

Uniwersytet Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Praca Magisterska

Piotr Mikołaj Sołtan

Nr albumu 158037

**Analityczne generatory
jednoparametrowych grup izometrii
przestrzeni Banacha**

Praca przygotowana pod opieką prof. dra hab. S. L. Woronowicza

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Warszawa 1999

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Notacja	4
3	Algebry von Neumanna	7
3.1	Słabe topologie na przestrzeniach Banacha	7
3.2	Topologie na przestrzeni $B(H)$	10
3.3	Twierdzenie von Neumanna	16
3.4	Elementarna teoria C^* -algebr i W^* -algebr	21
4	Teoria Tomity-Takesakiego dla stanów	25
4.1	Algebry σ -skończone	25
4.2	Twierdzenie Tomity i grupa automorfizmów modularnych	27
4.3	Warunek KMS	32
5	Kwantowa mechanika statystyczna	34
5.1	Sformułowanie zagadnienia	34
5.2	Układy kratowe	35
5.3	Równowaga układów skończonych	37
5.4	Granica termodynamiczna	38
6	Pełna teoria Tomity-Takesakiego	40
6.1	Uogólnione wektory cykliczne i separujące	40
6.2	Wagi i twierdzenie Haagerupa	49
6.3	Teoria Tomity-Takesakiego dla wag	53
6.4	Porównywanie wag	55
7	Analityczne generatory grup izometrii przestrzeni Banacha	60
7.1	Jednoparametrowe grupy i przedłużenia analityczne	60
7.2	Spektrum analitycznego generatora	67
7.3	Wzór Ciorănescu-Zsidó	72
8	Analityczny generator grupy automorfizmów modularnych	75
8.1	Funkcjonały normalne	75
8.2	Pewien podzbiór $M \times M$	78
9	Podziękowania	85

1 Wstęp

Praca prezentuje elementy teorii algebr von Neumanna z uwzględnieniem teorii Tomity-Takesakiego i zastosowań tej teorii w fizyce. Niektóre pojęcia i techniki znajdujące w naturalny sposób zastosowanie w problemach stawianych w teorii Tomity-Takesakiego mogą być sformułowane w dużo ogólniejszym języku dualnych par przestrzeni Banacha. Takie właśnie ujęcie przedstawia Rozdział 7. W rozdziale tym formułujemy i dowodzimy ogólne twierdzenie o spektrum amplifikacji analitycznego generatora jednoparametrowej grupy izometrii przestrzeni Banacha ciągłej w słabej topologii zadanej przez parę dualną.

W Rozdziale 2 zebraliśmy podstawowe oznaczenia i konwencje stosowane w pracy. Rozdział 3 rozpoczynamy od podania kilku faktów z ogólnej teorii przestrzeni Banacha. Kładziemy nacisk na to, że każda algebra von Neumanna M jest przestrzenią sprzężoną do pewnej przestrzeni Banacha M_* , której charakterystykę podajemy. Podajemy również jawny opis słabej* topologii na M . Następnie dowodzimy wszystkich twierdzeń teorii operatorów i teorii algebr operatorów, które są później wykorzystywane.

Rozdział 4 przedstawia teorię Tomity-Takesakiego dla algebr σ -skończonych. Niektóre rezultaty zaprezentowane w tym rozdziale pozostawione są bez dowodu.

Kolejny rozdział stanowi ilustrację zastosowań teorii algebr operatorów w kwantowej mechanice statystycznej i związek teorii Tomity-Takesakiego z algebraiczną kwantową teorią pola. Dalsze, a przy tym, bardzo ciekawe rozważania na ten temat można znaleźć na przykład w pracach [Rob] czy też [Hug].

W Rozdziale 6 prezentujemy nowe podejście do rozszerzenia teorii Tomity-Takesakiego na klasę wszystkich algebr von Neumanna. Aby sformułować główne twierdzenia teorii Tomity-Takesakiego używamy pojęcia uogólnionych wektorów cyklicznych i separujących. Rezultaty tego rozdziału oparte są głównie na [SLW7]. Dzięki twierdzeniu o ogólnej postaci uogólnionych wektorów cyklicznych i separujących na algebrach von Neumanna działających w ośrodkowej przestrzeni Hilberta uzyskujemy nowy dowód szczególnego przypadku twierdzenia Haagerupa o wagach (Twierdzenie 6.2.6). Na koniec Rozdziału 6 przytaczamy pewne twierdzenia i konstrukcje stosowane w teorii algebr von Neumanna rozwinięte głównie przez Alaina Connes'a.

Jak już wspomnieliśmy wyżej Rozdział 7 poświęcony jest ogólnemu sformułowaniu pewnych zagadnień pojawiających się implicite w teorii Tomity-Takesakiego. Najważniejszymi wynikami zaprezentowanymi w tym rozdziale są Wniosek 7.2.6 i wyprowadzony z niego wzór (7.21).

W ostatnim rozdziale szkicujemy rolę analitycznych generatorów jednoparametrowych grup izometrii przestrzeni Banacha w teorii Tomity-Takesakiego. Korzystamy przy tym z głównego twierdzenia pracy [Z2], którego dowód niestety nie został jeszcze opublikowany. Przedstawione w tym rozdziale Twierdzenie 8.2.7 jest prostym, a zarazem ciekawym, uogólnieniem jednego z wyników z [Z2].

W pracy korzystamy z teorii operatorów (ograniczonych i nieograniczonych) w prze-

strzeniach Hilberta i Banacha. Doskonałymi referencjami z tego działu matematyki są książki [Mau1], [AkGl], [DuSc] i [Yos]. Nasze wyniki opieramy oprócz tego na [SLW6]. W toku pracy kilkakrotnie korzystamy z prostych lematów z zakresu podstawowej analizy zespolonej, których dowody pominęliśmy. Wszystkie techniki potrzebne do policzenia odpowiednich całek można znaleźć na przykład w książce [Mau2].

2 Notacja

W pracy będziemy starali się używać standardowej notacji stosowanej w literaturze na temat algebr operatorów. Będziemy używali symboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$ na oznaczenia odpowiednio zbioru liczb naturalnych, zbioru liczb całkowitych i ciał liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych. Ponadto przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_+ &= \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \mathbb{R}_+ &= \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}, \\ \mathbb{C}_+ &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}.\end{aligned}$$

Kolejnym ważnym oznaczeniem wykorzystywanym w pracy będzie

$$D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |\operatorname{Im} z| \leq |\beta|, \beta \operatorname{Im} z \geq 0\},$$

gdzie $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wszystkie przestrzenie liniowe, które będziemy rozważali, będą nad ciałem liczb zespolonych. Literą H będziemy wszędzie poza Rozdziałem 5 oznaczać przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym $(\cdot|\cdot)$ antyliniowym względem pierwszej zmiennej i liniowym względem drugiej. Inne przestrzenie wektorowe będziemy oznaczać literami X , Y , $\mathcal{F}$ oraz M lub A . Do oznaczania elementów przestrzeni wektorowych (na przykład przestrzeni Hilberta H) będziemy używać małych liter łacińskich z końca alfabetu: x , y , z itp. oraz litery Ω dla wyróżnionego wektora. Elementy przestrzeni wektorowych z gradacją będziemy przedstawiać jako kolumny: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ lub

