraz

$$(x \otimes u | W | z \otimes y) = \left(\bar{z} \otimes Qu \left| \widehat{W} \right| \bar{x} \otimes Q^{-1}y \right) \quad (7.17)$$

dla wszystkich $x, z \in H$, $u \in D(Q)$ i $y \in D(Q^{-1})$.

Twierdzenie 7.12 *Niech H i K będą przestrzeniami Hilberta i niech $(a, b) \in \mathcal{G}_H$, $(\widehat{a}, \widehat{b}) \in \mathcal{G}_K$. Załóżmy, że $\ker b = \{0\}$ oraz $\ker \widehat{b} = \{0\}$ i oznaczmy $Q = |a|$. Niech V będzie operatorem wprowadzonym wzorem (7.6) i niech*

$$\widetilde{V} = \mathbb{F}_q(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b)^* \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a).$$

Wówczas dla wszystkich $x, z \in K$, $y \in D(Q^{-1})$ oraz $u \in D(Q)$ mamy

$$(x \otimes u | V | z \otimes y) = \left(\overline{z} \otimes Qu \middle| \widetilde{V} \middle| \overline{x} \otimes Q^{-1}y \right).$$

DOWÓD. Zastosujemy stwierdzenie 7.10 do funkcji $f = \mathbb{F}_q$ i $g = \overline{\mathbb{F}_q}$. Musimy sprawdzić, że spełnione są założenia stwierdzenia 7.10. Wniosek 5.22 mówi nam, że

$$\widehat{f}(\gamma) = -\frac{\mathbb{F}_q(-q^2)}{2\pi\overline{\rho}} \frac{\chi(-q^{-2}, \gamma)\gamma}{(1 - \overline{\gamma})\mathbb{F}_q(-q^2\gamma)}.$$

Ponieważ $g = \overline{f}$, mamy

$$\widehat{g}(\gamma) = \overline{\widehat{f}(\gamma^{-1})} = -\frac{\mathbb{F}_q(-q^2)^{-1}}{2\pi\rho} \frac{\chi(-q^{-2}, \gamma)(1 - \gamma^{-1})}{\mathbb{F}_q(-q^2\gamma^{-1})\overline{\gamma}}$$

(skorzystaliśmy z faktu, że $\chi(\gamma', \gamma^{-1}) = \chi(\gamma', \gamma)^{-1}$ oraz z tego, że funkcje $\mathbb{F}_q$ i χ mają wartości w S^1). Obliczamy

$$\frac{\widehat{g}(\gamma)}{\widehat{f}(\gamma)} = \mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} \frac{1 - \overline{\gamma}}{\gamma - 1} \mathbb{F}_q(-q^2\gamma) \mathbb{F}_q(-q^2\gamma^{-1}) \overline{\gamma}^{-1}$$

Stosując kolejno wzory (5.19), (5.31), (5.10), (5.7) oraz (5.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{g}(\gamma)}{\widehat{f}(\gamma)} &= -\mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} \mathbb{F}_q(-\gamma) \mathbb{F}_q(-q^2\gamma^{-1}) \overline{\gamma}^{-1} \\ &= -\mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} C_q \alpha(-q^{-1}\gamma) \overline{\gamma}^{-1} \\ &= -\mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} C_q \alpha(-q^{-1}) \alpha(\gamma) \frac{\alpha(-q^{-1}\gamma)}{\alpha(-q^{-1})\alpha(\gamma)} \overline{\gamma}^{-1} \\ &= -\mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} C_q \alpha(-q^{-1}) \alpha(\gamma) \chi(-q^{-1}, \gamma) \overline{\gamma}^{-1} \\ &= -\mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} C_q \alpha(-q^{-1}) \alpha(\gamma) \frac{1}{(\chi(-q, \gamma) \overline{\gamma})} \\ &= -\mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} C_q \alpha(-q^{-1}) \alpha(\gamma) \frac{1}{\chi(q, \gamma) \overline{\gamma} \chi(-1, \gamma)} \\ &= -\mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} C_q \alpha(-q^{-1}) \alpha(\gamma) \frac{1}{(\text{Phase } \gamma) \overline{\gamma} \chi(-1, \gamma)} \\ &= -\mathbb{F}_q(-q^2)^{-2} \frac{\overline{\rho}}{\rho} C_q \alpha(-q^{-1}) \frac{1}{\alpha(\gamma) |\gamma| \chi(-1, \gamma)}. \end{aligned}$$

Podstawiając $\gamma = -1$ we wzorze (5.31) i korzystając ponownie z (5.20) dostajemy

$$C_q \alpha(-q^{-1}) = \mathbb{F}_q(-1) \mathbb{F}_q(-q^2) = \frac{-\rho}{\bar{\rho}} \mathbb{F}_q(-q^2)^2,$$

a stąd

$$\widehat{f}(\gamma) = \overline{\alpha(\gamma)} |\gamma| \chi(-1, \gamma) \widehat{g}(\gamma).$$

Teraz nasza teza wynika ze stwierdzenia 7.10.

Q.E.D.

Wniosek 7.13 *Operator W dany przez wzór (7.4) jest modularnym operatorem masyfikatywnym unitarnym.*

DOWÓD. Wiemy, że W jest operatorem masyfikatywnym unitarnym (wniosek 7.6). Dalej podstawiając $K = H$, $\widehat{a} = b^{-1}$ i $\widehat{b} = b^{-1}a$ w twierdzeniu 7.12 dostajemy operator unitarny $\widehat{W} \in B(\overline{H} \otimes H)$ i dodatni, samosprężony operator Q działający w H taki, że $\ker Q = \{0\}$ i zachodzi wzór (7.17). Pozostaje wskazać dodatni, samosprężony operator $\widehat{Q}$ działający w H taki, że $\ker \widehat{Q} = \{0\}$ i spełniony jest związek (7.16). Korzystając z relacji (6.3) nietrudno sprawdzić, że operator $\widehat{Q} = |b|$ spełnia wszystkie powyższe wymagania. Q.E.D.

7.2 Relacja stowarzyszenia i funkcje specjalne

Niniejszy podrozdział poświęcony jest przedstawieniu dowodów następujących twierdzeń:

Twierdzenie 7.14 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, T operatorem normalnym w H takim, że $\mathrm{Sp} T \subset \overline{\Gamma}_q$ i niech $A \subset B(H)$ będzie niezdegenerowaną C^* -podalgebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne*

1. *Dla każdego $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$ operator unitarny $\mathbb{F}_q(\gamma T)$ należy do przestrzeni $M(A)$, a ponadto odwzorowanie*

$$\overline{\Gamma}_q \ni \gamma \longmapsto \mathbb{F}_q(\gamma T) \in M(A)$$

jest ciągłe w topologii strict;

2. *operator T jest stowarzyszony z A .*

Twierdzenie 7.15 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, T operatorem normalnym w H takim, że $\ker T = \{0\}$ oraz $\mathrm{Sp} T \subset \overline{\Gamma}_q$ i niech $A \subset B(H)$ będzie niezdegenerowaną C^* -podalgebrą. Wówczas następujące warunki są równoważne*

1. *Dla każdego $\gamma \in \Gamma_q$ operator unitarny $\chi(T, \gamma)$ należy do przestrzeni $M(A)$, a ponadto odwzorowanie*

$$\Gamma_q \ni \gamma \longmapsto \chi(T, \gamma) \in M(A)$$

jest ciągłe w topologii strict;

2. operatory T i T^{-1} są stowarzyszone z A .

Na początek udowodnimy prosty lemat.

Lemat 7.16 *Niech A i B będą C^* -algebrami i niech $\pi \in \text{Mor}(B, A)$. Wówczas rozszerzenie π do $*$ -homomorfizmu $M(B) \rightarrow M(A)$ jest ciągłe w topologii strict na zbiorach ograniczonych.*

DOWÓD. Niech $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ będzie ograniczonym ciągiem uogólnionym elementów $M(B)$ zbieżnym w topologii strict do $t \in M(B)$. Wybierzmy $x \in A$. Mamy pokazać, że $\pi(t_\lambda)x \xrightarrow{\lambda \in \Lambda} \pi(t)x$ w A . Ustalmy $\varepsilon > 0$ i weźmy $b \in B$ oraz $a \in A$ takie, że $\|\varphi(b)a - x\| < \varepsilon$. Dalej ustalmy $\lambda_0 \in \Lambda$ takie, że dla wszystkich $\lambda \geq \lambda_0$ mamy $\|t_\lambda b - tb\| < \|a\|^{-1}\varepsilon$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\pi(t_\lambda)\pi(b)a - \pi(t)\pi(b)a\| &= \|\pi(t_\lambda b)a - \pi(tb)a\| \\ &\leq \|\pi(t_\lambda b) - \pi(tb)\|\|a\| \\ &\leq \|t_\lambda b - tb\|\|a\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

gdyż norma $*$ -homomorfizmu C^* -algebr jest zawsze nie większa niż 1. Dla takich λ mamy

$$\begin{aligned} \|\pi(t_\lambda)x - \pi(t)x\| &\leq \|\pi(t_\lambda)x - \pi(t)\pi(b)a\| \\ &\quad + \|\pi(t_\lambda)\pi(b)a - \pi(t)\pi(b)a\| \\ &\quad + \|\pi(t)\pi(b)a - \pi(t)x\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\pi(t_\lambda)\|\|x - \pi(b)a\| \\ &\quad + \|\pi(t_\lambda)\pi(b)a - \pi(t)\pi(b)a\| \\ &\quad + \|\pi(t)\|\|x - \pi(b)a\| \\ &\leq (2 \sup_{\lambda \in \Lambda} \|t_\lambda\| + 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

co przy dowolności x i ε pokazuje, że

$$\pi(t_\lambda) \xrightarrow{\lambda \in \Lambda} \pi(t)$$

w topologii strict.

Q.E.D.

Twierdzenia 7.14 i 7.15 są bardzo podobne i ich dowody wykorzystują to samo rozumowanie. Jest ono oparte na pojęciu C^* -algebry generowanej przez kwantową rodzinę operatorów stowarzyszonych:

Definicja 7.17 ([28]) *Niech B i C będą C^* -algebrami i niech F będzie elementem stowarzyszonym z $C \otimes B$. Powiemy, że F generuje B jeśli dla dowolnej niezdegenerowanej reprezentacji π algebry B w przestrzeni Hilberta H i dowolnej niezdegenerowanej C^* -podalgebry $A \subset B(H)$ mamy*

$$\left(((\text{id} \otimes \pi)F) \eta(C \otimes A) \right) \implies \left(\pi \in \text{Mor}(B, A) \right)$$

Rozważmy przemianą algebrę $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$. Funkcja dwóch zmiennych

$$\overline{\Gamma}_q \times \overline{\Gamma}_q \ni (\gamma, \gamma') \mapsto \mathbb{F}_q(\gamma\gamma') \in S^1$$

jest elementem $M(C_\infty(\overline{\Gamma}_q) \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q))$. Przyjmijmy oznaczenie

$$F(\gamma, \gamma') = \mathbb{F}_q(\gamma\gamma').$$

Stwierdzenie 7.18 *Algebra $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ jest generowana przez kwantową rodzinę elementów stowarzyszonych $F \in M(C_\infty(\overline{\Gamma}_q) \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q))$.*

DOWÓD. Skoro $F \in M(C_\infty(\overline{\Gamma}_q) \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q))$, odwzorowanie

$$\overline{\Gamma}_q \ni \gamma \mapsto F(\gamma, \cdot) \in M(C_\infty(\overline{\Gamma}_q))$$

jest ciągle w topologii strict (patrz [28, Sect. 2]). W szczególności dla dowolnej funkcji $\varphi \in L^1(\Gamma_q)$ możemy rozważać całkę

$$\int_{\Gamma_q} F(\gamma, \cdot) \varphi(\gamma) dh(\gamma) \in M(C_\infty(\overline{\Gamma}_q)).$$

Korzystając z asymptotycznego zachowania $\mathbb{F}_q(\gamma) \simeq \alpha(q^{-1}\gamma)$ nietrudno jest wykazać, że funkcja

$$F_\varphi: \overline{\Gamma}_q \ni \gamma' \mapsto \int_{\Gamma_q} F(\gamma, \gamma') \varphi(\gamma) dh(\gamma) \quad (7.18)$$

należy do $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$. Pokażemy, że rodzina funkcji $\{F(\gamma, \cdot)\}_{\gamma \in \overline{\Gamma}_q}$ rozdziela punkty $\overline{\Gamma}_q$. Istotnie: przypuśćmy, że dla pewnych $\gamma_1, \gamma_2 \in \overline{\Gamma}_q$ mamy

$$F(\gamma, \gamma_1) = F(\gamma, \gamma_2)$$

dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$. Oznacza to, że

$$\mathbb{F}_q(\gamma\gamma_1) = \mathbb{F}_q(\gamma\gamma_2) \quad (7.19)$$

dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$. W szczególności dla $\gamma = qq^{-it}$ ($t \in \mathbb{R}$) mamy

$$\mathbb{F}_q^{q\gamma_1}(t) = \mathbb{F}_q(qq^{it}\gamma_1) = \mathbb{F}_q(qq^{it}\gamma_2) = \mathbb{F}_q^{q\gamma_2}(t)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Dokonując przedłużenia holomorficznego do punktu $t = -i$ i korzystając z (5.21) otrzymujemy

$$(1 + \gamma_1)\mathbb{F}_q(\gamma_1) = (1 + \gamma_2)\mathbb{F}_q(\gamma_2),$$

co na mocy (7.19) oznacza, że $\gamma_1 = \gamma_2$.

Wynika stąd, że rodzina funkcji $\{F_\varphi : \varphi \in L^1(\Gamma_q)\}$ także rozdziela punkty $\bar{\Gamma}_q$ (wystarczy rozważać funkcje przybliżające miary skupione na pojedynczych punktach $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$). Na mocy twierdzenia Stone’a-Weierstrassa zastosowanego do jednopunktowego uzwarcenia przestrzeni $\bar{\Gamma}_q$, $*$ -algebra generowana przez funkcje postaci (7.18) jest gęsta w $C_\infty(\bar{\Gamma}_q)$.

Rozważmy teraz przestrzeń Hilberta H i reprezentację $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\bar{\Gamma}_q), \mathcal{K}(H))$. Przypuśćmy, że dla pewnej niezdegenerowanej C^* -algebry $A \subset B(H)$ mamy

$$((\text{id} \otimes \pi)F) \in M(C_\infty(\bar{\Gamma}_q) \otimes A).$$

tzn. $((\text{id} \otimes \pi)F)$ jest funkcją na $\bar{\Gamma}_q$ o wartościach w $M(A)$, ciągłą w topologii strict. Funkcja ta dana jest przez

$$\bar{\Gamma}_q \ni \gamma \longmapsto \pi(F(\gamma, \cdot)) \in M(A)$$

Dla $\varphi \in L^1(\Gamma_q)$ oznaczmy funkcjonał

$$C_\infty(\bar{\Gamma}_q) \ni f \longmapsto \int_{\Gamma_q} f(\gamma) \varphi(\gamma) dh(\gamma)$$

symbolem ω_φ . Wówczas

$$\pi(F_\varphi) = \pi((\omega_\varphi \otimes \text{id})F) = (\omega_\varphi \otimes \text{id})((\text{id} \otimes \pi)F) \in M(A).$$

Ponieważ $*$ -algebra generowana przez elementy $\{F_\varphi : \varphi \in L^1(\Gamma_q)\}$ jest gęsta w $C_\infty(\bar{\Gamma}_q)$, widzimy, że

$$\pi(C_\infty(\bar{\Gamma}_q)) \subset M(A)$$

Pozostaje wykazać, że zbiór $\pi(C_\infty(\bar{\Gamma}_q))A$ jest liniowo gęsty w A . Wykorzystamy do tego fakt, że F jest unitarnym elementem $M(C_\infty(\bar{\Gamma}_q) \otimes C_\infty(\bar{\Gamma}_q))$. Wynika stąd, że $(\text{id} \otimes \pi)F$ jest unitarnym elementem $M(C_\infty(\bar{\Gamma}_q) \otimes A)$. W szczególności zbiór

$$\{((\text{id} \otimes \pi)F)(f \otimes x) : f \in C_\infty(\bar{\Gamma}_q), x \in A\} \quad (7.20)$$

jest liniowo gęsty w $C_\infty(\bar{\Gamma}_q) \otimes A$. Zauważmy dalej, że dla dowolnego funkcjonału $\omega \in C_\infty(\bar{\Gamma}_q)^*$ mamy

$$(\omega \otimes \text{id})[((\text{id} \otimes \pi)F)(f \otimes x)] = \pi[(\omega \otimes \text{id})(F(f \otimes I))]x.$$

W szczególności dla $\varphi \in L^1(\Gamma_q)$

$$(\omega_\varphi \otimes \text{id})[((\text{id} \otimes \pi)F)(f \otimes x)] = \pi[(\omega_{f\varphi} \otimes \text{id})F]x \in \pi(C_\infty(\bar{\Gamma}_q))A.$$

Dla danego $y \in A$ weźmy ciąg $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kombinacji liniowych elementów zbioru (7.20) zbieżny do $I \otimes y$ oraz unormowaną, dodatnią funkcję $\varphi \in L^1(\Gamma_q)$. Wtedy ciąg elementów

$$(\omega_\varphi \otimes \text{id})(q_n) \in \pi(C_\infty(\bar{\Gamma}_q))A$$

jest zbieżny do y , co pokazuje, że $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\overline{\Gamma}_q), A)$.

Q.E.D.

Możemy teraz udowodnić twierdzenie 7.14.

DOWÓD TWIERDZENIA 7.14. Dla $f_0 \in C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ niech

$$\pi(f_0) = f_0(T).$$

Wówczas π jest niezdegenerowaną reprezentacją $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ w H , tj. $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\overline{\Gamma}_q), \mathcal{K}(H))$. Funkcja tożsamościowa $f(\gamma) = \gamma$ dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$, jest elementem stowarzyszonym z $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ i mamy

$$\pi(f) = T. \quad (7.21)$$

„1. $\Rightarrow$ 2.” Ciągłość i ograniczoność odwzorowania

$$\overline{\Gamma}_q \ni \gamma \longmapsto \mathbb{F}_q(\gamma T) \in M(A)$$

oznacza dokładnie tyle, że

$$(\text{id} \otimes \pi)F \in M(C_\infty(\overline{\Gamma}_q) \otimes A),$$

gdzie F jest elementem $M(C_\infty(\overline{\Gamma}_q) \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q))$ zdefiniowanym w dowodzie stwierdzenia 7.18. Ponieważ F generuje algebrę $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$, mamy $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\overline{\Gamma}_q), A)$ i na mocy (7.21),

$$T = \pi(f) \eta A.$$

„1. $\Leftarrow$ 2.” Algebra $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ jest generowana przez element $f \eta C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$, gdzie $f(\gamma) = \gamma$ dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$. Jeśli więc

$$\pi(f) = T \eta A,$$

to $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\overline{\Gamma}_q), A)$. Nietrudno się przekonać, że dla $\gamma \rightarrow \gamma_0$ w $\overline{\Gamma}_q$, funkcje

$$\overline{\Gamma}_q \ni \gamma' \longmapsto \mathbb{F}_q(\gamma \gamma') \in \mathbb{C}$$

tworzą ograniczony ciąg zbieżny niemal jednostajnie do

$$\overline{\Gamma}_q \ni \gamma' \longmapsto \mathbb{F}_q(\gamma_0 \gamma') \in \mathbb{C}.$$

Dla funkcji ograniczonych zbieżność niemal jednostajna pokrywa się ze zbieżnością w topologii strict, a więc na mocy lematu 7.16, zbieżność ta nadal ma miejsce po zastosowaniu morfizmu π . Innymi słowy odwzorowanie

$$\overline{\Gamma}_q \ni \gamma \longmapsto \mathbb{F}_q(\gamma T) \in M(A)$$

jest ciągle w topologii strict.