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czy też} \quad \begin{pmatrix} x_1, \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Taki sposób przedstawiania elementów przestrzeni wektorowych z gradacją ułatwi stosowanie notacji macierzowej dla operatorów działających w takich przestrzeniach. Algebrę macierzy $N \times N$ nad dowolnym pierścieniem R będziemy oznaczać przez $M_N(R)$. Ponadto będziemy stosować oznaczenia

$$\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_N) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_N \end{pmatrix}$$

oraz

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Przez operator rozumiemy operator liniowy. Dla operatorów ograniczonych zarezerwujemy małe litery łacińskie z początku alfabetu: a, b, c itd. Będziemy jednak używać innych liter dla wyróżnionych klas operatorów. Pierwszą z nich będą operatory rzutowe. Przez rzut w przestrzeni Hilberta H rozumiemy operator ograniczony $p: H \rightarrow H$ taki, że $p^*p = p$. Operatory rzutowe będą oznaczane literami p, q, P itp. Komutator operatorów a i b : $ab - ba$ będziemy oznaczać przez $[a, b]$. Dla dowolnych niezerowych wektorów x i y w przestrzeni Hilberta H symbolem $|x\rangle\langle y|$ będziemy oznaczać operator

$$H \ni z \longmapsto (y|z)x \in H.$$

Operatory unitarne i izometryczne będą oznaczane literami u, v, w, U itp. Będziemy używać rachunku funkcji borelowskich dla operatorów samosprzężonych (niekoniecznie ograniczonych) w przestrzeni Hilberta. Spektrum operatora a (a także spektrum elementu algebry Banacha) będziemy oznaczać przez $\text{Sp } a$. Ponadto będziemy używać bardzo wygodnej notacji wprowadzonej w [SLW5], mianowicie: niech a będzie operatorem samosprzężonym w przestrzeni Hilberta H . Wówczas twierdzenie spektralne mówi, że

$$a = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \lambda dE(\lambda),$$

gdzie E jest miarą spektralną związaną z operatorem a i dla dowolnej funkcji borelowskiej f na $\mathbb{R}$ mamy

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f(\lambda) dE(\lambda),$$

Niech χ będzie ewaluacją logiczną zdania:

$$\begin{aligned} \chi(\text{fałsz}) &= 0, \\ \chi(\text{prawda}) &= 1. \end{aligned}$$

Teraz jeśli $\mathcal{R}$ jest jednoargumentową relacją zdefiniowaną na zbiorze liczb rzeczywistych, to $f_{\mathcal{R}}(\lambda) = \chi(\mathcal{R}(\lambda))$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mathcal{R}(\lambda)\}$ i (jeśli tylko Δ jest zbiorem mierzalnym) $f_{\mathcal{R}}(a) = E(\Delta)$ jest rzutem spektralnym odpowiadającym Δ . W dalszym ciągu będziemy pisać $\chi(\mathcal{R}(a))$ zamiast $f_{\mathcal{R}}(a)$:

$$\chi(\mathcal{R}(a)) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi(\mathcal{R}(\lambda)) dE(\lambda) = E(\Delta).$$

Obraz tego rzutu będziemy oznaczać przez $H(\mathcal{R}(a))$.

W ten sposób nadaliśmy sens wyrażeniom takim jak $\chi(a > 0)$, $\chi(a^2 = 1)$, $\chi(a \neq 0)$ itp. Dla przykładu $H(a = 1)$ jest podprzestrzenią własną operatora a odpowiadającą wartości własnej 1, a $\chi(a = 1)$ jest rzutem na tę podprzestrzeń. Ogólnie jeśli $\Delta \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem borelowskim, to $H(a \in \Delta)$ jest podprzestrzenią spektralną odpowiadającą Δ , a $\chi(a \in \Delta)$ jest odpowiednim rzutem spektralnym.

Praktycznie wszystkie operatory nieograniczone, z którymi będziemy mieli do czynienia będą gęsto zdefiniowane i domknięte. Dla wyróżnienia będziemy operatory nieograniczone oznaczać wielkimi literami łacińskimi: T, S, A itp. Dla dowolnego operatora T symbolami $D(T)$ i $\text{Graph}(T)$ będziemy oznaczać odpowiednio jego dziedzinę i wykres. Jeśli $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp } T$, to $R(T, \lambda)$ oznacza rezolwentę operatora T w punkcie λ .

Operator T działający w przestrzeni X będziemy nazywać niezdegenerowanym, jeśli $\ker T = \{0\}$ i TX jest gęsty w X . Przestrzeń wszystkich operatorów ograniczonych działających w przestrzeni Banacha X oznaczamy przez $B(X)$. Dla dowolnej przestrzeni Banacha X symbolem X_1 będziemy oznaczać domkniętą kulę jednostkową w X :

$$X_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Będziemy rozważać różne topologie na przestrzeniach Banacha. Jeśli τ jest topologią na pewnej przestrzeni Banacha to będziemy mówić o τ -zbieżności, τ -gęstości, τ -domkniętości itd. Podobnie jeśli τ jest topologią na X , a σ topologią na Y , to $\tau \times \sigma$ oznacza topologię produktową na $X \times Y$. Granicę ciągu uogólnionego $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ elementów przestrzeni Banacha X indeksowanego zbiorem skierowanym Λ oznaczamy przez

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda.$$

Jeśli jest istotne w jakiej topologii ciąg $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest zbieżny, to piszemy

$$x_\lambda \xrightarrow[\lambda \in \Lambda]{\tau} x \in X.$$

W przypadku gdy relacja częściowego porządku w zbiorze indeksów ciągu uogólnionego nie jest dana explicite, przyjmujemy dla niej oznaczenie “ $\succeq$ ” (ew. “ $\preceq$ ”). Przez sumę szeregu uogólnionego (tj. sumę wyrazów ciągu uogólnionego $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$) rozumiemy granicę ciągu uogólnionego sum częściowych indeksowanego zbiorem skończonych podzbiorów Λ częściowo uporządkowanym przez relację “ $\subset$ ”.

Na koniec należy wspomnieć o dwóch oznaczeniach używanych w zapisywaniu równości. Symbolu “ $\stackrel{\text{ozn}}{=}$ ” będziemy używać do wprowadzania nowych oznaczeń. Z kolei oznaczenie

$$LHS \stackrel{\text{x.xx}}{=} RHS$$

mówi, że ze wzoru (x.xx) wnioskujemy równość wyrażeń LHS i RHS .

3 Algebry von Neumanna

Teoria algebr von Neumanna powstała w latach trzydziestych dwudziestego wieku. Od tego czasu stała się ona bardzo ciekawym i bogatym w zastosowania działem matematyki. Jednym z przełomowych odkryć tej teorii było twierdzenie Tomity (patrz np. [VD4]) stanowiące podstawę tak zwanej teorii Tomity-Takesakiego przedstawionej w monografii [Tak]. Doskonałym podręcznikiem obejmującym mnóstwo zagadnień z teorii algebr von Neumanna jest słynna książka [Dix2]. Spośród wielu innych pozycji, które obejmują również bardziej zaawansowane aspekty teorii godne polecenia są [StZs], [Ped] i [Bra]. Należy pamiętać, że już sam John von Neumann motywował swoje badania nad pierścieniami operatorów (jak wówczas nazywano algebry von Neumanna) głównie zastosowaniami tej teorii w fizyce.

3.1 Słabe topologie na przestrzeniach Banacha

Definicję algebry von Neumanna poprzedzimy krótką dyskusją słabych topologii na przestrzeniach Banacha. Kluczową rolę odegra następujący, łatwy lemat:

Lemat 3.1.1 *Niech X będzie przestrzenią Banacha, ϕ funkcjonalem liniowym na X , a $p_1, \dots, p_N$ półnormami na X takimi, że dla każdego $x \in X$*

$$|\phi(x)| \leq \sum_{k=1}^N p_k(x).$$

Wówczas istnieją funkcjonały liniowe $\phi_1, \dots, \phi_N$ na X takie, że

$$\phi = \sum_{k=1}^N \phi_k$$

oraz dla wszystkich $x \in X$

$$|\phi_k(x)| \leq p_k(x), \quad k = 1, \dots, N.$$

Dowód: Niech

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} : x \in X \right\} \subset X^N.$$

definiujemy półnormę p na X^N

$$p \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \right) = \sum_{k=1}^N p_k(x_k).$$

Na D definiujemy funkcjonal

$$\Phi_0 \left(\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \right) = \phi(x).$$

$D \subset X^N$, Φ_0 oraz p spełniają założenia twierdzenia Hahna-Banacha, więc istnieje funkcjonal Φ na X^N taki, że dla każdego $x \in X$

$$\Phi \left(\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \right) = \Phi_0 \left(\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \right)$$

i dla każdego $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in X^N$

$$\left| \Phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \right) \right| \leq p \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \right).$$

Teraz możemy zdefiniować funkcjonały $\phi_1, \dots, \phi_N$:

$$\phi_k(x) = \Phi(i_k(x)), \quad k = 1, \dots, N,$$

gdzie $i_k: X \rightarrow X^N$ jest włożeniem $x \in X$ na k -tą współrzędną.