Q.E.D.

Zanim przystąpimy do dowodu twierdzenia 7.15, zajmijmy się funkcją

$$\Gamma_q \times \Gamma_q \ni (\gamma, \gamma') \longmapsto \chi(\gamma, \gamma') \in S^1.$$

Funkcja χ jest elementem $M(C_\infty(\Gamma_q) \otimes C_\infty(\Gamma_q))$. Wyreprezentujemy algebrę $C_\infty(\Gamma_q)$ w przestrzeni Hilberta $H = L^2(\Gamma_q)$ przez operatory mnożenia. Wtedy χ jest unitarnym elementem $B(H \otimes H)$. Zauważmy, że jeśli zdefiniujemy $U \in B(H \otimes H)$ przez

$$(Ug)(\gamma, \gamma') = g(\gamma\gamma', \gamma')$$

dla wszystkich $g \in H \otimes H$, to U jest poręcznym operatorem moltiplikatywnym unitarnym (patrz [29]), a χ jest operatorem przystosowanym do U (*adapted unitary* w terminologii [29]):

$$U_{23}\chi_{12} = \chi_{12}\chi_{13}U_{23}.$$

Nietrudno się przekonać, że zbiór

$$\{(\text{id} \otimes \omega)\chi^* : \omega \in B(H)_*\}^{\text{domknięcie w normie}}$$

jest równy obrazowi $C_\infty(\Gamma_q)$ przy zanurzeniu w $B(H)$. Punkt 6. twierdzenia 1.6 z pracy [29] daje nam następujące stwierdzenie

Stwierdzenie 7.19 *Algebra $C_\infty(\Gamma_q)$ jest generowana przez kwantową rodzinę elementów stowarzyszonych $\chi \in M(C_\infty(\Gamma_q) \otimes C_\infty(\Gamma_q))$.*

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia 7.15.

DOWÓD TWIERDZENIA 7.15. Dla $f_0 \in C_\infty(\Gamma_q)$ niech

$$\pi(f_0) = f_0(T).$$

Wówczas π jest niezdegenerowaną reprezentacją $C_\infty(\Gamma_q)$ w H , tj. $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\Gamma_q), \mathcal{K}(H))$. Funkcje f i g dane przez

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \gamma, \\ g(\gamma) &= \gamma^{-1} \end{aligned} \tag{7.22}$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$, są elementami stowarzyszonymi z $C_\infty(\Gamma_q)$ i mamy

$$\begin{aligned} f(T) &= T, \\ g(T) &= T^{-1}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

„1. $\Rightarrow$ 2.” Ciągłość i ograniczoność odwzorowania

$$\Gamma_q \ni \gamma \longmapsto \chi(T, \gamma) \in M(A)$$

oznacza dokładnie tyle, że

$$(\text{id} \otimes \pi)\chi \in M(C_\infty(\Gamma_q) \otimes A),$$

Ponieważ χ generuje algebrę $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$, mamy $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\Gamma_q), A)$ i na mocy (7.23),

$$\begin{aligned} T &= f(T) \eta A, \\ T^{-1} &= g(T) \eta A. \end{aligned}$$

„1. $\Leftarrow$ 2.” Algebra $C_\infty(\Gamma_q)$ jest generowana przez elementy $f, g \in C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$, dane przez (7.22). Jeśli więc

$$\begin{aligned}\pi(f) &= T \eta A, \\ \pi(g) &= T^{-1} \eta A,\end{aligned}$$

to $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\Gamma_q), A)$.

Nietrudno się przekonać, że dla $\gamma \rightarrow \gamma_0$ w Γ_q , funkcje

$$\Gamma_q \ni \gamma' \mapsto \chi(\gamma, \gamma') \in \mathbb{C}$$

tworzą ograniczony ciąg zbieżny niemal jednostajnie do

$$\Gamma_q \ni \gamma' \mapsto \chi(\gamma_0, \gamma') \in \mathbb{C}.$$

Dla funkcji ograniczonych zbieżność niemal jednostajna pokrywa się ze zbieżnością w topologii strict, a więc na mocy lematu 7.16, zbieżność ta nadal ma miejsce po zastosowaniu morfizmu π . Innymi słowy odwzorowanie

$$\Gamma_q \ni \gamma \mapsto \chi(T, \gamma) \in M(A)$$

jest ciągle w topologii strict.

Q.E.D.

Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech T_1, T_2 będą mocno przemiennymi operatorami normalnymi działającymi w H takimi, że $\text{Sp } T_1, \text{Sp } T_2 \subset \overline{\Gamma}_q$ oraz $\ker T_1 = \ker T_2 = \{0\}$. Rozważmy przemienną C^* -algebrę $C_\infty(\Gamma_q \times \Gamma_q)$. Jest ona generowana przez cztery elementy stowarzyszone f_1, g_1, f_2, g_2 zdefiniowane wzorami

$$\begin{aligned}f_1(\gamma_1, \gamma_2) &= \gamma_1, & g_1(\gamma_1, \gamma_2) &= \gamma_1^{-1}, \\ f_2(\gamma_1, \gamma_2) &= \gamma_2, & g_2(\gamma_1, \gamma_2) &= \gamma_2^{-1}\end{aligned}$$

(por. [28]). Rozważmy teraz odwzorowanie

$$\pi: C_\infty(\Gamma_q \times \Gamma_q) \ni f \mapsto f(T_1, T_2) \in B(H).$$

π jest niezdegenerowaną reprezentacją $C_\infty(\Gamma_q \times \Gamma_q)$ w H . Jest jasne, że

$$\begin{aligned}\pi(f_1) &= T_1, & \pi(g_1) &= T_1^{-1}, \\ \pi(f_2) &= T_2, & \pi(g_2) &= T_2^{-1}.\end{aligned}$$

Niech A będzie niezdegenerowaną C^* -podalgebrą w $B(H)$ i przypuśćmy, że $T_i, T_i^{-1} \eta A$ dla $i = 1, 2$. Wówczas $\pi \in \text{Mor}(C_\infty(\Gamma_q \times \Gamma_q), A)$ i w konsekwencji

$$f(T_1, T_2) \in M(A)$$

dla dowolnej funkcji $f \in M(C_\infty(\Gamma_q \times \Gamma_q)) = C_b(\Gamma_q \times \Gamma_q)$. Udowodniliśmy więc następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 7.20 *Niech T_1, T_2 będą mocno przemiennymi operatorami normalnymi działającymi w przestrzeni Hilberta H i niech A będzie niezdegenerowaną C^* -podalgebrą w $B(H)$. Załóżmy, że $\text{Sp } T_1, \text{Sp } T_2 \subset \bar{\Gamma}_q$, $\ker T_1 = \ker T_2 = \{0\}$, oraz że operatory T_1, T_1^{-1}, T_2 i T_2^{-1} są stowarzyszone z A . Wówczas dla dowolnej funkcji $f \in C_b(\Gamma_q \times \Gamma_q)$, mamy $f(T_1, T_2) \in M(A)$.*

Na koniec niniejszego podrozdziału podamy twierdzenie mówiące o algebraicznych konsekwencjach relacji komutacyjnych rozważanych w rozdziale 6 w kontekście relacji stowarzyszenia.

Twierdzenie 7.21 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, $A \subset B(H)$ niezdegenerowaną C^* -podalgebrą i niech para $(R, S) \in \mathcal{D}_H$ będzie taka, że $R, S \eta A$. Wówczas*

1. *operator $S \dot{+} R$ jest stowarzyszony z A ,*
2. *operator RS jest stowarzyszony z A .*

DOWÓD. **Ad 1.** Na mocy wzoru (6.33), mamy dla wszystkich $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$

$$\mathbb{F}_q(\gamma(S \dot{+} R)) = \mathbb{F}_q(\gamma R)\mathbb{F}_q(\gamma S)$$

a ponieważ składanie operatorów jest operacją ciągłą (na zbiorach ograniczonych) w topologii strict na $M(A)$, twierdzenie 7.14 zapewnia nam $(S \dot{+} R) \eta A$.

Ad 2. Stosując do obu stron wzoru (6.23) funkcję $\mathbb{F}_q$ otrzymujemy

$$\mathbb{F}_q(S \dot{+} RS) = \mathbb{F}_q(R)^*\mathbb{F}_q(S)\mathbb{F}_q(R).$$

Z drugiej strony, ponieważ $(RS, S) \in \mathcal{D}_H$, mamy

$$\mathbb{F}_q(S \dot{+} RS) = \mathbb{F}_q(RS)\mathbb{F}_q(S)$$

na mocy (6.33). Zestawiając te dwie formuły dostajemy

$$\mathbb{F}_q(RS) = \mathbb{F}_q(R)^*\mathbb{F}_q(S)\mathbb{F}_q(R)\mathbb{F}_q(S)^*$$

i takie samo rozumowanie jak w dowodzie punktu 1. daje $RS \eta A$.

Q.E.D.

7.3 Iloczyn krzyżowy

Zajmiemy się teraz konstrukcją C^* -algebry związanej z relacjami komutacyjnymi (7.1). Przyjmijmy oznaczenie $B = C_\infty(\bar{\Gamma}_q)$. Lokalnie zwarta grupa abelowa Γ_q działa w naturalny sposób na przestrzeni $\bar{\Gamma}_q$, a tym samym na algebrze B . Oznaczmy to działanie przez β :

$$(\beta_\gamma f)(\gamma') = f(\gamma\gamma')$$

dla $\gamma \in \Gamma_q$, $\gamma' \in \overline{\Gamma}_q$ i $f \in B$. Trójka (B, Γ_q, β) tworzy tak zwany układ dynamiczny. Będziemy badać związaną z tym układem algebrę

$$A_{cp} = B \rtimes_{\beta} \Gamma_q.$$

Przypomnimy konstrukcję i własności tej algebry (patrz [11], [15]). Na przestrzeni $C_c(\Gamma_q, B)$ funkcji ciągłych z Γ_q do C^* -algebry B o zwartym nośniku wprowadzamy strukturę $*$ -algebry kładąc

$$\begin{aligned} F^*(\gamma) &= \beta_{\gamma}(F(\gamma^{-1})^*), \\ (F \star G)(\gamma) &= \int_{\Gamma_q} F(\gamma') \beta_{\gamma'}(G(\gamma'^{-1}\gamma)) dh(\gamma'), \end{aligned}$$

gdzie $F, G \in C_c(\Gamma_q, B)$. Wzór

$$\|f\|_1 = \int_{\Gamma_q} \|f(\gamma)\| dh\gamma$$

definiuje normę na $C_c(\Gamma_q, B)$, a uzupełnienie $C_c(\Gamma_q, B)$ w normie $\|\cdot\|_1$ jest $*$ -algebrą Banacha, którą oznaczamy symbolem $L^1(\Gamma_q, B)$. Algebra A_{cp} jest z definicji C^* -algebrą obwiednią $L^1(\Gamma_q, B)$. W naszym przypadku jest ona izomorficzna z normowym domknięciem obrazu dowolnej wiernej $*$ -reprezentacji $L^1(\Gamma_q, B)$ w jakiejś przestrzeni Hilberta. Jest ona C^* -algebrą, którą nazywamy *iloczynem krzyżowym* algebry B przez działanie grupy Γ_q .

Ponieważ istnieje wierna reprezentacja $L^1(\Gamma_q, B)$, możemy traktować A_{cp} jako uzupełnienie $C_c(\Gamma_q, B)$ w pewnej C^* -normie. W ten sposób możemy dla dowolnego elementu $f \in B$ zdefiniować operator liniowy $j(f): A_{cp} \rightarrow A_{cp}$, którego działanie na $F \in C_c(\Gamma_q, B)$ dane jest wzorem

$$(j(f)F)(\gamma) = fF(\gamma)$$

dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$. Nietrudno sprawdzić, że $j(f)$ jest elementem $M(A_{cp})$ oraz, że $j: B \rightarrow M(A_{cp})$ jest zanurzeniem C^* -algebr. Ponadto każdy element γ grupy Γ_q zadaje operator $U_{\gamma} \in M(A_{cp})$ dany wzorem

$$(U_{\gamma}F)(\gamma') = \beta_{\gamma}(F(\gamma^{-1}\gamma'))$$

dla dowolnej funkcji $F \in C_c(\Gamma_q, B)$. Nietrudno sprawdzić, że dla każdego $\gamma \in \Gamma_q$, zdefiniowane powyżej U_{γ} jest unitarnym elementem $M(A_{cp})$ i $U_{\gamma}^* = U_{\gamma^{-1}}$. Ponadto $\gamma \mapsto U_{\gamma}$ jest reprezentacją Γ_q w A_{cp} zgodnie z terminologią [32].

Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech π_0 będzie reprezentacją C^* -algebry B . Dalej niech u będzie unitarną reprezentacją grupy Γ_q w przestrzeni H . Powiemy, że (π_0, u) jest kowariantną reprezentacją układu dynamicznego (B, Γ_q, β) , jeśli

$$u_{\gamma}\pi_0(f)u_{\gamma}^* = \pi_0(\beta_{\gamma}(f))$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$. Iloczyn krzyżowy A_{cp} ma następującą własność uniwersalności

Stwierdzenie 7.22 *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy kowariantnymi reprezentacjami (B, Γ_q, β) , a niezdegenerowanymi reprezentacjami A_{cp} . Dla kowariantnej reprezentacji (π_0, u) odpowiadająca jej reprezentacja π dana jest przez*

$$\pi(F) = \int_{\Gamma_q} \pi_0(F(\gamma)) u_\gamma dh(\gamma) \quad (7.24)$$

dla $F \in L^1(\Gamma_q, B)$.

Jednym z podstawowych wzorów teorii iloczynów krzyżowych jest

$$U_\gamma j(f) U_\gamma^* = j(\beta_\gamma(f)). \quad (7.25)$$

Ponieważ j jest zanurzeniem, przyjęło się opuszczać symbol j i zapisywać (7.25) jako

$$U_\gamma f U_\gamma^* = \beta_\gamma(f)$$

dla wszystkich $f \in B$ i $\gamma \in \Gamma_q$. Na mocy twierdzenia SNAG ([14, Ch. VI, Thm. 29]) i twierdzenia 7.15 istnieje element a stowarzyszony z A_{cp} taki, że $\text{Sp } a \subset \bar{\Gamma}_q$, element a jest odwracalny, $a^{-1} \eta A$ oraz

$$U_\gamma = \chi(a, \gamma)$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$. Niech b będzie elementem stowarzyszonym z algebrą B takim, że

$$b(\gamma) = \gamma$$

dla wszystkich $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$. Jest jasne, że $\text{Sp } b = \bar{\Gamma}_q$. Ponieważ zanurzenie B w $M(A_{cp})$ jest morfizmem, możemy traktować elementy stowarzyszone z B jako elementy stowarzyszone z A_{cp} . W szczególności $b \eta A_{cp}$. Nietrudno sprawdzić, że

$$\beta_\gamma(b) = \gamma b$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$. W terminach reprezentacji U_γ oznacza to, że $U_\gamma b = \gamma b U_\gamma$, czyli

$$\chi(a, \gamma) b \chi(a, \gamma)^* = \gamma b.$$

Oznacza to, że dla dowolnej reprezentacji π algebry A_{cp} w przestrzeni Hilberta H_π , para $(\pi(a), \pi(b)) \in \mathcal{G}_{H_\pi}$.

Stwierdzenie 7.23 *Algebra A_{cp} jest generowana przez elementy a, a^{-1} oraz b .*

DOWÓD. Na początek udowodnimy, że zbiór

$$\text{span} \{fg(a) : f \in B, g \in C_\infty(\Gamma_q)\} \quad (7.26)$$

jest gęsty w A_{cp} . Niech $g \in C_\infty(\Gamma_q)$ będzie transformatą Fouriera funkcji całkownej φ :

$$g(\gamma) = \int_{\Gamma_q} \chi(\gamma, \gamma') \varphi(\gamma') dh(\gamma').$$

Wtedy

$$g(a) = \int_{\Gamma_q} \chi(a, \gamma) \varphi(\gamma) dh(\gamma) = \int_{\Gamma_q} U_\gamma \varphi(\gamma) dh(\gamma) \in M(A_{\text{cp}}).$$

Weźmy $F \in C_c(\Gamma_q, B)$ oraz $f \in B$ i obliczmy działanie $fg(a) \in M(A_{\text{cp}})$ na F :

$$\begin{aligned} (fg(a)F)(\gamma') &= f \int_{\Gamma_q} (U_\gamma F)(\gamma') \varphi(\gamma') dh(\gamma') \\ &= \int_{\Gamma_q} f \beta_\gamma(F(\gamma^{-1}\gamma')) \varphi(\gamma') dh(\gamma') \\ &= \int_{\Gamma_q} \varphi(\gamma') f \beta_\gamma(F(\gamma^{-1}\gamma')) dh(\gamma') \\ &= G \star F, \end{aligned}$$

gdzie funkcja $G \in L^1(\Gamma_q, B)$ dana jest przez

$$G(\gamma) = \varphi(\gamma)f.$$

Wykazaliśmy, że elementy postaci $fg(a)$, gdzie $f \in B$, a $g \in C_\infty(\Gamma_q)$ jest transformatą Fouriera funkcji całkownej, należą do A_{cp} . Ponadto jest jasne, że elementy tej postaci są liniowo gęste w $L^1(\Gamma_q, B)$, a co za tym idzie w A_{cp} . Ponieważ transformaty Fouriera funkcji całkownych są gęste w $C_\infty(\Gamma_q)$ mamy $fg(a) \in A$ dla wszystkich $f \in B$ i $g \in C_\infty(\Gamma_q)$.

Skorzystamy z twierdzenia 3.3 z pracy [28]. Ponieważ dla dowolnych dwóch różnych reprezentacji A_{cp} istnieje element zbioru (7.26), na którym reprezentacje te są różne, widzimy, że elementy a i b rozdzielają reprezentacje A_{cp} (pamiętamy, że każdy element $f \in B$ jest funkcją od b , a dokładniej $f = f(b)$). Tym samym rodzina $\{a, a^{-1}, b\}$ spełnia założenie 1. tego twierdzenia. Niech

$$\begin{aligned} r_1 &= (I + b^*b)^{-1}, \\ r_2 &= (I + a^*a)^{-1}, \\ r_3 &= (I + a^{-1*}a^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Mamy

$$r_1 r_2 r_3 = fg(a),$$

gdzie $f(\gamma) = (1 + |y|^2)^{-1}$ dla $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$, natomiast $g(\gamma') = (|\gamma'| + |\gamma'|^{-1})^{-2}$ dla wszystkich $\gamma' \in \Gamma_q$. Oznacza to, że spełnione jest założenie 2. twierdzenia 3.3 z [28]. W konsekwencji C^* -algebra A_{cp} jest generowana przez stowarzyszone z nią elementy a, a^{-1} i b . Q.E.D.