Q.E.D.

Niech X w dalszym ciągu oznacza przestrzeń Banacha. Przez X^* oznaczmy przestrzeń sprzężoną do X . Niech $\mathcal{F}$ będzie (niekoniecznie domkniętą) podprzestrzenią wektorową w X^* mającą własność rozdzielania punktów X , tj. dla każdej pary różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieje $\phi \in \mathcal{F}$ taki, że $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$. Symbolem $\sigma(X, \mathcal{F})$ oznaczamy słabą topologię w X zadaną przez rodzinę półnorm $\{p_\phi\}_{\phi \in \mathcal{F}}$

$$p_\phi(x) = |\phi(x)|, \quad x \in X.$$

Własność rozdzielania punktów X przez funkcjonały z $\mathcal{F}$ daje nam to, że $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologia na X jest topologią Hausdorffa.

Lemat 3.1.2 *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $\mathcal{F}$ podprzestrzenią wektorową w X^* mającą własność rozdzielania punktów X , a ϕ funkcjonalem liniowym na X . Wówczas:*

1.
$$\left(\begin{array}{c} \phi \text{ jest} \\ \sigma(X, \mathcal{F})\text{-ciągły} \end{array} \right) \iff (\phi \in \mathcal{F}).$$
2.
$$\left(\begin{array}{c} \phi \text{ jest} \\ \sigma(X, \mathcal{F})\text{-ciągły na } X_1 \end{array} \right) \iff (\phi \in \overline{\mathcal{F}}).$$
3.
$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} \text{ i } \phi \text{ jest} \\ \sigma(X, \mathcal{F})\text{-ciągły na } X_1 \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{c} \phi \text{ jest} \\ \sigma(X, \mathcal{F})\text{-ciągły na } X \end{array} \right).$$

Dowód: Ad 1.: “ $\Leftarrow$ ”. Jeśli $\phi \in \mathcal{F}$, to oczywiście ϕ jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągły.

“ $\Rightarrow$ ”. Załóżmy, że ϕ jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągły. Wówczas istnieją funkcjonały $\psi_1, \dots, \psi_N \in \mathcal{F}$ takie, że dla każdego $x \in X$ mamy

$$|\phi(x)| \leq \sum_{k=1}^N p_{\psi_k}(x).$$

Z Lematu 3.1.1 wiemy, że istnieją funkcjonały $\phi_1, \dots, \phi_N$ na X takie, że

$$\phi = \sum_{k=1}^N \phi_k$$

oraz dla wszystkich $x \in X$

$$|\phi_k(x)| \leq p_{\psi_k}(x) = |\psi_k(x)|, \quad k = 1, \dots, N.$$

Jeśli $\psi_k = 0$, to $\phi_k = 0$. Jeśli $\psi_k \neq 0$, to istnieje $x_k \in X$ taki, że $\psi_k(x_k) = 1$. Wtedy dla każdego $x \in X$ mamy

$$|\phi_k(x - \psi_k(x)x_k)| \leq |\psi_k(x - \psi_k(x)x_k)| = 0,$$

a stąd dla każdego $x \in X$

$$\phi_k(x - \psi_k(x)x_k) = 0$$

czyli

$$\phi_k(x) = \psi_k(x)\phi_k(x_k).$$

Zatem

$$\phi_k = \phi_k(x_k)\psi_k \in \mathcal{F}$$

oraz

$$\phi = \sum_{k=1}^N \phi_k \in \mathcal{F}.$$

Ad 2.: “ $\Leftarrow$ ”. Załóżmy, że $\phi \in \overline{\mathcal{F}}$. Wtedy istnieje ciąg funkcjonałów $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ taki, że

$$\|\phi - \psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Niech $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie ciągiem uogólnionym elementów X_1 $\sigma(X, \mathcal{F})$ -zbieżnym do $x \in X_1$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$ mamy

$$\|\phi - \psi_n\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Istnieje również $\lambda_0 \in \Lambda$ takie, że dla wszystkich $\lambda \succeq \lambda_0$

$$|\psi_{n_0}(x_\lambda) - \psi_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zatem

$$|\phi(x_\lambda) - \phi(x)| \leq |\phi(x_\lambda) - \psi_{n_0}(x_\lambda)| + |\psi_{n_0}(x_\lambda) - \psi_{n_0}(x)| + |\psi_{n_0}(x) - \phi(x)| < \varepsilon$$

dla $\lambda \succeq \lambda_0$, a więc ϕ jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągły na X_1 .

“ $\Rightarrow$ ”. Niech ϕ będzie funkcjonałem na X , którego obcięcie do X_1 jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłe.

Wówczas ϕ jest normowo ciągły: $\|\phi\| < \infty$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Jako, że $\phi|_{X_1}$ jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągły w 0 wnioskujemy, że istnieją funkcjonały $\psi_1, \dots, \psi_N \in \mathcal{F}$ takie, że

$$\left(\|x\| \leq 1, \quad \sum_{k=1}^N p_{\psi_k}(x) < 1 \right) \implies (|\phi(x)| < \varepsilon),$$

a stąd wynika, że dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$\left(\sum_{k=1}^N p_{\psi_k} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) < 1 \right) \implies (|\phi(x)| < \varepsilon \|x\|),$$

co można także przepisać jako

$$\left(\sum_{k=1}^N p_{\psi_k}(x) < \|x\| \right) \implies (|\phi(x)| < \varepsilon \|x\|).$$

Dla dowolnego $x \in X$ zachodzi jeden z następujących przypadków:

$$\text{I. } \sum_{k=1}^N p_{\psi_k}(x) < \|x\| \text{ i wtedy } |\phi(x)| < \varepsilon \|x\|,$$

$$\text{II. } \sum_{k=1}^N p_{\psi_k}(x) \geq \|x\| \text{ i wtedy } |\phi(x)| \leq \|\phi\| \|x\| \leq \|\phi\| \sum_{k=1}^N p_{\psi_k}(x),$$

a więc dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$|\phi(x)| \leq \varepsilon \|x\| + \|\phi\| \sum_{k=1}^N p_{\psi_k}(x).$$

W tej sytuacji korzystając z Lematu 3.1.1 widzimy, że istnieją funkcjonały ϕ_1 i ϕ_2 na X takie, że

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

i dla każdego $x \in X$ mamy

$$\begin{aligned} |\phi_1(x)| &\leq \varepsilon \|x\|, \\ |\phi_2(x)| &\leq \|\phi\| \sum_{k=1}^N p_{\psi_k}(x), \end{aligned}$$

a zatem na mocy punktu 1. $\phi_2 \in \mathcal{F}$ i $\|\phi - \phi_2\| = \|\phi_1\|$, ale $\|\phi_1\| \leq \varepsilon$ czyli $\phi \in \overline{\mathcal{F}}$.

Ad 3.: Punkt 3. jest oczywistą konsekwencją punktów 1. i 2.

Q.E.D.