Tak jak już wcześniej wspomnieliśmy, dla dowolnej reprezentacji π C^* -algebry A_{cp} w przestrzeni Hilberta H_π , para $(\pi(a), \pi(b)) \in \mathcal{G}_{H_\pi}$. Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne:

Stwierdzenie 7.24 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(a_0, b_0) \in \mathcal{G}_H$. Wówczas istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\pi \in \text{Rep}(A_{cp}, H)$ taka, że $\pi(a) = a_0$ oraz $\pi(b) = b_0$. Jeśli A jest niezdegenerowaną C^* -podalgebrą w $B(H)$ i $a_0, a_0^{-1}, b_0 \in A$, to $\pi \in \text{Mor}(A_{cp}, A)$.*

DOWÓD. Dla $f \in B$ połóżmy

$$\pi_0(f) = f(b_0).$$

π_0 jest niezdegenerowaną reprezentacją B w H i $\pi_0(b) = b_0$. Ponieważ $(a_0, b_0) \in \mathcal{G}_H$, mamy $\chi(a_0, \gamma)b_0\chi(a_0, \gamma)^* = \gamma b_0$ dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$. Stąd

$$\begin{aligned} \chi(a_0, \gamma)\pi_0(f)\chi(a_0, \gamma)^* &= \chi(a_0, \gamma)f(b_0)\chi(a_0, \gamma)^* \\ &= f(\gamma b_0) = (\beta(f))(b_0) = \pi(\beta(f)). \end{aligned}$$

Innymi słowy, $(\pi_0, (\chi(a, \gamma))_{\gamma \in \Gamma_q})$ jest kowariantną reprezentacją układu dynamicznego (B, Γ_q, β) w przestrzeni Hilberta H . Niech π będzie reprezentacją $A_{cp} = B \rtimes_{\beta} \Gamma_q$ odpowiadającą parze $(\pi_0, (\chi(a, \gamma))_{\gamma \in \Gamma_q})$. Wówczas $\pi(\chi(a, \gamma)) = \chi(a_0, \gamma)$ dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$ (patrz (7.24)), a co za tym idzie $\pi(a) = a_0$. Ponadto reprezentacja π obcięta do B pokrywa się ze zdefiniowaną wcześniej reprezentacją π_0 . W szczególności $\pi(b) = b_0$.

Druga część stwierdzenia wynika z definicji generowania C^* -algebry przez elementy stowarzyszone [28, Definition 3.1]. Q.E.D.

7.4 Grupa kwantowa

Skonstruowawszy modularny operator mультplikatywny unitarny, przejdziemy do zastosowania teorii opisanej w [4, 29] i [20]. Efektem końcowym będzie C^* -algebraiczna grupa kwantowa, którą utożsamimy z deformacją klasycznej grupy „ $az + b$ ” odpowiadającą nowej wartości parametru deformacji q (por. rozdziały 3 i 4). C^* -algebra odpowiadająca tej grupie kwantowej okaże się izomorficzna z algebrą A_{cp} opisaną w podrozdziale 7.3.

Rozpocznijmy od zanurzenia C^* -algebry A_{cp} w $B(H)$ dla pewnej przestrzeni Hilberta H . Elementy stowarzyszone z A_{cp} stają się w ten sposób domkniętymi operatorami działającymi w H . Zauważmy, że podprzestrzeń $\ker b$ jest niezmiennicza dla całej algebry A_{cp} . Istotnie jest ona oczywiście niezmiennicza dla każdej funkcji operatora b , ale z relacji (7.1) wynika, że operatory $\text{Phase } a$ oraz $|a|^{it}$ także zachowują $\ker b$. Stąd dla każdej funkcji $g \in C_\infty(\Gamma_q)$ operator $g(a)$ zachowuje $\ker b$. Tak więc z gęstości zbioru (7.26) w A_{cp} wynika, że $A_{cp} \ker b \subset \ker b$. Zamieniając w razie potrzeby H na $(\ker b)^\perp$, możemy przyjąć, że algebra A_{cp} jest w taki sposób zanurzona w $B(H)$, że $\ker b = \{0\}$.

Przyjmijmy oznaczenia $\hat{b} = b^{-1}a$ i $\hat{a} = b^{-1}$. Niech

$$W = \mathbb{F}_q(\hat{b} \otimes b)\chi(\hat{a} \otimes I, I \otimes a).$$

Zgodnie z wnioskiem 7.13, W jest modularnym operatorem mnożącym unitarnym. Operatory Q , $\widehat{Q}$ i $\widetilde{W}$ związane z W poprzez definicję 7.11 dane są przez

$$\begin{aligned} Q &= |a|, & \widehat{Q} &= |b|, \\ \widetilde{W} &= \mathbb{F}_q(-\widehat{b}^\top \otimes qa^{-1}b)^* \chi(\widehat{a}^\top \otimes I, I \otimes a). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Zgodnie z ogólną teorią zbiorów

$$A = \{(\omega \otimes \text{id})W : \omega \in B(H)_*\}^{\text{domknięcie w normie}}$$

jest niezdegenerowaną C^* -podalgebrą w $B(H)$, a operator

$$W \in M(\mathcal{K}(H) \otimes A).$$

Poniższe stwierdzenie odsłania strukturę algebry A .

Stwierdzenie 7.25 *C^* -algebra A jest równa A_{cp} .*

DOWÓD. Ponieważ każdy domknięty operator na H jest stowarzyszony z $\mathcal{K}(H)$, mamy

$$\widehat{a}, \widehat{a}^{-1}, \widehat{b} \eta \mathcal{K}(H).$$

Pamiętamy, że $a, a^{-1}, b \eta A_{\text{cp}}$, a więc operatory $\widehat{a} \otimes I$, $\widehat{a}^{-1} \otimes I$, $I \otimes a$, $I \otimes a^{-1}$, $\widehat{b} \otimes b$ są stowarzyszone z $\mathcal{K}(H) \otimes A_{\text{cp}}$ (patrz [32, Theorem 6.1]). Na mocy stwierdzenia 7.20 i twierdzenia 7.14 mamy

$$\begin{aligned} \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) &\in M(\mathcal{K}(H) \otimes A_{\text{cp}}), \\ \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes b) &\in M(\mathcal{K}(H) \otimes A_{\text{cp}}), \end{aligned}$$

a co za tym idzie

$$W \in M(\mathcal{K}(H) \otimes A_{\text{cp}}). \quad (7.28)$$

Wiadomo (patrz [29, Twierdzenie 1.6, punkt 6.]), że algebra A jest generowana przez W , a więc (7.28) mówi nam, że reprezentacja identycznościowa jest morfizmem z A do A_{cp} . Innymi słowy $A \subset M(A_{\text{cp}})$ i zbiór AA_{cp} jest gęsty w A_{cp} :

$$\overline{AA_{\text{cp}}} = A_{\text{cp}}. \quad (7.29)$$

Udowodnimy teraz, że operatory a, a^{-1} i b są stowarzyszone z A . Dla $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$, połóżmy

$$V(\gamma) = \mathbb{F}_q(\gamma \widehat{b} \otimes b) \chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a).$$

Wówczas $V(\gamma) \in M(\mathcal{K}(H) \otimes \mathcal{K}(H))$. Korzystając z twierdzenia 7.14 łatwo pokazujemy, że odwzorowanie

$$\overline{\Gamma}_q \ni \gamma \longmapsto V(\gamma)$$

jest ciągle w topologii strict na $M(\mathcal{K}(H) \otimes \mathcal{K}(H))$. Wynika stąd, że

$$\bar{\Gamma}_q \ni \gamma \longmapsto V(\gamma)_{12} = V(\gamma) \otimes I \in M(\mathcal{K}(H) \otimes \mathcal{K}(H) \otimes A)$$

także jest ciągle w topologii strict. Stwierdzenie 7.5 mówi, że operatory unitarne $V(\gamma)$ są przystosowane do W , tj. spełniają równanie pięciokąta:

$$V(\gamma)_{13} = V(\gamma)_{12}^* W_{23} V(\gamma)_{12} W_{23}^*. \quad (7.30)$$

Ponieważ W należy do przestrzeni $M(\mathcal{K}(H) \otimes A)$, widzimy, że $(V(\gamma)_{13})_{\gamma \in \bar{\Gamma}_q}$ jest rodziną elementów $M(\mathcal{K}(H) \otimes \mathcal{K}(H) \otimes A)$ ciągłą w topologii strict, a co za tym idzie $(V(\gamma))_{\gamma \in \bar{\Gamma}_q}$ jest rodziną elementów $M(\mathcal{K}(H) \otimes A)$ ciągłą w topologii strict.

W szczególności odwzorowanie

$$\bar{\Gamma}_q \ni \gamma \longmapsto \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes b) = V(\gamma)V(0)^* \in M(\mathcal{K}(H) \otimes A)$$

jest ciągle w topologii strict i stosując ponownie twierdzenia 7.14 otrzymujemy $(\widehat{b} \otimes b)\eta(\mathcal{K}(H) \otimes A)$. Na mocy [33, Proposition A.1], wynika stąd, że $b\eta A$.

Stosując stwierdzenie 7.5 do przypadku $K = \mathbb{C}$, $\widehat{b} = 0$ i $\widehat{a} = \gamma \in \Gamma_q$ widzimy, że operator

$$V(\gamma) = \chi(\gamma, a) = \chi(a, \gamma)$$

spełnia równanie (7.30), które możemy w tej sytuacji przepisać jako

$$I \otimes \chi(a, \gamma) = (\chi(a, \gamma)^* \otimes I)W(\chi(a, \gamma) \otimes I)W^*$$

Tak jak poprzednio wnioskujemy stąd, że $(I \otimes \chi(a, \gamma))_{\gamma \in \Gamma_q}$ jest rodziną elementów $M(\mathcal{K}(H) \otimes A)$ ciągłą w topologii strict. Oznacza to, że $(\chi(a, \gamma))_{\gamma \in \Gamma_q}$ jest rodziną elementów $M(A)$ ciągłą w topologii strict i twierdzenie 7.15 pokazuje, że a oraz a^{-1} są stowarzyszone z A .

Stwierdzenie 7.23 mówi, że A_{cp} jest generowana przez a, a^{-1} i b . Ponieważ elementy te są stowarzyszone z algebrą A , odwzorowanie identycznościowe na A_{cp} jest morfizmem z A_{cp} do A . Innymi słowy $A_{\text{cp}} \subset M(A)$ i

$$\overline{A_{\text{cp}}A} = A. \quad (7.31)$$

Porównując (7.29) i (7.31) otrzymujemy $A = A_{\text{cp}}$.

Q.E.D.

Wyżej opisaliśmy algebrę A grającą rolę „algebry funkcji ciągłych, znikających w nieskończoności” na konstruowanej grupie kwantowej. Zgodnie z teorią operatorów moltiplicatywnych unitarnych ([4, 29]) struktura grupy zakodowana jest w kołącznym morfizmie $\Delta \in \text{Mor}(A, A \otimes A)$ danym przez

$$\Delta(c) = W(c \otimes I)W^*$$

dla wszystkich $c \in A$. Wartość morfizmu Δ na elementach stowarzyszonych z A obliczamy według tego samego wzoru, a więc na mocy stwierdzenia 7.4

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a, \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes I. \end{aligned}$$

Wzory te odpowiadają wzorom wprowadzonym na poziomie $*$ -algebry Hopfa w rozdziale 4.

Teoria poręcznych i modularnych operatorów moltiplikatywnych unitarnych podaje także opis grupy skalującej $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$:

$$\tau_t(c) = Q^{2it} c Q^{-2it}$$

dla wszystkich $c \in A$. Pamiętając, że $Q = |a|$, widzimy, że

$$\begin{aligned}\tau_t(a) &= a, \\ \tau_t(b) &= q^{2it} b\end{aligned}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Dokonując przedłużenia holomorficznego do punktu $t = \frac{i}{2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\tau_{i/2}(a) &= a, \\ \tau_{i/2}(b) &= q^{-1} b.\end{aligned}$$

Dalej, porównując operator $\widetilde{W}$ dany przez (7.27) ze znanym z teorii poręcznych operatorów moltiplikatywnych unitarnych wzorem

$$\widetilde{W}^* = W^{\top \otimes R}$$

widzimy, że unitarny antypod R przyjmuje na generatorach a i b wartości

$$\begin{aligned}a^R &= a^{-1}, \\ b^R &= -q a^{-1} b.\end{aligned}\tag{7.32}$$

Skorzystamy teraz ze wzoru na koodwrotność ([29, wzór (1.13)]): dziedziną κ jest $D(\tau_{i/2})$ i

$$\kappa(c) = (\tau_{i/2}(c))^R.$$

W szczególności

$$\begin{aligned}\kappa(a) &= a^{-1}, \\ \kappa(b) &= -a^{-1} b.\end{aligned}\tag{7.33}$$

Podobnie jak w przypadku komnożenia, wzory (7.33) i (7.32) są identyczne z wzorami wyprowadzonymi na poziomie $*$ -algebry Hopfa. Pozwala to stwierdzić, że skonstruowana przez nas grupa kwantowa (A, Δ) jest C^* -algebraiczną deformacją grupy „ $az + b$ ” odpowiadającą parametrowi q .

7.5 Grupa dwoista

Teoria operatorów moltiplikatywnych unitarnych dostarcza przepisu na konstruowanie grupy dwoistej do danej grupy kwantowej pochodzącej od operatora moltiplikatywnego

unitarnego. Procedura ta została opisana w pracach [4] i [29]. W niniejszym podrozdziale opiszemy grupę dwoistą do kwantowej grupy „ $az + b$ ” skonstruowanej w podrozdziale 7.4. Przy oznaczeniach tam wprowadzonych operator

$$W = \mathbb{F}_q(\widehat{b} \otimes b)\chi(\widehat{a} \otimes I, I \otimes a) \in B(H \otimes H), \quad (7.34)$$

(gdzie $(a, b) \in \mathcal{G}_H$, $\widehat{a} = b^{-1}$, $\widehat{b} = b^{-1}a$), jest modularnym operatorem masyfikatywnym unitarnym, a odpowiadająca mu grupa kwantowa (A, Δ) składa się z C^* -algebry

$$A = \{(\omega \otimes \text{id})W : \omega \in B(H)_*\}^{\text{domknięcie w normie}}$$

i kołaczego $\Delta \in \text{Mor}(A, A \otimes A)$, danego wzorem

$$\Delta(c) = W(c \otimes I)W^*$$

dla wszystkich $c \in A$.

W dalszych rozważaniach symbolem σ oznaczmy $*$ -automorfizm $B(H \otimes H)$ taki, że

$$\sigma(r \otimes s) = s \otimes r$$

dla wszystkich $r, s \in B(H)$.

C^* -algebrą mającą interpretację algebry funkcji ciągłych znikających w nieskończoności na grupie dwoistej jest

$$\widehat{A} = \{(\text{id} \otimes \omega)W^* : \omega \in B(H)_*\}^{\text{domknięcie w normie}},$$

a komnożenie $\widehat{\Delta} \in \text{Mor}(\widehat{A}, \widehat{A} \otimes \widehat{A})$ wyraża się wzorem

$$\widehat{\Delta}(d) = \sigma(W^*(I \otimes d)W)$$

dla wszystkich $d \in \widehat{A}$.

Podobnie jak w przypadku deformacji rozpatrywanych w [31], grupa dwoista do kwantowej grupy „ $az + b$ ” skonstruowanej w podrozdziale 7.4 jest izomorficzna z grupą przeciwną, tj. tą samą grupą z zamienioną kolejnością mnożenia.

Twierdzenie 7.26 *Operatory $\widehat{a}$ i $\widehat{b}$ są stowarzyszone z C^* -algebrą $\widehat{A}$. Istnieje izomorfizm $\Psi: A \rightarrow \widehat{A}$ taki, że $\Psi(a) = \widehat{a}$ oraz $\Psi(b) = \widehat{b}$. Izomorfizm ten spełnia*

$$\widehat{\Delta}(\Psi(c)) = \sigma(\Psi \otimes \Psi)\Delta(c) \quad (7.35)$$

dla wszystkich $c \in A$.

DOWÓD. Ponieważ $\ker b = \{0\}$, mamy $(b, a), (\widehat{b}, \widehat{a}) \in \mathcal{D}_H$. Ponadto

$$\begin{aligned} \{\chi(\widehat{a}, \gamma)\chi(\widehat{b}, \gamma') : \gamma, \gamma' \in \Gamma_q\} &= \{\chi(b^{-1}, \gamma)\chi(b^{-1}a, \gamma') : \gamma, \gamma' \in \Gamma_q\} \\ &= \{\chi(b^{-1}, \gamma\gamma')\chi(a, \gamma') : \gamma, \gamma' \in \Gamma_q\} \\ &= \{\chi(b, (\gamma\gamma')^{-1})\chi(a, \gamma') : \gamma, \gamma' \in \Gamma_q\} \\ &= \{\chi(b, \gamma'')\chi(a, \gamma') : \gamma', \gamma'' \in \Gamma_q\}, \end{aligned}$$

a więc krotności par (b, a) i $(\widehat{b}, \widehat{a})$ w przestrzeni H są takie same. Korzystając ze stwierdzenia 6.9 nietrudno wykazać, że pary te są unitarnie równoważne, to znaczy, że istnieje operator unitarny $Z \in B(H)$ taki, że

$$\begin{aligned} Z^*bZ &= \widehat{b}, \\ Z^*aZ &= \widehat{a}. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Niech Ψ będzie automorfizmem $B(H)$ wyznaczonym przez Z :

$$\Psi(m) = Z^*mZ$$

dla wszystkich $m \in B(H)$. Porównując (7.36) z (7.34) widzimy, że

$$\sigma((\text{id} \otimes \Psi)W) = (\text{id} \otimes \Psi)W.$$

Zatem dla każdego $\omega \in B(H)_*$ mamy

$$\begin{aligned} \Psi((\omega \otimes \text{id})W) &= (\omega \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Psi)W \\ &= (\omega \otimes \text{id})\sigma((\text{id} \otimes \Psi)W) \\ &= (\text{id} \otimes \omega)(\text{id} \otimes \Psi)W \\ &= (\text{id} \otimes Z\omega Z^*)W. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Ponieważ odwzorowanie

$$B(H)_* \ni \omega \longmapsto Z\omega Z^* \in B(H)_*$$

jest bijekcją, wzór (7.37) pokazuje, że $\Psi(A) = \widehat{A}$.

Zbadamy teraz relację między Ψ a komnożeniem na $\widehat{A}$. Weźmy $c = (\omega \otimes \text{id})W \in A$. Wtedy

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(\Psi(c)) &= \widehat{\Delta}((\text{id} \otimes Z\omega Z^*)W) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes Z\omega Z^*)(\widehat{\Delta} \otimes \text{id})W \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes Z\omega Z^*)(\sigma \otimes \text{id})(W_{12}^* W_{23} W_{12}) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes Z\omega Z^*)(\sigma \otimes \text{id})(W_{13} W_{23}) \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes Z\omega Z^*)W_{23} W_{13}. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} (\Psi \otimes \Psi)\Delta(c) &= (\Psi \otimes \Psi)\Delta((\omega \otimes \text{id})W) \\ &= (\omega \otimes \Psi \otimes \Psi)((\text{id} \otimes \Delta)W) \\ &= (\omega \otimes \Psi \otimes \Psi)(W_{23} W_{12} W_{23}^*) \\ &= (\omega \otimes \Psi \otimes \Psi)(W_{12} W_{13}) \\ &= (\omega \otimes \text{id} \otimes \text{id})((\text{id} \otimes \Psi)W)_{12} ((\text{id} \otimes \Psi)W)_{13} \\ &= (\omega \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\sigma(\text{id} \otimes \Psi)W)_{12} (\sigma(\text{id} \otimes \Psi)W)_{13} \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega)((\text{id} \otimes \Psi)W)_{13} ((\text{id} \otimes \Psi)W)_{23} \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \omega)(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Psi)W_{13} W_{23} \\ &= (\text{id} \otimes \text{id} \otimes Z\omega Z^*)W_{13} W_{23}, \end{aligned}$$

a co za tym idzie

$$\sigma(\Psi \otimes \Psi)\Delta(c) = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes Z\omega Z^*)W_{23}W_{13}. \quad (7.39)$$

Porównując (7.38) i (7.39) otrzymujemy (7.35).

Q.E.D.

7.6 Przestrzeń jednorodna

W niniejszym podrozdziale podamy konstrukcję przestrzeni jednorodnej dla kwantowej grupy „ $az + b$ ” skonstruowanej w podrozdziale 7.4. Mając na względzie przejrzystość zapisu będziemy tę grupę oznaczać symbolem $\mathcal{G}$. Odpowiadającą jej C^* -algebrę i komnożenie będziemy, tak jak w poprzednich podrozdziałach, oznaczać A oraz Δ . Należy zwrócić uwagę na to, że w literaturze na temat C^* -algebraicznych grup kwantowych nie ma powszechnie uznanej definicji przestrzeni jednorodnej dla niezawartej grupy kwantowej. Definicja, którą podamy w tym podrozdziale, jest przystosowana do szczególnej struktury C^* -algebry odpowiadającej badanej przez nas grupie kwantowej. Ważną rolę odgrywać będzie fakt, że badana w rozdziałach 5 i 6 grupa Γ_q jest samodualna: $\Gamma_q = \widehat{\Gamma}_q$.

Lokalnie zwarta grupa Γ_q może być traktowana jako C^* -algebraiczna grupa kwantowa. Odpowiada jej C^* -algebra $C_\infty(\Gamma_q)$ z komnożeniem $\Delta_{\Gamma_q} \in \text{Mor}(C_\infty(\Gamma_q), C_\infty(\Gamma_q) \otimes C_\infty(\Gamma_q))$ danym przez

$$(\Delta_{\Gamma_q} f)(\gamma, \gamma') = f(\gamma\gamma')$$

dla wszystkich $\gamma, \gamma' \in \Gamma_q$ oraz wszystkich $f \in C_\infty(\Gamma_q)$ (jak zwykle utożsamiamy $C_\infty(\Gamma_q) \otimes C_\infty(\Gamma_q)$ z $C_\infty(\Gamma_q \times \Gamma_q)$). Okazuje się, że Γ_q jest podgrupą w $\mathcal{G}$.

Stwierdzenie 7.27 *Istnieje dokładnie jeden surjektywny $\pi \in \text{Mor}(A, C_\infty(\Gamma_q))$ taki, że*

$$\Delta_{\Gamma_q} \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta. \quad (7.40)$$

DOWÓD. Wyreprezentujmy $C_\infty(\Gamma_q)$ wiernie w przestrzeni Hilberta $L^2(\Gamma_q)$. Elementy stowarzyszone z $C_\infty(\Gamma_q)$ dane przez

$$\begin{aligned} a_0(\gamma) &= \gamma, \\ b_0(\gamma) &= 0 \end{aligned}$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_q$ stają się operatorami normalnymi działającymi w $L^2(\Gamma_q)$. Nietrudno sprawdzić, że $(a_0, b_0) \in \mathcal{G}_{L^2(\Gamma_q)}$. Teraz stwierdzenie 7.24 zapewnia nam istnienie i jedyność π , a surjektywność i relacja (7.40) są niemal oczywiste. Q.E.D.

Aby wyjaśnić proponowaną niżej definicję przestrzeni jednorodnej $\mathcal{G}/\Gamma_q$ odwołajmy się do sytuacji klasycznej. Przypuśćmy, że G jest lokalnie zwartą grupą, a H jej domkniętą podgrupą. Wówczas grupa G działa z lewej strony na przestrzeni lewych warstw G/H . Przestrzeń ograniczonych funkcji ciągłych na G/H można utożsamiać z przestrzenią ograniczonych funkcji ciągłych na G , które są stałe na lewych warstwach H , tj. takich $x: G \rightarrow \mathbb{C}$, że

$$x(gh) = x(g) \quad (7.41)$$

dla wszystkich $g \in G$ i $h \in H$. Znacznie trudniej jest wyróżnić w ten sposób przestrzeń funkcji ciągłych znikających w nieskończoności na G/H . Załóżmy zatem, że G ma topologicznie strukturę iloczynu kartezjańskiego:

$$G = H \times (G/H). \quad (7.42)$$

Wówczas funkcje ciągłe na G/H znikające w nieskończoności odpowiadają dokładnie tym ciągłym i ograniczonym funkcjom x spełniającym (7.42), dla których funkcja

$$G = H \times (G/H) \ni g = (h, k) \mapsto x(h, k)f(h) \in \mathbb{C}$$

znika w nieskończoności na G dla dowolnej funkcji f ciągłej i znikającej w nieskończoności na H .

Przykładem opisanej powyżej sytuacji jest klasyczna grupa „ $az + b$ ” i jej podgrupa złożona z zespolonych homotetii. Istotnie klasyczna grupa „ $az + b$ ” jest iloczynem półprostym podgrupy homotetii przez podgrupę translacji izomorficzną z addytywną grupą $\mathbb{C}$. Tak więc topologicznie grupa ta jest równa $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, gdzie homotetie utożsamiliśmy z $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Oczywiście przestrzenią jednorodną G/H jest w tym przypadku $\mathbb{C}$.

Motywowani przykładem klasycznej grupy „ $az + b$ ” podamy teraz definicję kwantowej przestrzeni jednorodnej $\mathcal{G}/\Gamma_q$. Przypomnijmy, że $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_q}$ jest reprezentacją Γ_q w A (tj. rodziną elementów unitarnych $M(A)$ taką, że $U_{\gamma_1}U_{\gamma_2} = U_{\gamma_1\gamma_2}$, i że odwzorowanie $\gamma \mapsto U_\gamma$ jest ciągłe w topologii strict) pochodzącą ze struktury iloczynu krzyżowego.

Definicja 7.28 *Definiujemy przestrzeń $C_\infty(\mathcal{G}/\Gamma_q)$ odpowiadającą przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych znikających w nieskończoności na przestrzeni jednorodnej $\mathcal{G}/\Gamma_q$ jako zbiór tych $x \in M(A)$, dla których*

1. $(\text{id} \otimes \pi)\Delta(x) = x \otimes I$,
2. $xf(a) \in A$ dla wszystkich $f \in C_\infty(\Gamma_q)$,
3. *odwzorowanie*

$$\Gamma_q \ni \gamma \mapsto U_\gamma x U_\gamma^* \in M(A)$$

jest ciągłe w normie.

Punkt 1. odpowiada bezpośrednio warunkowi (7.41). Dalej zauważmy, że ponieważ $\text{Sp } a \subset \overline{\Gamma}_q$ i $a^{-1}\eta A$, możemy traktować a jako „współrzedną wzdłuż Γ_q ”. Tak więc punkt 2. definicji 7.28 mówi, że jeśli pomnożymy x przez funkcję zależącą tylko od współrzednej wzdłuż Γ_q (tj. funkcję od a), która znika w nieskończoności na podgrupie Γ_q , to iloczyn będzie znikał w nieskończoności na $\mathcal{G}$, czyli będzie należał do A . Warunek 3. nie ma bezpośredniego odpowiednika w sytuacji klasycznej. Jest on jednak wygodny, gdyż występuje on w znanej teorii Landstada iloczynów krzyżowych przez grupy przemienne [11].¹

¹W sytuacji klasycznej warunek ten jest pusty, gdyż automorfizmy wewnętrzne algebr przemienne są trywialne. Zwróćmy jednak uwagę na to, że w szczególnej sytuacji klasycznej pary $H \subset G$ takiej, że H jest grupą przemienne i samodualną, istnieje odpowiednik reprezentacji $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_q}$. Jest to rodzina $(U_h)_{h \in H}$ funkcji na G taka, że

$$U_{h'} : G = H \times (G/H) \ni (h, k) \mapsto \langle h', h \rangle.$$

Będziemy potrzebować następującego lematu:

Lemat 7.29 *Niech $x \in M(A)$ będzie takim elementem, że odwzorowanie $\Gamma_q \ni \gamma \mapsto U_\gamma x U_\gamma^*$ jest ciągłe w normie i założymy, że $xf(a) \in A$ dla wszystkich $f \in C_\infty(\Gamma_q)$. Wówczas $f(a)x \in A$ dla wszystkich $f \in C_\infty(\Gamma_q)$.*

DOWÓD. Z ciągłości odwzorowania $\Gamma_q \ni \gamma \mapsto U_\gamma x U_\gamma^*$, wnioskujemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zwarte otoczenie V_ε punktu $1 \in \Gamma_q$ takie, że

$$\|U_\gamma x - x U_\gamma\| < \varepsilon$$

dla każdego $\gamma \in V_\varepsilon$. Możemy wybrać V_ε w taki sposób, że zbiór ten zmniejsza się do $\{1\}$ gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Niech

$$g_\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} (\text{miara Haara zbioru } V_\varepsilon)^{-1} & \text{dla } \gamma \in V_\varepsilon, \\ 0 & \text{dla } \gamma \notin V_\varepsilon. \end{cases}$$

i niech $\widehat{g}_\varepsilon$ będzie transformatą Fouriera funkcji g_ε :

$$\widehat{g}_\varepsilon(\gamma) = \int_{\Gamma_q} g_\varepsilon(\gamma') \chi(\gamma, \gamma') dh(\gamma').$$

Ponieważ

$$g_\varepsilon(a) = \int_{\Gamma_q} g_\varepsilon(\gamma') \chi(a, \gamma') dh(\gamma') = \int_{\Gamma_q} g_\varepsilon(\gamma') U_{\gamma'} dh(\gamma'),$$

mamy

$$\|\widehat{g}_\varepsilon(a)x - x\widehat{g}_\varepsilon(a)\| = \left\| \int_{\Gamma_q} g_\varepsilon(\gamma) (U_\gamma x - x U_\gamma) d\gamma \right\| \leq \int_{\Gamma_q} g_\varepsilon(\gamma) \|U_\gamma x - x U_\gamma\| d\gamma \leq \varepsilon.$$

Stąd dla każdej funkcji $f \in C_\infty(\Gamma_q)$

$$\|f(a)\widehat{g}_\varepsilon(a)x - f(a)x\widehat{g}_\varepsilon(a)\| \leq \|f(a)\|\varepsilon.$$

Funkcje g_ε zostały skonstruowane tak, że $f(a)\widehat{g}_\varepsilon(a) \rightarrow f(a)$ w normie, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$. Teraz skoro

$$\|f(a)x - f(a)x\widehat{g}_\varepsilon(a)\| \leq \|(f(a) - f(a)\widehat{g}_\varepsilon(a))x\| + \|f(a)\widehat{g}_\varepsilon(a)x - f(a)x\widehat{g}_\varepsilon(a)\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

oraz $f(a)x\widehat{g}_\varepsilon(a) = f(a)(x\widehat{g}_\varepsilon(a)) \in M(A)A \subset A$, widzimy, że $f(a)x \in A$. Q.E.D.

Stwierdzenie 7.30 *Przestrzeń $C_\infty(\mathcal{G}/\Gamma_q)$ jest C^* -algebrą.*

DOWÓD. Jest jasne, że zbiór elementów spełniających warunki 1. i 3. definicji 7.28 jest C^* -algebrą. Pozostaje więc wykazać, że jeśli x spełnia warunki 2. i 3. tej definicji, to x^* także je spełnia. Z lematu 7.29 wynika, że element

$$x^* f(a) = (\overline{f}(a)x)^*$$

należy do A dla dowolnej funkcji $f \in C_\infty(\Gamma_q)$, a więc x^* spełnia warunek 3. Q.E.D.

Wiemy już, że $C_\infty(\mathcal{G}/\Gamma_q)$ jest C^* -algebrą. Możemy jednak podać bardziej konkretny jej opis.

Twierdzenie 7.31 $C_\infty(\mathcal{G}/\Gamma_q) = \{f(b) : f \in C_\infty(\overline{\Gamma}_q)\}.$

DOWÓD. Dla $\gamma \in \Gamma_q$ niech ξ_γ oznacza funkcyjonał ewaluacji w punkcie γ zdefiniowany dla $f \in C_\infty(\Gamma_q)$ jako

$$\xi_\gamma(f) = f(\gamma).$$

Dalej niech $\pi_\gamma = \xi_\gamma \circ \pi \in \text{Mor}(A, \mathbb{C})$. Mamy

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma_1} * \pi_{\gamma_2} &= (\pi_{\gamma_1} \otimes \pi_{\gamma_2}) \circ \Delta \\ &= (\xi_{\gamma_1} * \xi_{\gamma_2}) \circ (\pi \otimes \pi) \circ \Delta \\ &= (\xi_{\gamma_1} * \xi_{\gamma_2}) \circ \Delta_{\Gamma_q} \circ \pi \\ &= \xi_{\gamma_1 \gamma_2} \circ \pi = \pi_{\gamma_1 \gamma_2} \end{aligned}$$

a ponieważ

$$\begin{aligned} \pi_1 * a &= (\text{id} \otimes \xi_1 \circ \pi)(a \otimes a) = a, \\ \pi_1 * b &= (\text{id} \otimes \xi_1 \circ \pi)(a \otimes b + b \otimes I) = b, \end{aligned}$$

wzór

$$\widehat{\alpha}_\gamma(x) = \pi_\gamma * x = (\text{id} \otimes \pi_\gamma) \delta(x)$$

definiuje automorfizm C^* -algebry A i $\gamma \mapsto \widehat{\alpha}_\gamma \in \text{Aut}(A)$ jest homomorfizmem. Ponadto odwzorowanie

$$\Gamma_q \ni \gamma \longmapsto \widehat{\alpha}_\gamma(x)$$

jest ciągle dla każdego $x \in A$, co oznacza, że trójka $(A, \Gamma_q, \widehat{\alpha})$ jest układem dynamicznym.

Jest jasne, że

$$\left(\begin{array}{c} \widehat{\alpha}_\gamma(x) = x \\ \text{dla wszystkich } \gamma \in \Gamma_q \end{array} \right) \iff \left((\text{id} \otimes \pi) \Delta(x) = X \otimes I \right). \quad (7.43)$$

Dalej skoro

$$\Delta(U_\gamma) = \Delta(\chi(a, \gamma)) = \chi(a \otimes a, \gamma) = \chi(a, \gamma) \otimes \chi(a, \gamma) = U_\gamma \otimes U_\gamma,$$

mamy

$$\widehat{\alpha}_{\gamma'}(U_\gamma) = (\text{id} \otimes \pi_{\gamma'})(U_\gamma \otimes U_\gamma) = \chi(\gamma, \gamma') U_\gamma. \quad (7.44)$$

Istnienie działania $\hat{\alpha}$ grupy $\Gamma_q = \hat{\Gamma}_q$ na A o własności (7.44) oznacza, że C^* -algebra A , reprezentacja $(U_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_q}$ i działanie $\hat{\alpha}$ spełniają założenia twierdzenia Landstada ([15, Theorem 7.8.8]). Mówi ono, że istnieje układ dynamiczny (B, Γ_q, α) taki, że $A = B \rtimes_\alpha \Gamma_q$. Ponadto

$$B = \left\{ x \in M(A) : \begin{array}{l} i) \ \hat{\alpha}_\gamma(x) = x \text{ dla wszystkich } \gamma \in \Gamma_q, \\ ii) \ x\hat{g}(a), \hat{g}(a)x \in A \text{ dla wszystkich } g \in L^1(\Gamma_q), \\ iii) \text{ odwzorowanie } \Gamma_q \ni \gamma \mapsto U_\gamma x U_\gamma^* \in M(A) \text{ jest} \\ \text{ciągłe w normie} \end{array} \right\}. \quad (7.45)$$

Działanie α grupy Γ_q na B wyraża się wzorem

$$\alpha_\gamma(x) = U_\gamma x U_\gamma^*.$$

Wreszcie układ (B, Γ_q, α) jest jedyny z dokładnością do kowariantnego izomorfizmu. W szczególności $(B, \Gamma_q, \alpha) \simeq (C_\infty(\bar{\Gamma}_q), \Gamma_q, \beta)$ (patrz podrozdział 7.3).

W naszym przypadku mamy $B = C_\infty(\mathcal{G}/\Gamma_q)$ jako podzbiory $M(A)$. Istotnie: warunek *i)* pokrywa się z warunkiem 1. z definicji 7.28, na mocy (7.43). Na pierwszy rzut oka warunek *ii)* jest mocniejszy niż 2. z definicji 7.28, ale są one równoważne na mocy lematu 7.29.

Weźmy teraz $x = f(b)$, gdzie $f \in C_\infty(\bar{\Gamma}_q)$. Oczywiście $x \in M(A)$ i x spełnia warunek *i)*. Dalej równość

$$U_\gamma f(b) U_\gamma^* = f(U_\gamma b U_\gamma^*) = f(\gamma b) = (\beta_\gamma(f))(b) \quad (7.46)$$

gwarantuje, że spełniony jest warunek *iii)*.

Ponieważ $f(b)g(a) \in A$ dla wszystkich $f \in C_\infty(\bar{\Gamma}_q)$, $g \in C_\infty(\Gamma_q)$ (por. dowód stwierdzenia (7.23)) oraz dzięki lematowi 7.29, element x spełnia również warunek *iii)*. Oznacza to, że

$$\{f(b) : f \in C_\infty(\bar{\Gamma}_q)\} \subset B.$$

Zauważmy ponadto, że na mocy (7.46) inkluzja

$$C_\infty(\bar{\Gamma}_q) \ni f \longmapsto f(b) \in B$$

splata działania β i α odpowiednio na $C_\infty(\bar{\Gamma}_q)$ i B . Składając tę inkluzję z kowariantnym izomorfizmem $B \xrightarrow{\sim} C_\infty(\bar{\Gamma}_q)$ otrzymujemy kowariantne włożenie

$$C_\infty(\bar{\Gamma}_q) \hookrightarrow C_\infty(\bar{\Gamma}_q).$$

Odpowiadające mu ciągle odwzorowanie

$$\Psi: \bar{\Gamma}_q \longrightarrow \bar{\Gamma}_q$$

jest surjektywne i ekwiwariantne dla naturalnego działania Γ_q na $\bar{\Gamma}_q$. Stąd dla dowolnego $\gamma \in \bar{\Gamma}_q$ mamy

$$\Psi(\gamma) = \Psi(1 \cdot \gamma) = \Psi(1)\gamma$$

a z surjektywności Ψ wynika, że $\Psi(1) \neq 0$. Widzimy więc, że Ψ jest homeomorfizmem, a w konsekwencji zanurzenie $C_\infty(\Gamma_q) \hookrightarrow B$ jest izomorfizmem. Q.E.D.