3.2 Topologie na przestrzeni $B(H)$

Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Dla $x, y \in H$ definiujemy na przestrzeni Banacha $B(H)$ funkcjonał $\omega_{x,y}$ wzorem

$$\omega_{x,y}(a) = (x|ay).$$

łatwo sprawdzić, że $\omega_{x,y} \in B(H)^*$ i $\|\omega_{x,y}\| = \|x\|\|y\|$. Przyjmijmy oznaczenia:

$$B(H)_{\sim} = \text{span}\{\omega_{x,y} : x, y \in H\} \subset B(H)^*,$$

$$B(H)_* = \overline{B(H)_{\sim}}.$$

Na przestrzeni $B(H)$ oprócz topologii normowej definiujemy jeszcze następujące topologie:

- *słaba operatorowa topologia* jest to po prostu $\sigma(B(H), B(H)_{\sim})$ -topologia. Nazywamy ją również *wo-topologią*.
- *słaba topologia* (inaczej ultrasłaba lub σ -słaba topologia) jest to $\sigma(B(H), B(H)_*)$ -topologia. Nazywamy ją również *w-topologią*.
- *mocna operatorowa topologia* jest to topologia wprowadzona przez rodzinę półnorm $\{p_x\}_{x \in H}$, $p_x(a) = \|ax\|$. Mówimy też o niej jako o *so-topologii*.
- *mocna topologia* (inaczej ultramocna lub σ -mocna topologia) jest to topologia zadana przez rodzinę półnorm

$$\left\{ p_{\{x_n\}} : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \right\},$$

$$p_{\{x_n\}}(a) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ax_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nazwamy tę topologię również *s-topologią*.

Warto w tym miejscu wspomnieć o wygodnych w konkretnych rachunkach bazach otoczeń $0 \in B(H)$ dla *s-topologii* i *so-topologii*, mianowicie bazą otoczeń 0 w *so-topologii* są zbiory

$$\mathcal{O}_{\varepsilon, \{x_1, \dots, x_N\}} = \left\{ a \in B(H) : \sum_{n=1}^N \|ax_n\|^2 < \varepsilon \right\}, \quad (3.1)$$

gdzie $\{x_1, \dots, x_N\}_{N \in \mathbb{N}} \subset H$ jest dowolnym ciągiem, a bazą otoczeń 0 w *s-topologii* są zbiory

$$\mathcal{O}_{\varepsilon, \{x_n\}} = \left\{ a \in B(H) : \sum_{n=1}^{\infty} \|ax_n\|^2 < \varepsilon \right\}, \quad (3.2)$$

gdzie $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ jest dowolnym ciągiem wektorów takim, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty.$$

Uwaga 3.2.1 *Topologie mocna i mocna operatorowa pokrywają się na zbiorach normowo ograniczonych w $B(H)$.*

Dowód: Jest oczywiste, że jeśli ciąg uogólniony $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest s-zbieżny do zera, to jest on również so-zbieżny do zera (patrz (3.1) i (3.2)). Z drugiej strony, jeśli $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest so-zbieżny od zera i

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|a_\lambda\| \leq C \in \mathbb{R}_+,$$

to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ takiego, że $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{2C^2}.$$

Ponieważ $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest so-zbieżny, istnieje $\lambda_0 \in \Lambda$ taka, że dla wszystkich $\lambda \succeq \lambda_0$

$$\sum_{n=1}^N \|a_\lambda x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tak więc dla $\lambda \succeq \lambda_0$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_\lambda x_n\|^2 < \varepsilon$$

czyli $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest s-zbieżny do zera.

Q.E.D.

Korzystając z Lematu 3.1.2 przy $X = B(H)$ i $\mathcal{F} = B(H)_\sim$ łatwo otrzymujemy następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 3.2.2 *Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Wówczas*

1. $B(H)_\sim$ jest zbiorem wszystkich wo-ciągłych funkcjonalów na $B(H)$;
2. $B(H)_*$ jest zbiorem wszystkich w-ciągłych funkcjonalów na $B(H)$;
3. Funkcjonał ϕ na $B(H)$ jest w-ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi|_{B(H)_1}$ jest wo-ciągły.

Teraz możemy udowodnić kluczowe dla teorii algebr von Neumanna twierdzenie:

Twierdzenie 3.2.3 *Funkcjonał liniowy ϕ na $B(H)$ jest wo-ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest so-ciągły.*

Dowód: łatwo się przekonać, że jeśli ϕ jest wo-ciągły, to jest również so-ciągły.

Jeśli ϕ jest so-ciągły, to istnieją niezerowe wektory $x_1, \dots, x_N \in H$ takie, że dla każdego $a \in B(H)$ mamy

$$|\phi(a)| \leq \sum_{k=1}^N \|ax_k\|.$$

Pamiętamy z Lematu 3.1.1, że istnieją funkcjonały $\phi_1, \dots, \phi_N$ na $B(H)$ takie, że

$$\phi = \sum_{k=1}^N \phi_k$$

i dla każdego $a \in B(H)$ mamy

$$|\phi_k(a)| \leq \|ax_k\|, \quad k = 1, \dots, N.$$

Dla ustalonego $k \in \{1, \dots, N\}$ mamy $\{ax_k : a \in B(H)\} = H$, a więc odwzorowanie

$$ax_k \longmapsto \phi_k(a)$$

jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na H . Z twierdzenia RIESZA o postaci takiego funkcjonału wiemy, że istnieje wektor $y_k \in H$ taki, że dla wszystkich $a \in B(H)$

$$\phi_k(a) = (y_k | ax_k).$$

Tak więc wykazaliśmy, że dla $k = 1, \dots, N$ istnieje $y_k \in H$ taki, że

$$\phi_k = \omega_{y_k, x_k} \in B(H)_{\sim},$$

a stąd

$$\phi = \sum_{k=1}^N \phi_k \in B(H)_{\sim}$$

czyli ϕ jest wo-ciągły.

Q.E.D.

Z Twierdzenia 3.2.3 i z geometrycznej wersji twierdzenia HAHNA-BANACHA mamy następujący wniosek:

Wniosek 3.2.4 *Wypukły podzbiór $B(H)$ jest wo-domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jest so-domknięty.*

Lemat 3.2.5 *Przestrzeń Banacha $B(H)$ jest izomorficzna z przestrzenią sprzężoną do przestrzeni $B(H)_*$. Izomorfizm $B(H) \simeq (B(H)_*)^*$ zadany jest przez kanoniczną formę biliniową*

$$B(H) \times B(H)_* \ni (a, \phi) \longmapsto \phi(a) \in \mathbb{C}.$$

Dowód: Niech $a \in B(H)$. Definiujemy funkcjonał Φ_a na $B(H)_*$ wzorem

$$\Phi_a(\phi) = \phi(a).$$

Oczywiście $\|\Phi_a\| \leq \|a\|$. Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sup\{\|ax\| : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|(y|ax)| : x, y \in H, \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\omega_{x,y}(a)| : x, y \in H, \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &\leq \sup\{|\Phi_a(\omega_{x,y})| : \|\omega_{x,y}\| = 1\} \leq \|\Phi_a\| \end{aligned}$$

czyli $\|\Phi_a\| = \|a\|$.

Niech $\Phi \in (B(H)_*)^*$. Definiujemy formę półtoraliniową $\tilde{\phi}$ na H wzorem

$$\tilde{\phi}(x, y) = \Phi(\omega_{x,y}).$$

Z twierdzenia RIESZA wiemy, że istnieje dokładnie jeden operator $a \in B(H)$ taki, że

$$\tilde{\phi}(x, y) = (x|ay)$$

dla wszystkich $x, y \in H$. Widzimy zatem, że

$$\Phi(\omega_{x,y}) = \Phi_a(\omega_{x,y})$$

dla wszystkich $x, y \in H$, a co za tym idzie

$$\Phi(\phi) = \Phi_a(\phi)$$

dla każdego $\phi \in B(H)_\sim$. Stąd $\Phi = \Phi_a$.

Q.E.D.