Twierdzenie 7.31 pokazuje, że przestrzeń kwantowa $\mathcal{G}/\Gamma_q$ jest w istocie przestrzenią klasyczną: $C_\infty(\mathcal{G}/\Gamma_q) = C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$. Morfizmem C^* -algebr odpowiadającym odwzorowaniu ilorazowemu jest

$$C_\infty(\overline{\Gamma}_q) \ni f \longmapsto f(b) \in M(A). \quad (7.47)$$

Opiszemy teraz działanie kwantowej grupy $\mathcal{G}$ na przestrzeni jednorodnej $\mathcal{G}/\Gamma_q = \overline{\Gamma}_q$. Korzystając z morfizmu (7.47), możemy utożsamiać algebrę $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ z podalgebrą w $M(A)$. Przy tym utożsamieniu kanoniczny generator z algebry $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$:

$$z(\gamma) = \gamma,$$

dla wszystkich $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$, jest równy elementowi $b\eta A$. Dla $x = f(b)$ (tj. ogólnego elementu $C_\infty(\mathcal{G}/\Gamma_q)$) położmy

$$\Phi(x) = \Delta(x).$$

Dla $x = z\eta C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ mamy

$$\Phi(z) = a \otimes z + b \otimes I.$$

Ten ostatni element jest stowarzyszony z $A \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ na mocy [28, wzór (2.6)]. Jako, że $C_\infty(\overline{\Gamma}_q)$ jest generowana przez z , mamy $\Phi \in \text{Mor}(C_\infty(\overline{\Gamma}_q), A \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q))$, a z kołaczności morfizmu Δ wnioskujemy, że diagram

$$\begin{array}{ccc} C_\infty(\overline{\Gamma}_q) & \xrightarrow{\Phi} & A \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Delta \otimes \text{id} \\ A \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Phi} & A \otimes A \otimes C_\infty(\overline{\Gamma}_q) \end{array}$$

jest przemienne. Stanowi to dodatkowe uzasadnienie wyboru definicji przestrzeni jednorodnej.

Uzupełnienia

A.1 Wyprowadzenie formuły iloczynowej

Niniejsze uzupełnienie poświęcone jest dowodowi twierdzenia 5.16.

Zbadamy funkcję

$$\Gamma_q \ni \gamma \longmapsto \mathbb{F}_q(\gamma) \mathbb{F}_q(q^2 \gamma^{-1}). \quad (\text{A.1})$$

Pisząc $\gamma = q^n q^{it}$ możemy traktować prawą stronę (A.1) jako funkcję meromorficzną zmiennej $t \in \mathbb{C}$. Funkcja ta jest dana wzorem

$$\mathbb{C} \ni t \longmapsto \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 + \bar{q}^{2k} \bar{q}^{n-it}}{1 + q^{2k} q^{n+it}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \bar{q}^{2k} \bar{q}^{-n+it}}{1 + q^{2k} q^{-n-it}} = \frac{\overline{\varphi_n(t)}}{\varphi_n(t)}, \quad (\text{A.2})$$

gdzie

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k} q^{n+it}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{2k} q^{-n-it}).$$

φ_n jest funkcją całkowitą zmiennej t , której zera (wszystkie są pierwszego rzędu) tworzą zbiór

$$\Lambda = 2\pi \boldsymbol{\rho} \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right) + i(2\mathbb{Z} + n).$$

Lemat A.1 *Mamy następującą równoważność:*

$$\left(\Lambda = \overline{\Lambda} \right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Im } \boldsymbol{\rho} = \frac{N}{2\pi}, \text{ gdzie} \\ N \in 2\mathbb{Z} \end{array} \right). \quad (\text{A.3})$$

DOWÓD LEMATU A.1. „ $\Rightarrow$ ” Jeśli $\Lambda = \overline{\Lambda}$, to $\pi \overline{\boldsymbol{\rho}} \in \Lambda$. Zatem różnica $\pi \boldsymbol{\rho} - \pi \overline{\boldsymbol{\rho}}$ musi należeć do zbioru

$$2\pi \boldsymbol{\rho} \mathbb{Z} + 2i\mathbb{Z}.$$

Ponieważ $\pi \boldsymbol{\rho} - \pi \overline{\boldsymbol{\rho}}$ jest liczbą czysto urojoną, musi ona należeć do $2i\mathbb{Z}$. Innymi słowy

$$2\pi \text{Im } \boldsymbol{\rho} \in 2\mathbb{Z},$$

co jest przeformulowaniem zdania po prawej stronie (A.3).

„ $\Leftarrow$ ” Przypuśćmy, że $\text{Im } \boldsymbol{\rho} = \frac{N}{2\pi}$, gdzie N jest parzystą liczbą całkowitą. Wówczas wzór

$$\overline{\Lambda} \ni 2\pi \overline{\boldsymbol{\rho}} \left(p + \frac{1}{2} \right) + 2ir = 2\pi \boldsymbol{\rho} \left(p + \frac{1}{2} \right) + 2i \left(r - pN - \frac{N}{2} \right) \in \Lambda$$

pokazuje prawdziwość lewej strony (A.3).

Q.E.D.

Jako, że pracujemy teraz przy założeniu, że prawa strona (A.3) jest spełniona, otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek A.2 Dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ funkcja

$$\mathbb{C} \ni t \mapsto \frac{\overline{\varphi_n(\bar{t})}}{\varphi_n(t)}$$

jest całkowita.

Zajmiemy się teraz funkcją φ_n (przy czym na razie n będziemy trzymać ustalone). Z twierdzenia Weierstrassa ([18, Twierdzenie 15.10]) mamy następującą reprezentację funkcji φ_n :

$$\varphi_n(t) = G_n(t) \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right) e^{\frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{2\lambda^2}}, \quad (\text{A.4})$$

gdzie iloczyn nieskończony jest zbieżny bezwzględnie, a G_n jest funkcją całkowitą nie przyjmującą wartości 0.

Z drugiej strony nietrudno sprawdzić, że

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + \exp\left(\frac{2k+n+it}{\rho}\right)\right) \times \begin{cases} 1 & \text{dla } k \geq 0 \\ \exp\left(-\frac{2k+n+it}{\rho}\right) & \text{dla } k < 0 \end{cases} \\ &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(\frac{2k+n+it}{2\rho}\right) 2 \cosh\left(\frac{2k+n+it}{2\rho}\right) \times \begin{cases} 1 & \text{dla } k \geq 0 \\ \exp\left(-\frac{2k+n+it}{\rho}\right) & \text{dla } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tak więc wprowadzając funkcję

$$s(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \geq 0 \\ -1 & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$

mamy

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(s(k) \frac{2k+n+it}{2\rho}\right) 2 \cosh\left(\frac{2k+n+it}{2\rho}\right) \\ &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(s(k) \frac{2k+n+it}{2\rho}\right) 2 \left(\prod_{p \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{2k+n+it}{2\pi i \rho(p+\frac{1}{2})}\right) \exp\left(\frac{2k+n+it}{2\pi i \rho(p+\frac{1}{2})}\right) \right). \end{aligned}$$

Można to przepisać jako

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} 2 \exp\left(s(k) \frac{2k+n+it}{2\rho}\right) \\ &\quad \times \left(\prod_{\lambda \in \Lambda_k} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) \left(1 + \frac{i(2k+n)}{\lambda - i(2k+n)}\right) \exp\left(-\frac{i(2k+n)}{\lambda - i(2k+n)}\right) \exp\left(\frac{t}{\lambda - i(2k+n)}\right) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

gdzie

$$\Lambda_k = 2\pi\rho \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right) + i(2k + n).$$

Zauważmy, że $\Lambda = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k$. Biorąc pod uwagę (A.4) i (A.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} 2 \exp \left(s(k) \frac{2k+n+it}{2\rho} \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{\lambda \in \Lambda_k} \left(1 + \frac{i(2k+n)}{\lambda-i(2k+n)} \right) \exp \left(-\frac{i(2k+n)}{\lambda-i(2k+n)} \right) \exp \left(\frac{it(2k+n)}{\lambda(\lambda-i(2k+n))} - \frac{t^2}{2\lambda^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Znacznie wygodniej jest pracować z funkcją

$$\begin{aligned} \frac{G_n(t)}{G_n(0)} &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left(s(k) \frac{it}{2\rho} \right) \left(\prod_{\lambda \in \Lambda_k} \exp \left(-\frac{t^2}{2\lambda^2} \right) \prod_{\lambda \in \Lambda_k} \exp \left(\frac{it(2k+n)}{\lambda(\lambda-i(2k+n))} \right) \right) \\ &= \prod_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left(s(k) \frac{it}{2\rho} \right) \exp \left(-\frac{t^2}{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_k} \frac{1}{\lambda^2} \right) \exp \left(i(2k+n)t \sum_{\lambda \in \Lambda_k} \frac{1}{\lambda(\lambda-i(2k+n))} \right), \end{aligned}$$

szczególnie, że ze wzoru (A.4) natychmiast otrzymujemy wyrażenie na stałą $G_n(0)$:

$$G_n(0) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k+n}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{2k-n}). \quad (\text{A.6})$$

Ponadto stosując standardowe metody analizy zespolonej jednej zmiennej można obliczyć sumy

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda_k} \frac{1}{\lambda(\lambda-i(2k+n))} &= \frac{1}{(2k+n)} \frac{1}{2\rho} \tanh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right), \\ \sum_{\lambda \in \Lambda_k} \frac{1}{\lambda^2} &= \left(\frac{1}{2\rho} \right)^2 \frac{1}{\left(\cosh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right)^2}, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy wniosek, że

$$\frac{G_n(t)}{G_n(0)} = \exp \left(\frac{it}{2\rho} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k) + \tanh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right) \right) \exp \left(-\frac{t^2}{2} \left(\frac{1}{2\rho} \right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\cosh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right)^2} \right).$$

Lemat A.3 *Mamy*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k) + \tanh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right) = -(n-1).$$

DOWÓD LEMATU A.3. Przede wszystkim zauważmy, że ponieważ $\operatorname{Re} \rho < 0$, powyższy szereg jest zbieżny bezwzględnie. W obliczeniu jego sumy wykorzystamy następujące, oczywiste wzory

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k) + \tanh \left(\frac{k}{\rho} \right) \right) = 1, \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left(s(k + \tfrac{1}{2}) + \tanh \left(\frac{k}{\rho} \right) \right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Zajmiemy się oddzielnie przypadkami parzystego i nieparzystego n . Na początek założymy, że $n = 2l$. Wtedy

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k) + \tanh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k-l) + \tanh \left(\frac{k}{\rho} \right) \right). \quad (\text{A.9})$$

Odejmując lewą stronę (A.7) od prawej strony (A.9) dostajemy

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k) + \tanh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k-l) + \tanh \left(\frac{k}{\rho} \right) \right) \\ &\quad - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k) + \tanh \left(\frac{k}{\rho} \right) \right) + 1 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (s(k-l) - s(k)) + 1 = -2l + 1 \\ &= -(2l-1) = -(n-1). \end{aligned}$$

Założmy teraz, że $n = 2l + 1$. Wtedy

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k) + \tanh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left(s(k-l-\tfrac{1}{2}) + \tanh \left(\frac{k}{\rho} \right) \right). \quad (\text{A.10})$$

Podobnie jak poprzednio odejmujemy lewą stronę (A.8) od prawej strony (A.10) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(s(k) + \tanh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left(s(k-l-\tfrac{1}{2}) + \tanh \left(\frac{k}{\rho} \right) \right) \\ &\quad - \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left(s(k-\tfrac{1}{2}) + \tanh \left(\frac{k}{\rho} \right) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (s(k-l-\tfrac{1}{2}) - s(k-\tfrac{1}{2})) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (s(k-l) - s(k)) = -2l = -(n-1), \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu.

Q.E.D.

Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$\Theta_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(\cosh \left(\frac{2k+n}{2\rho} \right) \right)^2},$$

możemy podsumować naszą analizę w następujący sposób:

$$\frac{G_n(t)}{G_n(0)} = \exp\left(-(n-1)\frac{it}{2\rho}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{2\rho}\right)^2 \Theta_n\right). \quad (\text{A.11})$$

Wróćmy teraz do badania funkcji (A.1). Korzystając ze wzorów (A.2), (A.4) i lematu (A.1) widzimy, że

$$\mathbb{F}_q(q^n q^{it}) \mathbb{F}_q(q^{2-n} q^{-it}) = \frac{\overline{\varphi_n(\bar{t})}}{\varphi_n(t)} = \frac{\overline{G_n(\bar{t})} \prod_{\lambda \in \bar{\Lambda}} (1 - \frac{t}{\lambda}) \exp\left(\frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{2\lambda^2}\right)}{G_n(t) \prod_{\lambda \in \Lambda} (1 - \frac{t}{\lambda}) \exp\left(\frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{2\lambda^2}\right)} = \frac{\overline{G_n(\bar{t})}}{G_n(t)}.$$

Na mocy (A.11) oznacza to, że

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q(q^n q^{it}) \mathbb{F}_q(q^{2-n} q^{-it}) &= (\text{Phase } G_n(0))^{-2} \\ &\times \exp\left(i(n-1) \text{Re}\left(\frac{1}{\rho}\right) t + i \text{Im}\left(\frac{\Theta_n}{(2\rho)^2}\right) t^2\right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

W szczególności widać, że lewa strona (A.12) rozszerza się do funkcji całkowitej zmiennej t . Oznaczmy to rozszerzenie przez $t \mapsto \Phi(n, t)$.

Lemat A.4 Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\Phi(n+1, t-i) = q^n q^{it} \Phi(n, t). \quad (\text{A.13})$$

DOWÓD LEMATU A.4. Dla $\gamma \in \Gamma_q$ i $s \in \mathbb{R}$ wprowadźmy oznaczenie

$$\mathbb{F}_q \langle \gamma \rangle (s) = \mathbb{F}_q(q^{-is} \gamma).$$

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.11, nietrudno pokazać, że dla $\gamma \neq -1$ zachodzi wzór

$$\mathbb{F}_q \langle q\gamma \rangle (-i) = (1+\gamma)^{-1} \mathbb{F}_q(q^2 \gamma). \quad (\text{A.14})$$

Podstawiając $\gamma = q^n q^{it}$ mamy

$$\Phi(n, t) = \mathbb{F}_q(\gamma) \mathbb{F}_q(q^2 \gamma^{-1})$$

oraz

$$\Phi(n+1, t+s) = \mathbb{F}_q(q\gamma q^{is}) \mathbb{F}_q(q\gamma^{-1} q^{-is}) = \mathbb{F}_q[q\gamma](s) \mathbb{F}_q \langle q\gamma^{-1} \rangle (s)$$

Stosujemy teraz wzory (5.21) i (5.28) i otrzymujemy

$$\Phi(n+1, t-i) = \mathbb{F}_q[q\gamma](-i) \mathbb{F}_q \langle q\gamma^{-1} \rangle (-i) = \frac{1+\gamma}{1+\gamma^{-1}} \mathbb{F}_q(\gamma) \mathbb{F}_q(q^2 \gamma^{-1}) = \gamma \Phi(n, t)$$

dla $\gamma \neq -1$. Rezultat dla $\gamma = -1$ wynika z ciągłości obu stron względem γ . Q.E.D.

Lemat A.4 pozwala na znalezienie wartości stałych występujących w (A.12) za pomocą prostych wzorów rekurencyjnych. Od teraz niech t będzie liczbą rzeczywistą. Na mocy (A.12) prawa strona (A.13) wyraża się jako

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= q^n q^{it} (\text{Phase } G_n(0))^{-2} \exp \left(i(n-1) \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) t + i \text{Im} \left(\frac{\Theta_n}{(2\rho)^2} \right) t^2 \right) \\ &= (\text{Phase } G_n(0))^{-2} \exp \left(n \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) + in \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) t + i \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) t \right) \\ &\quad \times \exp \left(i(n-1) \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) t + i \text{Im} \left(\frac{\Theta_n}{(2\rho)^2} \right) t^2 \right), \end{aligned}$$

podczas gdy lewa strona jest równa

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (\text{Phase } G_{n+1}(0))^{-2} \exp \left(i(n-1) \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) (t-i) + i \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) (t-i)^2 \right) \\ &= (\text{Phase } G_{n+1}(0))^{-2} \exp \left((n-1) \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) + i(n-1) \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) t - i \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) \right) \\ &\quad \times \exp \left(2 \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) t + i \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) t^2 \right). \end{aligned}$$

Porównując te dwa wyrażenia dostajemy

$$\begin{aligned} &(\text{Phase } G_n(0))^{-2} \exp \left(in \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) t + i \text{Im} \left(\frac{\Theta_n}{(2\rho)^2} \right) t^2 \right) \\ &= (\text{Phase } G_{n+1}(0))^{-2} \exp \left(-i \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) + 2 \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) t + i \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) t^2 \right) \end{aligned}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Z równości pierwszych i drugich pochodnych LHS i RHS w punkcie $t = 0$ otrzymujemy

$$\text{Im} \left(\frac{\Theta_n}{(2\rho)^2} \right) = \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) = -\frac{1}{2} \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (\text{A.15})$$

natomiast przyrównanie wartości LHS i RHS w punkcie $t = 0$ pokazuje, że

$$(\text{Phase } G_n(0))^{-2} \exp \left(in \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) = (\text{Phase } G_{n+1}(0))^{-2} \exp \left(-i \text{Im} \left(\frac{\Theta_{n+1}}{(2\rho)^2} \right) \right). \quad (\text{A.16})$$

Teraz korzystając z (A.15) i (A.16) znajdujemy zależność rekurencyjną

$$(\text{Phase } G_{n+1}(0))^{-2} = \exp \left(i \left(n - \frac{1}{2} \right) \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) (\text{Phase } G_n(0))^{-2},$$

którą zamieniamy na

$$(\text{Phase } G_n(0))^{-2} = \exp \left(-\frac{i}{2} \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \exp \left(i \frac{(n-1)^2}{2} \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) (\text{Phase } G_0(0))^{-2}. \quad (\text{A.17})$$

Po wstawieniu (A.15) oraz (A.17) do wzoru (A.12) dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_q(q^n q^{it}) \mathbb{F}_q(q^{2-n} q^{-it}) &= \exp \left(-\frac{i}{2} \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \\ &\quad \times (\text{Phase } G_0(0))^{-2} \exp \left(\frac{i}{2} \left((n-1)^2 - t^2 \right) \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) + i(n-1)t \text{Re} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right), \end{aligned}$$

co w zestawieniu z (5.13) oznacza

$$\mathbb{F}_q(\gamma) \mathbb{F}_q(q^2 \gamma^{-1}) = \exp \left(-\frac{i}{2} \text{Im} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) (\text{Phase } G_0(0))^{-2} \alpha(q^{-1} \gamma), \quad (\text{A.18})$$

gdzie $\gamma = q^n q^{it}$.

Wreszcie wstawiając (A.6) do (A.18) otrzymujemy (5.31).

A.2 Rachunki związane z transformatą Fouriera funkcji

 $\mathbb{F}_q$

W niniejszym uzupełnieniu przedstawimy dowody stwierdzeń 5.19 i 5.20 oraz wniosku 5.21 z podrozdziału 5.4.2.

DOWÓD STWIERDZENIA 5.19. Przeprowadzimy rozumowanie dla przypadku $\text{Im } \rho > 0$. Zaczniemy od przepisania (5.34) w postaci sumy całek z funkcji holomorficzych zmiennej t . Funkcje podcałkowe w (5.34) są postaci

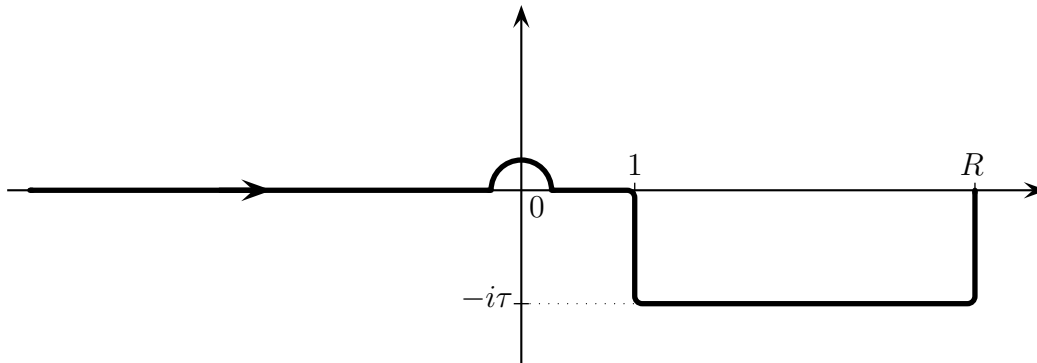
$$\begin{aligned} & \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) q^k q^{it}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-it}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} \\ &= \frac{(q \text{ Phase} - q^{-2}\gamma)^k e^{it(\log |\gamma| - 2 \text{Re } \rho^{-1})} e^{it \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})}, \\ &= \frac{(q \text{ Phase} - q^{-2}\gamma)^k e^{it(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)}, \end{aligned}$$

więc interesuje nas wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{l^R} \frac{(q \text{ Phase} - q^{-2}\gamma)^k e^{it(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} dt. \quad (\text{A.19})$$

Całki te są oczywiście bezwzględnie zbieżne ze względu na wykładnicze zanikanie czynnika $e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}$ przy $t \rightarrow -\infty$.

Ustalmy liczbę $\tau \in]0, 1[$. Nie zmieniając wartości wyrażenia (A.19) możemy zdeformować kontur l^R zamieniając go na kontur k_τ^R przedstawiony na rysunku A.1.

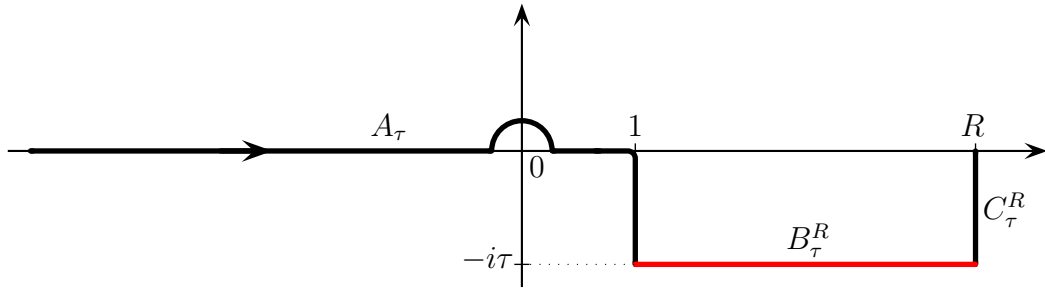


Rysunek A.1: Kontur k_τ^R z zaznaczoną orientacją

Po zmianie konturu mamy

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k_\tau^R} \frac{(q \text{ Phase} - q^{-2} \gamma)^k e^{it(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} dt \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{ Phase} - q^{-2} \gamma)^k \int_{A_\tau} \frac{e^{it(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} dt \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{ Phase} - q^{-2} \gamma)^k \int_{B_\tau^R} \frac{e^{it(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} dt \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{ Phase} - q^{-2} \gamma)^k \int_{C_\tau^R} \frac{e^{it(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} dt,
\end{aligned}$$

gdzie A_τ , B_τ^R i C_τ^R są częściami konturu k_τ^R wskazanymi na rysunku A.2.



Rysunek A.2: Podział konturu k_τ^R na części A_τ , B_τ^R i C_τ^R

Oznaczmy wydzielone trzy składniki przez $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$ oraz $\mathbb{I}_3$. Część $\mathbb{I}_1$ nie zależy od R i nie sprawia problemu. Pokażemy, że gdy $R \rightarrow \infty$, wyrażenie $\mathbb{I}_2$ ma skończoną granicę, a wartość $\mathbb{I}_3$ dąży do zera. Tym samym uzyskamy istnienie granicy (5.35).

Część $\mathbb{I}_2$ możemy przepisać jako

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{ Phase} - q^{-2} \gamma)^k \\
& \times \int_1^R \frac{e^{i(t-i\tau)(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-(t-i\tau) \text{Im } \rho^{-1}} dt}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-i(t-i\tau) \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-(t-i\tau) \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t-i\tau)}.
\end{aligned}$$

Będziemy szacować wartość bezwzględną tego wyrażenia. Oczywiście wystarczy to zrobić dla dużych t . Dla dostatecznie dużych t czynniki fazowe przy $e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}$ w mianowniku

można pominąć, gdyż jest to wyraz dominujący. Tak więc funkcje podcałkowe w wyrażeniu $\mathbb{I}_2$ szacują się dla dużych t przez (patrz (5.32))

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{\tau(\log|\gamma| - \operatorname{Re} \rho^{-1})} e^{-t \operatorname{Im} \rho^{-1}}}{\left(e^{-t \operatorname{Im} \rho^{-1}} e^{-(k-\tau) \operatorname{Re} \rho^{-1}} - 1 \right) |\mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t - i\tau)|} \\
&= \frac{e^{\tau(\log|\gamma| - \operatorname{Re} \rho^{-1})} e^{-t \operatorname{Im} \rho^{-1}}}{\left(e^{-t \operatorname{Im} \rho^{-1}} e^{-(k-\tau) \operatorname{Re} \rho^{-1}} - 1 \right) \Xi_k(t - i\tau) |q^{-1}(-q^{k+2}) q^{it}|^\tau} \\
&= \frac{e^{\tau(\log|\gamma| - \operatorname{Re} \rho^{-1})}}{e^{\tau(k+1) \operatorname{Re} \rho^{-1}}} \times \frac{e^{\tau t \operatorname{Im} \rho^{-1}}}{\left(e^{(k-\tau) \operatorname{Re} \rho^{-1}} - e^{t \operatorname{Im} \rho^{-1}} \right) \Xi_k(t - i\tau)}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

(gdzie dla skrócenia zapisu użyliśmy symbolu Ξ_k zamiast $\Xi_{-q^{k+2}}$).

Całka z ostatniej funkcji w (A.20) po części B_τ^R rozważanego konturu ewidentnie ma skończoną granicę przy $R \rightarrow \infty$ (pamiętamy, że $\operatorname{Im} \rho > 0$, czyli $\operatorname{Im} \rho^{-1} < 0$). Innymi słowy wyrażenie $\mathbb{I}_2$ ma skończoną granicę przy $R \rightarrow \infty$.

Część $\mathbb{I}_3$ wyrażenia (A.19) jest równa

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^{N-1} (q \operatorname{Phase} - q^{-2} \gamma)^k \\
& \times \int_0^\tau \frac{e^{i(R-i\theta)(\log|\gamma| - \operatorname{Re} \rho^{-1})} e^{-(R-i\theta) \operatorname{Im} \rho^{-1}} d\theta}{\left(1 - e^{-ik \operatorname{Im} \rho^{-1}} e^{-i(R-i\theta) \operatorname{Re} \rho^{-1}} e^{k \operatorname{Re} \rho^{-1}} e^{-(R-i\theta) \operatorname{Im} \rho^{-1}} \right) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](R - i\theta)}.
\end{aligned}$$

Przyjmując, że R jest bardzo duże i korzystając ponownie z wniosku 5.18, możemy szacować wartość bezwzględną funkcji podcałkowych przez

$$\frac{e^{\theta(\log|\gamma| - \operatorname{Re} \rho^{-1})} e^{\theta R \operatorname{Im} \rho^{-1}}}{\left(e^{k \operatorname{Re} \rho^{-1}} e^{-\theta \operatorname{Re} \rho^{-1}} - e^{R \operatorname{Im} \rho^{-1}} \right) \Xi_k(R - i\theta)}.$$

Całki, których wartość będziemy szacować, mają zatem postać

$$\int_0^\tau \frac{e^{\theta X} d\theta}{(Y e^{\theta Z} - U) \Xi_k(R - i\theta)},$$

gdzie Y oraz Z są dodatnimi stałymi nie zależącymi od R , liczba U jest dowolnie mała dla dostatecznie dużych R , a X jest liczbą ujemną, której wartość bezwzględna jest (z dokładnością do stałej) proporcjonalna do R . Ponadto dla dostatecznie dużych R mamy $\frac{1}{2} \leq \Xi_k(R - i\theta) \leq \frac{3}{2}$ dla wszystkich $\theta \in [0, \tau]$. Stąd

$$\frac{2}{3} \int_0^\tau \frac{e^{\theta X} d\theta}{(Y e^{\theta Z} - U)} \leq \int_0^\tau \frac{e^{\theta X} d\theta}{(Y e^{\theta Z} - U) \Xi_k(R - i\theta)} \leq 2 \int_0^\tau \frac{e^{\theta X} d\theta}{(Y e^{\theta Z} - U)}.$$

Dalej dla dostatecznie dużych R mamy $0 < U < \varepsilon Y e^{\theta Z}$, a co za tym idzie

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \int_0^\tau Y^{-1} e^{\theta(X-Z)} d\theta \leq \int_0^\tau \frac{e^{\theta X} d\theta}{(Y e^{\theta Z} - U)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \int_0^\tau Y^{-1} e^{\theta(X-Z)} d\theta.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że

$$0 \leq \int_0^\tau Y^{-1} e^{\theta(X-Z)} d\theta \leq Y^{-1} \frac{2}{|X-Z|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

aby przekonać się, że część $\mathbb{I}_3$ wyrażenia (A.19) zbiega do zera, gdy $R \rightarrow \infty$.

Aby wykazać prawdziwość wzoru (5.36) zauważmy, że wyrażenie

$$\begin{aligned} \mathbb{I}'_3 &= \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{Phase} - q^{-2} \gamma)^k \\ &\times \int_0^\tau \frac{e^{i(R-i\theta)(\log|\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-(R-i\theta) \text{Im } \rho^{-1}} d\theta}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-i(R-i\theta) \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-(R-i\theta) \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](R-i\theta)} \end{aligned}$$

zbiega do zera także, gdy $R \rightarrow -\infty$ (oznaczenie $\mathbb{I}'_3$ podkreśla fakt, że nie jest to część całki analizowanej w pierwszej części dowodu). Istotnie dla R ujemnych, o dużej wartości bezwzględnej funkcje podcałkowe szacują się przez

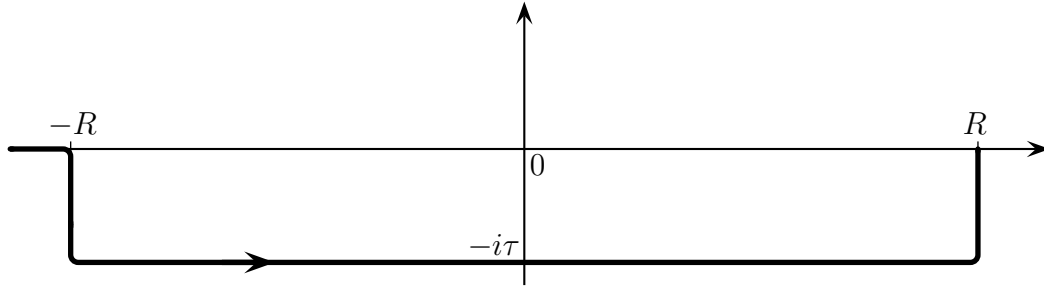
$$\frac{e^{\theta(\log|\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-R \text{Im } \rho^{-1}}}{(1 - e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-\theta \text{Re } \rho^{-1}} e^{-R \text{Im } \rho^{-1}}) |\mathbb{F}_q[-q^{k+2}](R-i\theta)|}.$$

Ponadto $\mathbb{F}_q[-q^{k+2}](R-i\theta)$ dąży do $\mathbb{F}_q(0) = 1$, gdy $R \rightarrow -\infty$ (por. stwierdzenie 5.12), a zatem

$$|\mathbb{I}'_3| \leq \text{const.} \cdot e^{-R \text{Im } \rho^{-1}} \xrightarrow{R \rightarrow -\infty} 0.$$

Uzbrojeni w tę wiedzę możemy zdeformować kontur k_τ^R , zamieniając go na kontur m_τ^R pokazany na rysunku A.3. Procedura ta działa dla $k \neq 0$. W składniku numerowanym $k = 0$ musimy wziąć pod uwagę residuum funkcji podcałkowej w punkcie 0. Mamy więc

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N-1} \int_{l^R} \frac{(q \text{Phase} - q^{-2} \gamma)^k e^{it(\log|\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}} dt}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{l^R} \frac{(q \text{Phase} - q^{-2} \gamma)^k e^{it(\log|\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}} dt}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} \\ &= -2\pi \overline{\rho} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{m_\tau^R} \frac{(q \text{Phase} - q^{-2} \gamma)^k e^{it(\log|\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}} dt}{(1 - e^{-ik \text{Im } \rho^{-1}} e^{-it \text{Re } \rho^{-1}} e^{k \text{Re } \rho^{-1}} e^{-t \text{Im } \rho^{-1}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)}. \end{aligned}$$

Rysunek A.3: Kontur m_τ^R z zaznaczoną orientacją

Przechodząc do granicy $R \rightarrow \infty$, otrzymujemy wzór (5.36).

Dla $\text{Im } \rho < 0$ rozumowanie w obu częściach dowodu jest analogiczne.

Q.E.D.

DOWÓD STWIERDZENIA 5.20. Podobnie jak w dowodzie stwierdzenia 5.19 ograniczymy się do przypadku $\text{Im } \rho > 0$.

Ad 1. Ciągłość funkcji Φ_q na Γ_q jest prostą konsekwencją twierdzeń o ciągłości całek z parametrem (patrz [21, cz. II, twierdzenie 12.9]). Ze wzoru (5.36) mamy

$$\begin{aligned}
 \Phi_q(\gamma) &= -2\pi \bar{\rho} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1} \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{Phase} - q^{-2}\gamma)^k \int_{\mathbb{R}-i\tau} \frac{|\gamma|^{iz} |q|^{-2iz} q^{iz}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-iz}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](z)} dz \\
 &= -2\pi \bar{\rho} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1} \\
 &\quad + |\gamma|^\tau \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{Phase} - q^{-2}\gamma)^k \int_{\mathbb{R}} \frac{|\gamma|^{it} |q|^{-2i(t-i\tau)} q^{i(t-i\tau)}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-i(t-i\tau)}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t-i\tau)} dt \\
 &= -2\pi \bar{\rho} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1} + |\gamma|^\tau \cdot K(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} -2\pi \bar{\rho} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1},
 \end{aligned}$$

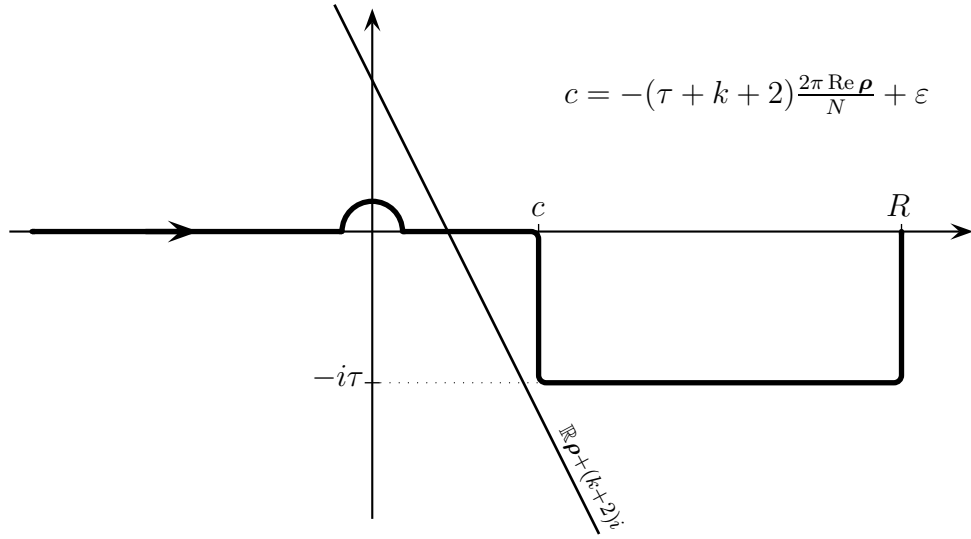
przy czym zbieżność ta wynika z prostego faktu, że

$$K(\gamma) = \sum_{k=0}^{N-1} (q \text{Phase} - q^{-2}\gamma)^k \int_{\mathbb{R}} \frac{|\gamma|^{it} |q|^{-2i(t-i\tau)} q^{i(t-i\tau)}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{-i(t-i\tau)}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t-i\tau)} dt$$

jest funkcją ograniczoną zmiennej γ .