Lemat 3.2.6 *Niech B będzie przestrzenią Banacha, a $B_* \subset B^*$ normowo domkniętą podprzestrzenią taką, że $B \simeq (B_*)^*$ i izomorfizm ten jest zadany przez kanoniczną formę biliniową na $B \times B_*$. Niech $M \subset B$ będzie $\sigma(B, B_*)$ -domkniętą podprzestrzenią wektorową. Przyjmijmy oznaczenie*

$$M_* = \{\phi|_M : \phi \in B_*\} \subset M^*.$$

Wówczas

1. M_* jest normowo domkniętą podprzestrzenią w M^* ;
2. Dla dowolnego $\psi \in M_*$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\phi \in B_*$ taki, że

$$\psi = \phi|_M \quad \text{oraz} \quad \|\phi\| \leq \|\psi\| + \varepsilon;$$

3. Kanoniczna forma biliniowa na $M \times M_*$ zadaje izomorfizm $M \simeq (M_*)^*$.

Dowód: Ad 1.: Zdefiniujmy

$$M^\circ = \{\phi \in B_* : \phi|_M = 0\}.$$

Podprzestrzeń M jest $\sigma(B, B_*)$ -domknięta, a więc na mocy Twierdzenia 4.7 (b) z [Rud] mamy

$$M = M^{\circ\circ} = \{x \in B : \phi(x) = 0 \text{ dla wszystkich } \phi \in M^\circ\}.$$

Odwzorowanie

$$B_* \ni \phi \longmapsto \phi|_M \in M_*$$

jest liniowe, jego norma jest nie większa niż 1, a jego jądrem jest M° . Indukuje więc ono odwzorowanie

$$B_*/M^\circ \ni \phi + M^\circ \longmapsto \phi|_M \in M_*. \quad (3.3)$$

Pokażemy, że odwzorowanie (3.3) jest izometrią. Niech $\phi_0 \in B_*$ będzie takie, że

$$\|\phi_0 + M^\circ\| = 1,$$

tj. $\text{dist}(\phi_0, M^\circ) = 1$. Z twierdzenia Hahna-Banacha wiemy, że istnieje ograniczony funkcjonal Φ na B_* taki, że

$$\|\Phi\| = \Phi(\phi_0) = 1$$

oraz dla każdego $\phi \in M^\circ$

$$\Phi(\phi) = 0.$$

Skoro $B = (B_*)^*$, to istnieje $x \in B$ taki, że $\|x\| = \phi_0(x) = 1$ i $\phi(x) = 0$ dla wszystkich $\phi \in M^\circ$. Stąd $x \in M^{\circ\circ} = M$ i $\|\phi_0|_M\| \geq \phi_0(x) = 1$, a więc (3.3) jest izometrycznym izomorfizmem.

B_*/M° jest przestrzenią zupełną, a więc M_* także jest zupełna, a zatem jest domknięta w topologii normowej w M^* .

Ad 2.: W punkcie 1. wykazaliśmy, że dla dowolnego $\psi \in M_*$ istnieje $\phi_0 \in B_*$ taki, że $\psi = \phi_0|_M$ i

$$\|\psi\| = \|\phi_0 + M^\circ\| = \text{dist}(\phi_0, M^\circ) = \inf\{\|\phi_0 - \phi\| : \phi \in M^\circ\}.$$

Teraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\phi_1 \in M^\circ$ taki, że

$$\|\phi_0 + \phi_1\| \leq \|\psi\| + \varepsilon.$$

Tak więc kładąc $\phi = \phi_0 + \phi_1$ mamy

$$\phi|_M = \psi$$

oraz

$$\|\phi\| \leq \|\psi\| + \varepsilon.$$

Ad 3.: Dla dowolnego $x \in M$ odwzorowanie

$$\Psi_x : M_* \ni \psi \longmapsto \psi(x) \in \mathbb{C}$$

jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na M_* . Biorąc pod uwagę kanoniczne utożsamienie $B = (B_*)^*$ i udowodniony powyżej punkt 2. mamy

$$\begin{aligned} \|\Psi_x\| &= \sup\{|\psi(x)| : \psi \in M_*, \|\psi\| < 1\} \\ &= \sup\{|\phi(x)| : \phi \in B_*, \|\phi\| < 1\} = \|x\|. \end{aligned}$$

Niech $\Psi \in (M_*)^*$. Definiujemy funkcjonal liniowy na B_* wzorem

$$\Phi(\phi) = \Psi(\phi|_M).$$

Wtedy $\Phi \in (B_*)^*$ i $\Phi|_{M^\circ} = 0$. Wiemy, że $(B_*)^* = B$ więc istnieje $x \in B$ taki, że

$$\Phi(\phi) = \phi(x)$$

dla wszystkich $\phi \in B_*$ oraz

$$\phi(x) = 0$$

dla wszystkich $\phi \in M^\circ$. Stąd $x \in M^{\circ\circ} = M$ i mamy

$$\Psi(\phi|_M) = \phi|_M(x) = \Psi_x(\phi|_M)$$

dla dowolnego $\phi \in B_*$, a więc $\Psi = \Psi_x$.

Q.E.D.

Niech $M \subset B(H)$ będzie w-domkniętą podprzestrzenią. Przez $M_\sim$ będziemy oznaczać *przestrzeń wo-dualną do M*, tj. zbiór wszystkich wo-ciągłych funkcjonałów na M . $M_\sim$ jest podprzestrzenią wektorową w M^* . Symbolem M_* będziemy oznaczać *przestrzeń w-dualną do M*, tj. zbiór wszystkich w-ciągłych funkcjonałów na M . Oczywiście M_* także jest podprzestrzenią wektorową w M^* .

Twierdzenie 3.2.7 Niech $M \subset B(H)$ będzie w-domkniętą podprzestrzenią wektorową. Wówczas

1. $M_\sim = \{\phi|_M : \phi \in B(H)_\sim\}$;
2. $M_* = \{\phi|_M : \phi \in B(H)_*\}$;
3. $M_* = \overline{M_\sim}$, tj. M_* jest domknięciem $M_\sim$ w topologii normowej w M^* ;
4. Kanoniczna forma biliniowa na $M \times M_*$ zadaje izomorfizm $M \simeq (M_*)^*$.

Dowód: Punkty 1. i 2. wynikają ze Stwierdzenia 3.2.2 po uprzednim zastosowaniu twierdzenia Hahna-Banacha. Z kolei punkt 4. jest konsekwencją punktu 2., Lematu 3.2.5 i Lematu 3.2.6.

Ad 3.: Z punktów 1. i 2. wynika, że ograniczone odwzorowanie liniowe $\phi \mapsto \phi|_M$ przeprowadza $B(H)_\sim$ na $M_\sim$ i $B(H)_*$ na M_* . Tak więc skoro $\overline{B(H)_\sim} = B(H)_*$, to $\overline{M_\sim} = M_*$. Q.E.D.

Definicja 3.2.8 Niech $M \subset B(H)$ będzie w-domkniętą podprzestrzenią wektorową. Normowo domkniętą podprzestrzeń M_* przestrzeni sprzężonej (dualnej) do M nazywamy przestrzenią predualną do M .

3.3 Twierdzenie von Neumanna

Możemy wyposażyć przestrzeń Banacha $B(H)$ w strukturę algebry Banacha z inwolucją biorąc za mnożenie operację składania operatorów, a za inwolucję operację brania operatora sprzężonego. Wówczas inwolucja jest izometrią gdyż dla dowolnego $a \in B(H)$ mamy

$$\begin{aligned} \|a^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|a^*x\| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |(y|a^*x)| \\ &= \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |(ay|x)| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |(x|ay)| = \|a\|, \end{aligned}$$

a ponadto norma operatorowa spełnia tak zwany C^* -warunek, to znaczy

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad a \in B(H). \quad (3.4)$$

Istotnie: mamy dla dowolnego $a \in B(H)$.

$$\|a\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (ax|ax) = \sup_{\|x\|=1} (x|a^*ax) \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\| = \|a\|^2.$$

Algebry Banacha, których normy spełniają warunek (3.4) nazywamy C^* -algebrami. Każda normowo domknięta $*$ -podalgebra $B(H)$ (tj. podalgebra zamknięta ze względu na inwolucję) jest C^* -algebrą. Takie C^* -algebry nazywamy C^* -algebrami operatorów. Teraz pamiętając o Wniosku 3.2.4 możemy już podać najważniejszą dla nas definicję:

Definicja 3.3.1 Algebrą von Neumanna nazywamy w-domkniętą (lub równoważnie so-domkniętą) C^* -algebrę operatorów zawierającą operator identycznościowy.