Ad 2. Dla ustalonego $R > 0$ rozważmy wyrażenie

$$\begin{aligned}
 \Phi_q[\gamma](s) &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{iR} \frac{\chi(-q^{-2}q^{is}\gamma, q^k q^{it}) q^k q^{it}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{it}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{iR} \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) |q^k q^{it}|^{is} q^k q^{it}}{(1 - \bar{q}^k \bar{q}^{it}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} dt.
 \end{aligned}$$

Rysunek A.4: Kontur U_τ^R z zaznaczoną orientacją

Kolejne składniki są równe

$$|q^k|^{is} q^k (\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^k \int_{l^R} \frac{|-q^{-2}\gamma|^{it} |q^{it}|^{is} q^{it} dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} \quad (\text{A.21})$$

Wyrażenia te są oczywiście holomorfczne w zmiennej s , jeśli ograniczymy ją do dolnej półpłaszczyzny (gdyż wtedy całka nadal jest zbieżna). Rozważmy zatem wyrażenie (A.21) z $s - i\sigma$ w miejscu s , przy czym $\sigma > 0$. Aby przejść do granicy $R \rightarrow \infty$ ustalamy liczbę $\tau > \sigma$ i modyfikujemy kontur l^R zamieniając go na kontur U_τ^R przedstawiony na rysunku (A.4). Zgodnie z rachunkiem przeprowadzonym w przykładzie 5.15, operacja ta nie zmienia wartości całki. Mamy więc do czynienia z wyrażeniem

$$\int_{U_\tau^R} \frac{|-q^{-2}\gamma|^{it} |q^{it}|^{is} q^{it} dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)}.$$

Kiedy całkujemy po $t - i\tau$ (przy czym $t \in \mathbb{R}$), dla dużych t , funkcja podcałkowa zachowuje się jak (patrz wniosek 5.18)

$$\text{const.} \times \frac{e^{it(\log |\gamma| - \Re \rho^{-1})} e^{-its \Im \rho^{-1}} e^{-t \Im \rho^{-1}} e^{-\sigma t \Im \rho^{-1}}}{(1 - q^k e^{-it \Re \rho^{-1}} e^{-t \Im \rho^{-1}}) e^{(k+1)\tau \Re \rho^{-1}} e^{-\tau t \Im \rho^{-1}}}, \quad (\text{A.22})$$

gdzie

$$\text{const.} = e^{\tau(\log |\gamma| - \Re \rho^{-1})} e^{i\tau \Im \rho^{-1}} e^{i\tau \sigma \Im \rho^{-1}} e^{-\tau s \Im \rho^{-1}}.$$

Wyrażenie to jest $O(e^{(\tau-\sigma)t \Im \rho^{-1}})$, a więc całka z niego po t od ustalonego miejsca do $+\infty$ jest zbieżna. Dalej, tak jak w dowodzie stwierdzenia 5.19, szacujemy całkę z funkcji (A.22)

po pionowej części konturu od $R - i\tau$ do R . Rozumowanie zaprezentowane w dowodzie stwierdzenia 5.19 pokazuje, że całka ta znika gdy $R \rightarrow \infty$. W szczególności wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{N-1} |q^k|^{i(s-i\sigma)} q^k (\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^k \int_{l^R} \frac{|-q^{-2}\gamma|^{it} |q^{it}|^{i(s-i\sigma)} q^{it} dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)}$$

ma granicę przy $R \rightarrow \infty$ dla dowolnego $\sigma \geq 0$. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu całki niewłaściwej z parametrem ([21, twierdzenie 12.10]) nietrudno wykazać, że granica ta definiuje przedłużenie holomorficzne funkcji $\mathbb{R} \ni s \mapsto \Phi_q[\gamma](s) \in \mathbb{C}$. Przykładowo, jeśli chcielibyśmy obliczyć $\Phi_q[q\gamma](-i)$, musimy pomnożyć γ we wzorze na $\Phi_q(\gamma)$ przez $q^{is}q$ i dokonać przedłużenia holomorficznego w wyrażeniu

$$\begin{aligned} \Phi_q(q^{is}q\gamma) &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}q^{is}q\gamma, q^k q^{it}) (q^k q^{it})^2 dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2}q^{it})} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) (\text{Phase } q^k q^{it}) |q^k q^{it}|^{is} q^k q^{it} dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2}q^{it})} \end{aligned}$$

do punktu $s = -i$. Otrzymamy

$$\Phi_q[q\gamma](-i) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) (q^k q^{it})^2 dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2}q^{it})}, \quad (\text{A.23})$$

gdzie całkę rozumiemy jako granicę, której istnienie wykazaliśmy wyżej.

Od teraz wszystkie symbole całki po konturze l oznaczać będą odpowiednią całkę niewłaściwą, której istnienie wykazaliśmy.

Ad 3. Korzystając ze wzoru (5.30) obliczamy

$$\begin{aligned} \Phi_q(\gamma) &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) q^k q^{it} dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2}q^{it})} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{(\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^k |-q^{-2}\gamma|^{it} q^k q^{it} dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{(\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^k |-q^{-2}\gamma|^{it} q^k q^{it} dt}{\mathbb{F}_q[-q^{k+1}](t-i)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{l-i} \frac{(\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^k |-q^{-2}\gamma|^{i(z+i)} q^k q^{i(z+i)} dz}{\mathbb{F}_q[-q^{k+1}](z)}, \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned}\Phi_q(\gamma) &= (\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^{-1} | -q^{-2}\gamma |^{-1} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \int_{l-i} \frac{(\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^{k+1} | -q^{-2}\gamma |^{iz} q^{k-1} q^{iz} dz}{\mathbb{F}_q[-q^{k+1}](z)} \\ &= (-q^{-2}\gamma)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{l-i} \frac{(\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^{k+1} | -q^{-2}\gamma |^{iz} q^{k-1} q^{iz} dz}{\mathbb{F}_q[-q^{k+1}](z)}.\end{aligned}$$

Na mocy argumentów takich jak w dowodzie punktu **1.** możemy zmienić kontur całkowania z $l-i$ na l . Dokładniej, ponieważ całki po l rozumiemy jako granice całek po l^R przy $R \rightarrow \infty$, rozważamy kontury zdeformowane tak jak w dowodzie stwierdzenia 5.19 czy punktu **2.** Zamiana konturu z $l-i$ na l odbywa się najpierw dla konturu zmodyfikowanego, a wtedy całki po pionowych odcinkach łączących zmodyfikowane wersje l oraz $l-i$ znikają, gdy odsuwamy je do $\pm\infty$ wzdłuż osi rzeczywistej. Stosując tę procedurę otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Phi_q(\gamma) &= (-q^{-2}\gamma)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{(\text{Phase} - q^{-2}\gamma)^{k+1} | -q^{-2}\gamma |^{it} q^{k-1} q^{it} dt}{\mathbb{F}_q[-q^{k+1}](t)} \\ &= (-q^{-2}\gamma)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) q^{k-1} q^{it} dt}{\mathbb{F}_q[-q^{k+1}](t)} \\ &= -\gamma^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) q^{k+1} q^{it} dt}{\mathbb{F}_q[-q^{k+1}](t)} \\ &= -\gamma^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^{k+1} q^{it}) q^{k+1} q^{it} dt}{\mathbb{F}_q(-q^{k+1} q^{it})}.\end{aligned}$$

Teraz dzięki (5.19) mamy

$$\begin{aligned}\Phi_q(\gamma) &= -\gamma^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^{k+1} q^{it}) q^{k+1} q^{it} dt}{\frac{1-\overline{q^{k+1} q^{it}}}{1-q^{k+1} q^{it}} \mathbb{F}_q(-q^2 q^{k+1} q^{it})} \\ &= -\gamma^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^{k+1} q^{it}) (1 - q^{k+1} q^{it}) q^{k+1} q^{it} dt}{(1 - \overline{q^{k+1} q^{it}}) \mathbb{F}_q(-q^2 q^{k+1} q^{it})} \\ &= -\gamma^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) (1 - q^k q^{it}) q^k q^{it} dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} \\ &= -\gamma^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) q^k q^{it} dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})} + \gamma^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_l \frac{\chi(-q^{-2}\gamma, q^k q^{it}) (q^k q^{it})^2 dt}{(1 - \overline{q^k q^{it}}) \mathbb{F}_q(-q^{k+2} q^{it})}.\end{aligned}$$

Innymi słowy (patrz (A.23))

$$\Phi_q[\gamma](0) = \gamma^{-1}\Phi_q[q\gamma](-i) - \gamma^{-1}\Phi_q[\gamma](0),$$

czyli

$$\Phi_q[q\gamma](-i) = (1 + \gamma)\Phi_q[\gamma](0) = (1 + \gamma)\Phi_q(\gamma).$$

Ad 4. $\Phi_q[\gamma](s - i\sigma)$ jest sumą wyrażeń postaci

$$\left(|q|^{is} q^k q^\sigma (\text{Phase} - q^{-2}\gamma)\right)^k \int_l \frac{|q^{it}|^{is} |q^{it}|^\sigma - q^{-2}\gamma |q^{it}|^{it} dt}{\left(1 - \overline{q^k q^{it}}\right) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)}, \quad (\text{A.24})$$

gdzie całkę po l rozumiemy jako granicę

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{U_\tau^R} \frac{|q^{it}|^{is} |q^{it}|^\sigma - q^{-2}\gamma |q^{it}|^{it} dt}{\left(1 - \overline{q^k q^{it}}\right) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)},$$

a τ jest liczbą większą niż σ (por. rysunek A.4). W szczególności możemy położyć $\tau = 1 + \delta$. Tak samo jak w dowodzie stwierdzenia 5.19 podzielimy kontur U_τ^R na części A_τ , B_τ^R i C_τ^R tak jak podzieliśmy kontur k_τ^R (rysunki A.1 i A.2). Z dowodu punktu 2. wiemy, że całka po części C_τ^R zbiega do 0, gdy $R \rightarrow \infty$. Jeśli oznaczymy przez M_1 wartość całki po A_τ , to całka występująca w (A.24) jest równa

$$\begin{aligned} & M_1 + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_\tau^R} \frac{|q^{it}|^{is} |q^{it}|^\sigma - q^{-2}\gamma |q^{it}|^{it} dt}{\left(1 - \overline{q^k q^{it}}\right) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t)} \\ & M_1 + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R \frac{e^{-i(t-i\tau)s} \text{Im } \rho^{-1} e^{-(t-i\tau)\sigma} \text{Im } \rho^{-1} e^{i(t-i\tau)(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{i(t-i\tau)\text{Im } \rho^{-1}} dt}{\left(1 + \overline{q^k} e^{-i(t-i\tau)\text{Re } \rho^{-1}} e^{-(t-i\tau)\text{Im } \rho^{-1}}\right) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t - i\tau)} \\ & M_1 + e^{-\tau s \text{Im } \rho^{-1}} e^{\tau(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} \\ & \quad \times \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R \frac{e^{-its} \text{Im } \rho^{-1} e^{-(t-i\tau)\sigma} \text{Im } \rho^{-1} e^{it(\log |\gamma| - \text{Re } \rho^{-1})} e^{i(t-i\tau)\text{Im } \rho^{-1}} dt}{\left(1 + \overline{q^k} e^{-i(t-i\tau)\text{Re } \rho^{-1}} e^{-(t-i\tau)\text{Im } \rho^{-1}}\right) \mathbb{F}_q[-q^{k+2}](t - i\tau)} \\ & = M_1 + |q^{-1}\gamma q^{is}|^\tau M_2, \end{aligned}$$

gdzie przez M_2 oznaczyliśmy wartość odpowiedniej granicy. Porównując tę informację z (A.24) i pamiętając, że $\tau = 1 + \delta$, otrzymujemy

$$|\Phi_q[\gamma](s - i\sigma)| \leq A_1 + A_2 |q^{-1}\gamma q^{is}|^{1+\delta}$$

dla pewnych stałych A_1 i A_2 .

Q.E.D.

DOWÓD WNIOSKU 5.21. Ustalmy $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$. Dla z w dolnej półpłaszczyźnie zdefiniujemy

$$\varphi_\gamma(z) = \frac{\Phi_q[\gamma](z)}{\mathbb{F}_q[\gamma](z)}.$$

φ_γ jest dobrze zdefiniowaną funkcją meromorficzną.

Dowód równości (5.38) przeprowadzimy w czterech krokach:

1. φ_γ jest funkcją holomorficzną.
2. φ_γ jest funkcją okresową, a jej okres nie jest liczbą rzeczywistą. W szczególności φ_γ rozszerza się do funkcji całkowitej.
3. φ_γ faktoryzuje się przez odwzorowanie $s \mapsto q^{is}$, tzn. istnieje funkcja całkowita ψ_γ taka, że

$$\varphi_\gamma(s - i\sigma) = \psi_\gamma(q^{i(s-i\sigma)}).$$

4. ψ_γ jest funkcją stałą, równą $-2\pi\overline{\rho}\mathbb{F}_q(-q^2)^{-1}$.

Ad 1. Z uwagi 5.14 wiemy, że funkcja $\mathbb{F}_q[\gamma]$ nie ma zer w pasku $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im} z \leq 0\}$, a na prostej $\mathbb{R} - i$ ma co najwyżej jedno zero. Ponadto jeśli funkcja $\mathbb{F}_q[\gamma]$ posiada zero na prostej $\mathbb{R} - i$, to jest to zero pierwszego rzędu.

Podobnie jak w przypadku funkcji $\mathbb{F}_q[\gamma]$ można wykazać, że ze wzoru (5.37) wynika, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi_q[\gamma](t - i) = (1 + q^{it}q^{-1}\gamma)\Phi_q(q^{it}q^{-1}\gamma).$$

(por. wyprowadzenie wzoru (5.29)). W szczególności jeśli $\mathbb{F}_q[\gamma](t_0 - i) = 0$ dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}$, to $\Phi_q[\gamma](t_0 - i) = 0$ i zera te się skracają. Wykazaliśmy więc, że φ_γ jest holomorficzną na otoczeniu paska $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 0\}$ w dolnej półpłaszczyźnie (części urojone zer funkcji $\mathbb{F}_q[\gamma]$ są liczbami całkowitymi, więc mamy nawet holomorficzną w pasku $\{z \in \mathbb{C} : -2 < \operatorname{Im} z \leq 0\}$).

Zauważmy jednak, że dzięki równaniom (5.21) i (5.37) mamy dla $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\gamma(t - i) = \frac{\Phi_q[\gamma](t - i)}{\mathbb{F}_q[\gamma](t - i)} = \frac{(1 + q^{it}q^{-1}\gamma)\Phi_q[q^{-1}\gamma](t)}{(1 + q^{it}q^{-1}\gamma)\mathbb{F}_q[q^{-1}\gamma](t)} = \varphi_{q^{-1}\gamma}(t). \quad (\text{A.25})$$

Równość ta przenosi się na t leżące w dolnej półpłaszczyźnie. Widzimy zatem, że badanie holomorficznego funkcji φ_γ w kolejnych (zachodzących na siebie i otwartych) paskach sprowadza się do badania holomorficznego funkcji $\varphi_{q^{-k}\gamma}$ w obszarze omówionym powyżej. W szczególności φ_γ jest holomorficzną w dolnej półpłaszczyźnie,

Ad 2. Korzystając $|N|$ razy ze wzoru (A.25) otrzymujemy dla $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\gamma(t - |N|i) = \varphi_{q^{-|N|\gamma}}(t) = \varphi_{q^{it_0}\gamma}(t),$$

dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}$, jako że $q^{-|N|} \in \Gamma_{q,0}$ (por. (5.4)). W szczególności

$$\varphi_\gamma(t - |N|i) = \frac{\Phi_q[q^{it_0}\gamma](t)}{\mathbb{F}_q[q^{it_0}\gamma](t)} = \frac{\Phi_q[\gamma](t + t_0)}{\mathbb{F}_q[\gamma](t + t_0)} = \varphi_\gamma(t + t_0)$$

lub inaczej

$$\varphi_\gamma(t - (t_0 + |N|i)) = \varphi_\gamma(t)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Na mocy holomorficznego φ_γ równość ta zachodzi dla t w dolnej półpłaszczyźnie. Oznacza to, że φ_γ jest holomorficzną funkcją okresową o okresie $t_0 + |N|i$. W szczególności φ_γ rozszerza się do funkcji całkowitej.

Ad 3. Dla każdego $s \in \mathbb{R}$ mamy

$$\varphi_\gamma(s) = \frac{\Phi_q[\gamma](s)}{\mathbb{F}_q[\gamma](s)} = \frac{\Phi_q(q^{is}\gamma)}{\mathbb{F}_q(q^{is}\gamma)}.$$

oraz

$$\varphi_\gamma(s - (t_0 + |N|i)) = \varphi_\gamma(s) = \frac{\Phi_q\left(q^{i(s-(t_0+|N|i))}\gamma\right)}{\mathbb{F}_q\left(q^{i(s-(t_0+|N|i))}\gamma\right)}.$$

(patrz (5.4)).

Kiedy zmienna z przebiega drogę od s do $s - (t_0 + |N|i)$, zmienna $q^{iz}\gamma$ przebiega drogę zamkniętą zaczynającą i kończącą się w punkcie γq^{is} . Widzimy, że wzór

$$\psi_\gamma(q^{iz}) = \varphi_\gamma(z)$$

definiuje funkcję ψ_γ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Można jednak rozszerzyć funkcję ψ_γ na $\mathbb{C}$, ponieważ $\Phi_q[\gamma](s - i\sigma)$ oraz $\mathbb{F}_q[\gamma](s - i\sigma)$ dążą do 1, gdy $s \rightarrow -\text{Im}(\boldsymbol{\rho}) \infty$ i zbieżność ta jest jednostajna względem σ . Dokładniej, dla funkcji $\mathbb{F}_q$, stwierdzenie 5.12 mówi o zbieżności niemal jednostajnej. Tak samo można wykazać niemal jednostajną zbieżność do $\Phi_q(0)$ dla funkcji Φ_q . Dzięki periodyczności zbieżność ta staje się jednostajna.

Ad 4. Ustalmy $0 < \delta < \frac{1}{2}$ oraz $\gamma \in \overline{\Gamma}_q$. Na mocy punktu 4. stwierdzenia 5.20 istnieją stałe A_1 i A_2 takie, że

$$|\Phi_q[\gamma](s - i\sigma)| \leq A_1 + A_2 |q^{-1}\gamma q^{is}|^{1+\delta}$$

dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$ i $0 \leq \sigma < 1$. Dla $s \rightarrow \text{Im}(\boldsymbol{\rho}) \infty$, korzystając z oszacowania (5.32), mamy

$$|\varphi_\gamma(s - i\sigma)| \leq \frac{A_1}{\Xi_\gamma(s - i\sigma) |q^{-1}\gamma q^{is}|^\sigma} \frac{A_1}{\Xi_\gamma(s - i\sigma)} |q^{-1}\gamma q^{is}|^{1+\delta-\sigma}. \quad (\text{A.26})$$

Rozważmy teraz wartości funkcji ψ_γ zdefiniowanej w punkcie 3. na krzywej $\Upsilon = \{q^{i(s-i\sigma)}\gamma : s \in \mathbb{R}\}$. Gdy $s \rightarrow \text{Im}(\boldsymbol{\rho}) \infty$, odpowiedni punkt na Υ ucieka do nieskończoności. Oszacowanie (A.26) pokazuje, że dla $z \in \Upsilon$ mamy

$$|\psi_\gamma(z)| = o(|z|^2).$$

Rozważając rozwinięcie całkowanej funkcji ψ_γ w szereg potęgowy zbieżny na $\mathbb{C}$, łatwo się przekonać, że ψ_γ jest postaci

$$\psi_\gamma(z) = \psi_\gamma(0) + \psi'_\gamma(0)z.$$

Jeśli jednak $\sigma > 1 - \delta$, to $1 + \delta - \sigma < 2\delta < 1$ i w konsekwencji

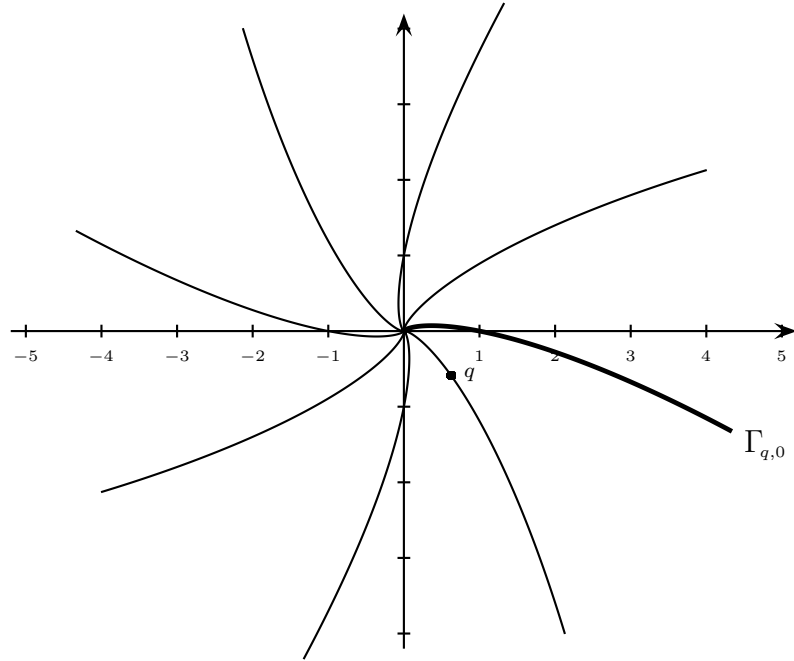
$$|\psi_\gamma(z)| = o(|z|).$$

Widać więc, że $\psi'_\gamma(0) = 0$ i $\psi_\gamma(z) = \psi_\gamma(0)$ dla wszystkich z . Oczywiście

$$\psi_\gamma(0) = \lim_{s \rightarrow -\text{Im}(\boldsymbol{\rho}) \infty} \varphi_\gamma(s) = \frac{\Phi_q(0)}{\mathbb{F}_q(0)} = -2\pi \overline{\boldsymbol{\rho}} \mathbb{F}_q(-q^2)^{-1}$$

(patrz punkt 1. stwierdzenia (5.20)).

Q.E.D.

Rysunek A.5: Zbiór Γ_q dla $\rho = -\frac{1}{4} + i\frac{8}{2\pi}$

A.3 Grupa Γ_q dla różnych wartości parametru

Poniżej przedstawimy rysunki grupy Γ_q dla różnych wartości parametru q . Kiedy q przebiega zbiór, którego część przedstawia rysunek 5.1, grupa Γ_q jest kolekcją parzystej ilości spiral logarytmicznych. Jedna z nich zawiera punkt $1 \in \mathbb{C}$. Jest to podgrupa $\Gamma_{q,0}$ złożona z liczb postaci q^{it} , gdzie $t \in \mathbb{R}$. Na poniższych rysunkach podgrupa ta została wyróżniona grubszą linią. Zaznaczono również punkt q . Pamiętamy, że $\text{Im } \rho = \frac{N}{2\pi}$, gdzie N jest parzystą liczbą całkowitą, różną od zera. Grupa Γ_q składa się z $|N|$ spiral logarytmicznych.

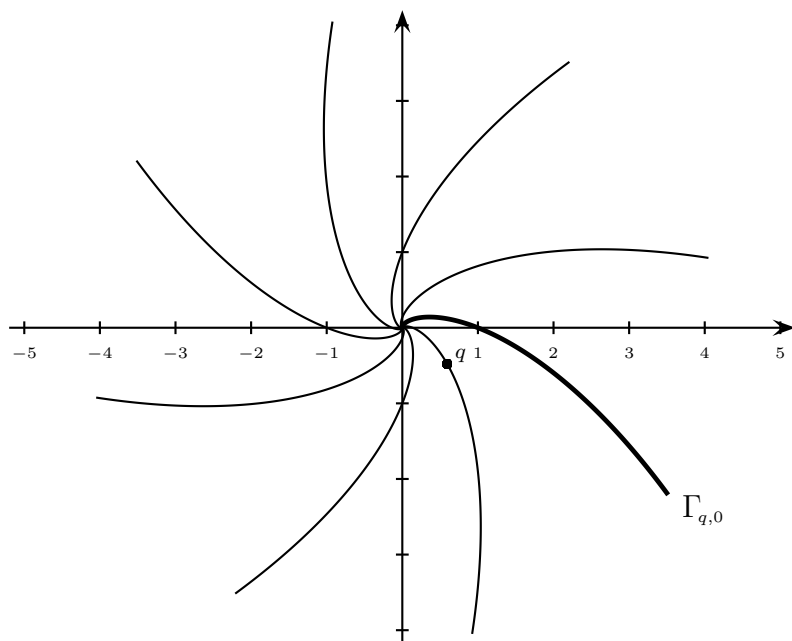
Gdy wartość bezwzględna q jest bliska jedności, Γ_q nie odbiega zbyt daleko od zbioru, Γ rozważanego w pracy [31]. Na rysunku A.5 przedstawiono Γ_q w przypadku, gdy $|q| \simeq 0.862$, a $N = 8$.

Zmniejszając część rzeczywistą ρ , oddalamy q od pierwiastka z jedynki postaci $e^{\frac{2\pi i}{N}}$ wzdłuż spójnej składowej zbioru dopuszczalnych parametrów (rysunek 5.1). Na rysunkach A.6, A.7 i A.8 mamy kolejno $q \simeq 0.765e^{-i0.75}$, $q \simeq 0.682e^{-i0.68}$ i $q \simeq 0.7e^{-i0.485}$.

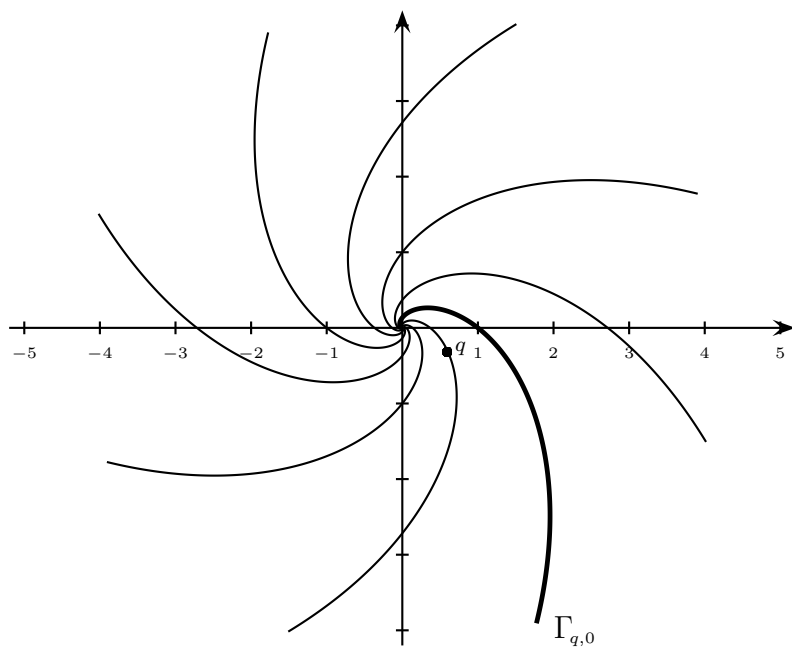
Rysunki A.5, A.6, A.7 i A.8 przedstawiają grupę Γ_q dla $\text{Im } \rho > 0$. W takim przypadku $|q^{it}|$ dąży od nieskończoności, gdy $t \rightarrow \infty$, a do zera, gdy $t \rightarrow -\infty$.

Kiedy część urojona $\text{Im } \rho$ zmienia znak, spirale logarytmiczne skręcają się w przeciwną stronę. Na rysunku A.9 widzimy grupę Γ_q dla $N = -6$. Zauważmy, że teraz q^{it} ucieka do nieskończoności, gdy $t \rightarrow -\infty$, a zbiega do 0, gdy $t \rightarrow \infty$.

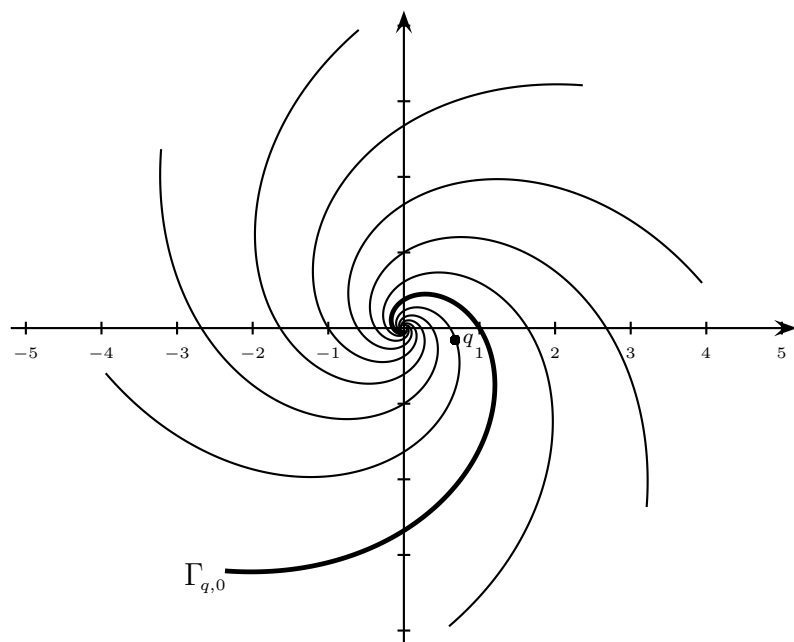
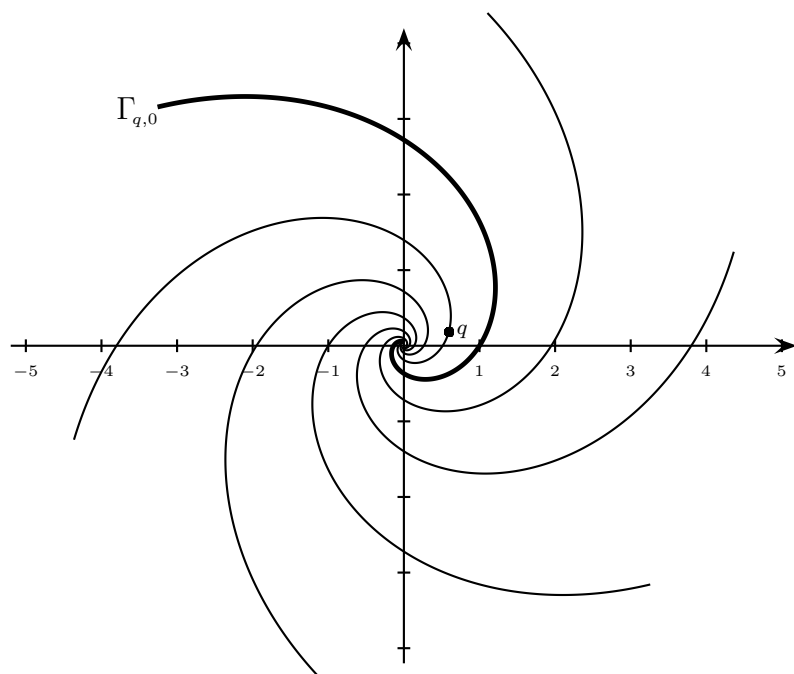
Zbiory Γ_q i $\bar{\Gamma}_q$ odgrywają rolę „kwantowych” wersji $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $\mathbb{C}$ (por. podrozdział 7.6 i [27]). Zauważmy, że kiedy q zbliża się do 1, zbiory te coraz gęściej wypełniają $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{C}$ odpowiednio). Dla przykładu zamieszczamy rysunek A.10, na którym przedstawiono grupę Γ_q dla parametru q bardzo bliskiego 1: $|q| \simeq 0.9$, $\text{Arg } q \simeq -0.02$.

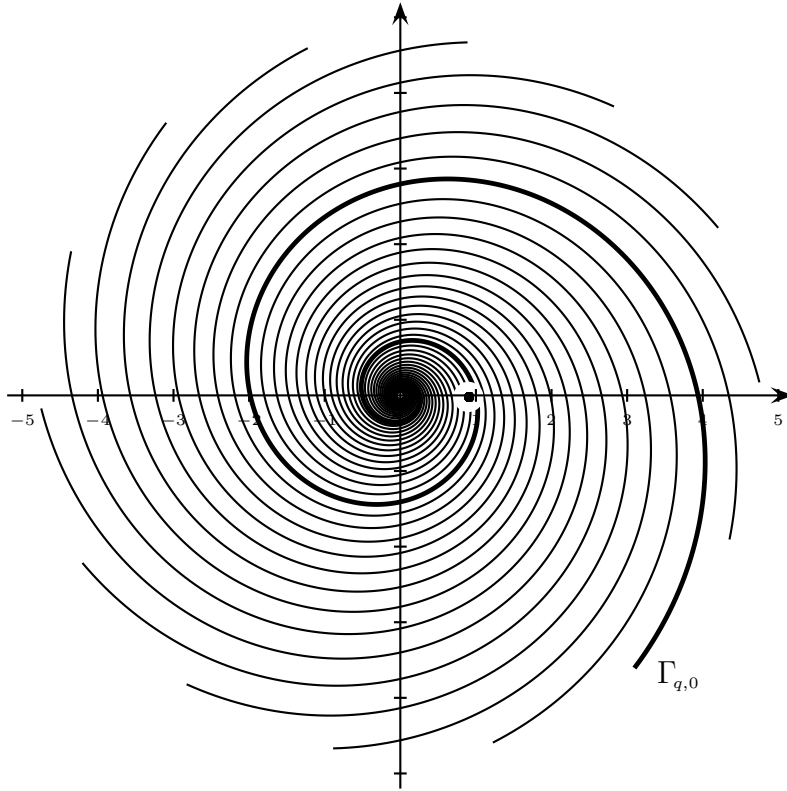


Rysunek A.6: Zbiór Γ_q dla $\rho = -\frac{1}{2} + i\frac{8}{2\pi}$



Rysunek A.7: Zbiór Γ_q dla $\rho = -1 + i\frac{8}{2\pi}$


Rysunek A.8: Zbiór Γ_q dla $\rho = -2 + i\frac{8}{2\pi}$

Rysunek A.9: Zbiór Γ_q dla $\rho = -\frac{3}{2} - i\frac{6}{2\pi}$



Rysunek A.10: Zbiór Γ_q dla $\rho = -10 + i\frac{14}{2\pi}$

Na rysunku tym punkt q jest w środku białego koła, bardzo blisko $1 \in \mathbb{C}$. Kiedy q zbliża się do osi rzeczywistej, zbiór Γ_q upodabnia się do zbioru $\overline{\mathbb{C}^q}$ rozważanego w pracach [25], [26], [27] i [31, Appendix A].

Literatura

- [1] E. ABE, *Hopf algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics **74**, Cambridge University Press, Cambridge 1980.
- [2] M.F. ATYIAH & C.T. WALL, *Cohomology of groups*, z książki *Algebraic number theory*, Cassels & Fröhlich eds., Academic Press 1967.
- [3] S. BAAJ, *Répresentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$ de Woronowicz*, C. R. Acad. Paris, t. **314**, Série I, (1992), 1021–1026.
- [4] S. BAAJ & G. SKANDALIS, *Unitaries multiplicatifs et dualité pour les poiduits croisés de C^* -algèbres*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **26** (1993), 425–488.
- [5] A.O. BARUT & R. RĄCZKA, *Theory of group representations and applications*, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa 1980.
- [6] T. BRZEZIŃSKI, *Quantum homogeneous spaces as quantum quotient spaces*, J. Math. Phys. **37** (1996), 2388–2399.
- [7] I. CIORĂNESCU & L. ZSIDÓ, *Analytic generators for one-parameter groups*, Tohoku Math. J. **28** (1976), 327–362.
- [8] J. DIXMIER, *C^* -algebras and their representations*, North Holland 1977.
- [9] Y. KATZNELSON, *An introduction to harmonic analysis*, John Wiley & Sons Inc. 1968.
- [10] P. KRUSZYŃSKI & S.L. WORONOWICZ, *A non-commutative Gelfand-Naimark theorem*, J. Op. Theory **8** (1982), 361–389.
- [11] M.B. LANDSTAD, *Duality theory for covariant systems*, Trans. AMS **248**, No. 2 (1979), 223–267.
- [12] T. MASUDA, Y. NAKAGAMI & S.L. WORONOWICZ, *C^* -algebraic framework for the duality of quantum groups*, w przygotowaniu.
- [13] K. MAURIN, *Metody przestrzeni Hilberta*, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa 1967.

- [14] K. MAURIN, *General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups*, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa 1968.
- [15] G.K. PEDERSEN, *C^* -algebras and their automorphism groups*, Academic Press 1979.
- [16] P. PODLEŚ, *Introduction to quantum groups*, Preprint Mathematisches Institut Ludwig-Maximilians-Universität München 1996.
- [17] W. PUSZ & S.L. WORONOWICZ, *A quantum $GL(2, \mathbb{C})$ group at roots of unity*, Rep. Math. Phys. **47**, No. 3 (2001), 431–462.
- [18] W. RUDIN, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa 1998.
- [19] W. RUDIN, *Analiza funkcjonalna*, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa 2001.
- [20] P.M. SOŁTAN & S.L. WORONOWICZ, *A remark on manageable multiplicative unitaries*, Lett. Math. Phys. **57** (2001), 239–252.
- [21] P. URBAŃSKI, *Analiza dla studentów fizyki*, KMMF, Warszawa 1998.
- [22] A. VAN DAELE, *The Haar measure on some locally compact quantum groups*, preprint OA/0109004.
- [23] S.L. WORONOWICZ, *Duality in the C^* -algebra theory*, Proc. Int. Congr. Math. Warsaw 1983, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1347–1356.
- [24] S.L. WORONOWICZ, *Unbounded elements affiliated with C^* -algebras and non-compact quantum groups*, Comm. Math. Phys. **136** (1991), 399–432.
- [25] S.L. WORONOWICZ, *Operator equalities related to the quantum $E(2)$ group*, Comm. Math. Phys. **144** (1992), 417–428.
- [26] S.L. WORONOWICZ, *quantum $E(2)$ group and its Pontryagin dual*, Lett. Math. Phys. **23** (1991), 251–263.
- [27] S.L. WORONOWICZ, *An example of a braided locally compact group*, z książki *Quantum groups, formalism and applications, Proceedings of XXXth Karpacz winter school in theoretical physics*, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa (1995), 155–171.
- [28] S.L. WORONOWICZ, *C^* -algebras generated by unbounded elements*, Rev. Math. Phys. **7**, No. 3 (1995), 481–521.
- [29] S.L. WORONOWICZ, *From multiplicative unitaries to quantum groups*, Int. J. Math. **7**, No. 1 (1996), 127–149.

- [30] S.L. WORONOWICZ, *Quantum exponential function*, Rev. Math. Phys. **12**, No. 6, (2000), 873–920.
- [31] S.L. WORONOWICZ, *Quantum ‘ $az + b$ ’ group on complex plane*, Int. J. Math. **12**, No. 4 (2001), 461–503.
- [32] S.L. WORONOWICZ & K. NAPIÓRKOWSKI, *Operator theory in the C^* -algebra framework*, Rep. Math. Phys. **31** (1992), 353–371.
- [33] S.L. WORONOWICZ & S. ZAKRZEWSKI, *Quantum ‘ $ax + b$ ’ group*, Rev. Math. Phys. **14**, Nos. 7 & 8 (2002), 797–828.