Zauważmy, że każda algebra von Neumanna M jako wo-domknięta podprzestrzeń $B(H)$ jest również w-domknięta, a zatem istnieje dla niej przestrzeń predualna M_* opisana w Twierdzeniu 3.2.7.

Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Dla dowolnego podzbioru $S \subset B(H)$ definiujemy jego *komutant* S' jako

$$S' = \{s' \in B(H) : ss' = s's \text{ dla wszystkich } s \in S\}.$$

Zbiór $S'' = (S')'$ nazywamy *bikomutantem* zbioru S . Indukcyjnie definiujemy n -ty komutant zbioru S jako komutant $(n-1)$ -go komutanta S . Łatwo zauważyć, że podczas gdy inkluzja

$$S \subset S''$$

może być ostra, to dla $k \geq 1$ mamy

$$(2k-1)\text{-y komutant } S = S',$$

$$(2k)\text{-y komutant } S = S''.$$

Nietrudno się również przekonać, że dla dowolnego $S \subset B(H)$, S' jest algebrą zawierającą operator identycznościowy $I \in B(H)$. Ponadto można bez trudu wykazać, że S' jest zbiorem so-domkniętym (a więc jako zbiór wypukły również wo-domkniętym). Jeśli $S = S^*$, tj. $s^* \in S$ dla wszystkich $s \in S$, to S' jest algebrą von Neumanna. W szczególności jeśli $M \subset B(H)$ jest algebrą von Neumanna, to M' także jest algebrą von Neumanna. Jednym z najważniejszych twierdzeń w teorii algebr von Neumanna jest tak zwane twierdzenie von Neumanna o gęstości. Zanim zajmiemy się tym twierdzeniem udowodnimy jeszcze jeden krótki lemat:

Lemat 3.3.2 *Niech $S \subset H$ będzie domkniętą podprzestrzenią i niech P będzie rzutem na S . Wówczas dla dowolnego operatora $a \in B(H)$ następujące warunki są równoważne:*

1. $aS \subset S$ oraz $a^*S \subset S$;
2. $aS \subset S$ oraz $aS^\perp \subset S^\perp$;
3. $aP = Pa$.

Dowód: “1. $\Rightarrow$ 2.” Niech $x \in S$ i $y \in S^\perp$. Z założenia mamy $a^*x \in S$. Teraz

$$(ay|x) = (y|a^*x) = 0,$$

a więc $ay \in S^\perp$ czyli $aS^\perp \subset S^\perp$.

“2. $\Rightarrow$ 3.” Niech $x \in H$. Wtedy $x = x_S + x_{S^\perp}$, gdzie $x_S \in S$, a $x_{S^\perp} \in S^\perp$. Mamy

$$aPx = aP(x_S + x_{S^\perp}) = aPx_S = ax_S = Pax_S = P(ax_S + ax_{S^\perp}) = Pax,$$

a więc $Pa = aP$.

“3. $\Rightarrow$ 1.” Niech $x \in S$. Wtedy

$$ax = aPx = Pax \in S.$$

Dalej mamy

$$a^*P = (Pa)^* = (aP)^* = Pa^*,$$

a zatem

$$a^*x = a^*Px = Pa^*x \in S.$$

Q.E.D.

Twierdzenie 3.3.3 (von Neumanna o gęstości) *Niech $\mathcal{A} \subset B(H)$ będzie $*$ -algebrą operatorów zawierającą operator identycznościowy $I \in B(H)$. Wówczas so-domknięcie $\mathcal{A}$ jest równe $\mathcal{A}''$.*

Dowód: Niech $a \in \mathcal{A}''$. Mamy pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i dowolnego ciągu $\{x_1, \dots, x_N\} \subset H$ istnieje $b \in \mathcal{A}$ takie, że

$$(a - b) \in \mathcal{O}_{\varepsilon, \{x_1, \dots, x_N\}}$$

(patrz (3.1)).

Ustalmy zatem ciąg $\{x_1, \dots, x_N\} \subset H$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= \bigoplus_{k=1}^N H_k, & H_k &= H, \\ \widehat{c} &= \text{diag}(\underbrace{c, \dots, c}_N), & c &\in B(H), \\ H_0 &= \left\{ \widehat{b} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} : b \in \mathcal{A} \right\} \subset \widehat{H}.\end{aligned}$$

Niech P oznacza rzut na $\overline{H_0}$. Dla każdego operatora $b \in \mathcal{A}$ mamy zarówno

$$\widehat{b} \overline{H_0} \subset \overline{H_0}$$

jak i

$$\widehat{b^*} \overline{H_0} \subset \overline{H_0},$$

a zatem na mocy Lematu 3.3.2

$$\widehat{b}P = P\widehat{b}, \quad b \in \mathcal{A}.$$

Stąd nietrudno wywnioskować, że jeśli zapiszemy P w postaci macierzy

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}, \quad p_{ij} \in B(H), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

to otrzymamy

$$p_{ij}b = bp_{ij}, \quad b \in \mathcal{A}, \quad i, j = 1, \dots, N$$

czyli

$$p_{ij} \in \mathcal{A}', \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Teraz skoro $a \in \mathcal{A}''$, to $\widehat{a}P = P\widehat{a}$ i w konsekwencji

$$\widehat{a} \overline{H_0} \subset \overline{H_0}.$$

Ponieważ $I \in \mathcal{A}$ mamy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in H_0$$

i w szczególności

$$\widehat{a} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \overline{H_0},$$

a to znaczy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $b \in \mathcal{A}$ taki, że

$$\left\| \widehat{a} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} - \widehat{b} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{k=1}^N \|(a - b)x_k\|^2 < \varepsilon$$

czyli $(a - b) \in \mathcal{O}_{\varepsilon, \{x_1, \dots, x_N\}}$.

Q.E.D.

Z twierdzenia von Neumanna mamy następujący wniosek dający algebraiczną charakteryzację algebr von Neumanna:

Wniosek 3.3.4 *Niech $M \subset B(H)$ będzie $*$ -algebrą operatorów i niech $I \in M$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. M jest algebrą von Neumanna;
2. $M = M''$.

Twierdzenie von Neumanna pozwala nam także scharakteryzować operatory należące do danej algebry von Neumanna $M \subset B(H)$ — są to oczywiście te operatory, które komutują ze wszystkimi operatorami z komutanta M , jednakże biorąc pod uwagę fakt, że M' jest algebrą von Neumanna, oraz że każda C^* -algebra z jedyneką jest generowana przez swoje elementy unitarne (czyli elementy u takie, że $u^*u = uu^* = I$, patrz [StZs], Prop. 2.24) otrzymujemy:

Wniosek 3.3.5 *Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna. Wówczas*

$$\left(\begin{array}{c} u'^* a u' = a \\ \text{dla wszystkich} \\ \text{unitarnych } u' \in M' \end{array} \right) \iff (a \in M).$$

Prostym wnioskiem z twierdzenia spektralnego jest to, że każdy operator samosprężony $a \in B(H)$ jest granicą kombinacji liniowych rzutów należących do najmniejszej algebry von Neumanna zawierającej a . Jako, że każda C^* -algebra jest generowana przez swoje elementy samosprężone (patrz [StZs] Cor. 2.23) łatwo widzimy że każda algebra von Neumanna jest generowana przez swoje rzuty i mamy:

Wniosek 3.3.6 *Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna. Wówczas*

$$\left(\begin{array}{c} p'a = ap' \\ \text{dla wszystkich} \\ \text{rzutów } p' \in M' \end{array} \right) \iff (a \in M).$$

Wniosek 3.3.5 pozwala nam udowodnić ciekawe stwierdzenie dotyczące rozkładu biegunowego (patrz [StZs] Th. 2.14) w algebrach von Neumanna:

Stwierdzenie 3.3.7 *Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna. Niech $a \in M$ i niech $a = v|a|$ będzie rozkładem biegunowym a . Wówczas $|a|, v \in M$.*

Dowód: M jest domknięta w topologii normowej, więc funkcje ciągłe od samosprężonych elementów M należą do M . W szczególności $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}} \in M$. Niech $u' \in M'$ będzie operatorem unitarnym. W świetle Wniosku 3.3.5 mamy

$$\begin{aligned} u'^* a u' &= a, \\ u'^* |a| u' &= |a|. \end{aligned}$$

Stąd

$$a = u'^* a u' = u'^* v |a| u' = u'^* v u' u'^* |a| u' = u'^* v u' |a|,$$

przy czym $u'^* v u'$ jest częściową izometrią, której podprzestrzenią początkową jest $H(|a| \neq 0)$. Z jednoznaczności rozkładu biegunowego mamy $u'^* v u' = v$. Q.E.D.

Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna. Podzbiór $S \subset H$ nazywamy *cyklicznym* dla M jeśli zbiór $MS = \{as : a \in M, s \in S\}$ jest liniowo gęsty w H , natomiast powiemy, że S jest *separującym* dla M jeśli dla wszystkich $a \in M$ zachodzi

$$\left(\begin{array}{c} as = 0 \\ \text{dla wszystkich } s \in S \end{array} \right) \implies (a = 0).$$

Jeśli S składa się tylko z jednego wektora $S = \{\Omega\}$, to mówimy, że Ω jest odpowiednio *wektorem cyklicznym* lub *wektorem separującym* dla M .

Stwierdzenie 3.3.8 Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech $S \subset H$ będzie dowolnym podzbiorem. Wówczas

1. $\left(\begin{array}{c} S \text{ - cykliczny} \\ \text{dla } M \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{c} S \text{ - separujący} \\ \text{dla } M' \end{array} \right).$
2. $\left(\begin{array}{c} S \text{ - separujący} \\ \text{dla } M \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{c} S \text{ - cykliczny} \\ \text{dla } M' \end{array} \right).$

Dowód: Ad 1.: Niech $a' \in M'$ będzie takim operatorem, że $a's = 0$ dla wszystkich $s \in S$. Weźmy $a \in M$ oraz $s \in S$. Mamy

$$a'(as) = a(a's) = 0,$$

ale wektory postaci as gdzie $a \in M$, a $s \in S$ tworzą zbiór gęsty w H , a więc $a'x = 0$ dla wszystkich $x \in H$ czyli $a = 0$.

Ad 2.: Niech P będzie rzutem na domknięcie podprzestrzeni

$$H_0 = \text{span}\{a's : a' \in M', s \in S\}.$$

Ponieważ $I \in M'$ mamy $S \subset H_0$ i stąd

$$Ps = s \tag{3.5}$$

dla wszystkich $s \in S$. Dla dowolnego $a' \in M'$ mamy

$$a' \overline{H_0} \subset \overline{H_0}$$

oraz

$$a'^* \overline{H_0} \subset \overline{H_0},$$

a stąd (patrz Lemat 3.3.2) a' komutuje z P czyli P należy do $M'' = M$. Skoro tak, to $(I - P)$ także należy do M i na mocy (3.5) mamy

$$(I - P)s = 0, \quad s \in S,$$

co przy założeniu, że S jest separujący dla M daje nam $P = I$.

Q.E.D.

Z powyższego stwierdzenia mamy natychmiastowy wniosek:

Wniosek 3.3.9 *Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech $\Omega \in H$. Wówczas*

$$\left(\begin{array}{l} \Omega - \text{cykliczny i} \\ \text{separujący dla } M \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \Omega - \text{cykliczny i} \\ \text{separujący dla } M' \end{array} \right).$$

3.4 Elementarna teoria C^* -algebr i W^* -algebr

Ważnym wnioskiem z Twierdzenia 3.2.7 jest fakt, że każda algebra von Neumanna M jest izomorficzna z przestrzenią dualną do swojej przestrzeni predualnej M_* . Okazuje się, że można również udowodnić rezultat odwrotny, mianowicie:

Twierdzenie 3.4.1 (Sakai) *Niech A będzie C^* -algebrą, a B przestrzenią Banacha taką, że A jest izomorficzna (jako przestrzeń Banacha) z przestrzenią dualną do B . Wówczas A jest izomorficzna z algebrą von Neumanna, której przestrzeń predualna jest izomorficzna z B .*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć na przykład w [Ped] (Th. 3.9.8).

Twierdzenie 3.4.1 pozwala scharakteryzować algebry von Neumanna bez odwoływania się bezpośrednio do przestrzeni Hilberta, w której działają. Mówimy wówczas o tak zwanych abstrakcyjnych algebrach von Neumanna lub inaczej o W^* -algebrach. Okazuje się, że niemal cała teoria algebr von Neumanna daje się przepisać w języku W^* -algebr, co doskonale ilustruje książka [Sak]. Dla naszych celów wygodniej będzie jednak pozostać przy Definicji 3.3.1.

Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna. Na zbiorze $B(H)_{sa}$ elementów samosprężonych w $B(H)$ mamy znaną relację częściowego porządku:

$$(a \geq b) \iff \left(\begin{array}{l} (x|(a - b)x) \geq 0 \\ \text{dla wszystkich } x \in H \end{array} \right) \quad (3.6)$$

i relacja ta dziedziczona jest przez zbiór M_{sa} elementów samosprężonych w M . Ponadto można nietrudno udowodnić, że każdy normowo ograniczony wzrastający ciąg uogólniony elementów $B(H)_{sa}$ jest so-zbieżny do swojego supremum, a zatem także każdy normowo ograniczony wzrastający ciąg uogólniony elementów M_{sa} jest so-zbieżny, a więc na mocy so-domkniętości M jego supremum leży w M . Mówimy, że algebry von Neumanna są *monotonicznie zupełne*.

Naturalną klasą morfizmów algebr von Neumanna są tak zwane *morfizmy normalne* czyli homomorfizmy algebr z involucją przemienne z operacją brania supremum wzrastających, normowo ograniczonych ciągów uogólnionych. Łatwo pokazać, że każdy izomorfizm algebr von Neumanna jest normalny (patrz [Ped] Prop. 2.5.2.). Ponadto jądro i obraz normalnego morfizmu są so-domknięte (patrz [Dix1] Cor. 4).

Podobnie jak w teorii przestrzeni Banacha interesującym obiektem jest zbiór funkcjonałów liniowych na algebrze von Neumanna. Zaczniemy jednak od sytuacji nieco

ogólniejszej. Niech A będzie C^* -algebrą. Dla dowolnego funkcjonału $\phi \in A^*$ definiujemy $\phi^* \in A^*$ wzorem $\phi^*(a) = \overline{\phi(a^*)}$. Mówimy, że ϕ jest samosprzężony jeśli $\phi = \phi^*$, co jest równoważne warunkowi, że $\phi(a) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $a \in A_{sa}$. Z kolei funkcjonał ϕ nazywamy dodatnim jeśli

$$\phi(a^*a) \geq 0$$

dla wszystkich $a \in A$. Ponieważ każdy samosprzężony element $a \in A$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej $a = a_1^*a_1 - a_2^*a_2$ (patrz Lemat 8.2.9) widzimy, że funkcjonały dodatnie są samosprzężone. Funkcjonały dodatnie mają wiele ciekawych własności. Jedną z nich ilustruje następujący lemat:

Lemat 3.4.2 (Nierówność Schwarza) *Niech A będzie C^* -algebrą, a ϕ funkcjonałem dodatnim na A . Wówczas dla wszystkich $a, b \in A$ mamy*

$$|\phi(a^*b)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b).$$

Dowód: Dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\phi((ta + b)^*(ta + b)) \geq 0.$$

Korzystając z samosprzężoności ϕ otrzymujemy

$$0 \leq t^2\phi(a^*a) + t(2\operatorname{Re}\phi(a^*b)) + \phi(b^*b), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stąd $(2\operatorname{Re}\phi(a^*b))^2 - 4\phi(a^*a)\phi(b^*b) \geq 0$ i $|\phi(a^*b)|^2 \geq (\operatorname{Re}\phi(a^*b))^2 \geq \phi(a^*a)\phi(b^*b)$. Q.E.D.

Korzystając z Lematu 3.4.2 i kilku faktów z teorii C^* -algebr można w prosty sposób udowodnić jeszcze jedną ważną własność funkcjonałów dodatnich, a mianowicie

Twierdzenie 3.4.3 *Niech A będzie C^* -algebrą z jedyneką I i niech ϕ będzie funkcjonałem dodatnim na A . Wówczas $\|\phi\| = \phi(I)$.*

Dalsze rozważania musimy poprzedzić następującą definicją:

Definicja 3.4.4 *Reprezentacja C^* -algebry A jest to para (π, H) składająca się z przestrzeni Hilberta H i $*$ -homomorfizmu $\pi: A \rightarrow B(H)$. Mówimy, że reprezentacja (π, H) jest cykliczna jeśli istnieje w H wektor cykliczny dla $\pi(A)$.*

Okazuje się, że każdy funkcjonał dodatni na A zadaje pewną reprezentację A . Poniższe twierdzenie zwane jest konstrukcją GNS od nazwisk I. M. Gelfanda, M. A. Naimarka i I. E. Segala. Ilustruje ono odpowiedniość pomiędzy funkcjonałami dodatnimi a reprezentacjami algebry A . W dowodzie wykorzystamy relację częściowego porządku na zbiorze elementów samosprzężonych dowolnej C^* -algebry A . Relacja ta jest pokrótce opisana w części 6.2. Jeśli A jest algebrą von Neumanna, to relacja ta pokrywa się z relacją “ $\geq$ ” zadaną przez (3.6).

Twierdzenie 3.4.5 (Konstrukcja GNS) *Dla każdego funkcjonału dodatniego ϕ na C^* -algebrze A istnieje cykliczna reprezentacja (π_ϕ, H_ϕ) algebry A o wektorze cyklicznym Ω_ϕ takim, że dla wszystkich $a \in A$ mamy*

$$\phi(a) = (\Omega_\phi | \pi_\phi(a) \Omega_\phi). \quad (3.7)$$

Ponadto jeśli $(\tilde{\pi}, \tilde{H})$ jest inną reprezentacją A o wektorze cyklicznym $\tilde{\Omega}$ takim, że

$$\phi(a) = (\tilde{\Omega} | \tilde{\pi}(a) \tilde{\Omega})$$

dla wszystkich $a \in A$, to istnieje operator unitarny $U: H_\phi \rightarrow \tilde{H}$ taki, że

$$\tilde{\pi}(a) = U \pi_\phi(a) U^*, \quad a \in A.$$

Udowodnimy Twierdzenie 3.4.5 tylko w szczególnym przypadku, gdy algebra A ma jedynkę. Dowód tego twierdzenia w pełnej ogólności wymaga między innymi wprowadzenia pojęcia jedynki aproksymatywnej.

Dowód: Przyjmijmy oznaczenie

$$N_\phi = \{a \in A : \phi(a^*a) = 0\}.$$

Korzystając z Lematu 3.4.2 łatwo pokazać, że N_ϕ jest podprzestrzenią wektorową w A , a nawet lewym ideałem. Niech $a \mapsto x_a$ będzie kanoniczną projekcją $A \rightarrow A/N_\phi$. Na przestrzeni A/N_ϕ wprowadźmy formę półtoraliniową wzorem

$$(x_a | x_b) = \phi(a^*b).$$

Forma ta jest niezdegenerowana i definiuje strukturę prehilbertowską na A/N_ϕ . Niech H_ϕ oznacza uzupełnienie przestrzeni A/N_ϕ w normie zadanej przez formę $(\cdot | \cdot)$. Teraz możemy zdefiniować reprezentację A kładąc

$$\pi_\phi(a)x_b = x_{ab}. \quad (3.8)$$

Jako, że N_ϕ jest lewym ideałem (3.8) definiuje działanie A na H_ϕ przez operatory liniowe. Zauważmy, że dla dowolnych $a, b \in A_{sa}$ i dla dowolnego $c \in A$ mamy

$$a^*a \leq \|a\|^2 I$$

oraz

$$(a \leq b) \implies (c^*ac \leq c^*bc),$$

co w połączeniu z nietrudnym do udowodnienia faktem, że dla każdego funkcjonału dodatniego ψ mamy

$$(a \leq b) \implies (\psi(a) \leq \psi(b))$$

daje nam oszacowanie

$$\|\pi_\phi(a)x_b\|^2 = \|x_{ab}\|^2 = \phi(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \phi(b^*b) = \|a\|^2 \|x_b\|^2,$$

które z kolei mówi nam, że możemy rozszerzyć $\pi_\phi(a)$ do operatora ograniczonego na H_ϕ , i że $\pi_\phi: A \rightarrow B(H_\phi)$ jest odwzorowaniem normowo ciągłym. Wreszcie równość

$$(\pi_\phi(a)x_b | x_c) = \phi(b^*a^*c) = (x_b | \pi_\phi(a^*)x_c)$$

pokazuje, że π_ϕ jest $*$ -homomorfizmem czyli (π_ϕ, H_ϕ) jest reprezentacją algebry A . Niech $\Omega_\phi = x_I$. Wówczas Ω_ϕ jest wektorem cyklicznym i oczywiście zachodzi (3.7). Niech $(\tilde{\pi}, \tilde{H})$ będzie taką reprezentacją A o wektorze cyklicznym $\tilde{\Omega}$, że

$$\phi(a) = (\tilde{\Omega} | \tilde{\pi}(a) \tilde{\Omega})$$

dla wszystkich $a \in A$. Zdefiniujmy operator $U : H_\phi \rightarrow \tilde{H}$:

$$U : \pi_\phi(a)\Omega_\phi \longmapsto \tilde{\pi}(a)\tilde{\Omega}.$$

Operator ten jest dobrze zdefiniowany, gdyż jeśli $\pi_\phi(a)\Omega_\phi = \pi_\phi(b)\Omega_\phi$, to

$$\begin{aligned} 0 &= \|\pi_\phi(a-b)\Omega_\phi\|^2 = (\pi_\phi(a-b)\Omega_\phi | \pi_\phi(a-b)\Omega_\phi) \\ &= \phi((a-b)^*(a-b)) = \|\tilde{\pi}(a-b)\tilde{\Omega}\|^2. \end{aligned}$$

Podobnie mamy

$$\begin{aligned} \|U\pi_\phi(a)\Omega\|^2 &= \|\tilde{\pi}(a)\tilde{\Omega}\|^2 = (\tilde{\pi}(a)\tilde{\Omega} | \tilde{\pi}(a)\tilde{\Omega}) \\ &= (\tilde{\Omega} | \tilde{\pi}(a^*a)\tilde{\Omega}) = \phi(a^*a) \\ &= (\Omega_\phi | \pi_\phi(a^*a)\Omega_\phi) = \|\pi_\phi(a)\Omega_\phi\|^2. \end{aligned}$$

Tak więc po rozszerzeniu przez ciągłość na H_ϕ operator U jest surjektywny i zachowuje iloczyn skalarny, a więc w konsekwencji jest unitarny. Z definicji U nietrudno już teraz wywnioskować, że

$$\tilde{\pi}(a) = U\pi_\phi(a)U^*, \quad a \in A.$$

Q.E.D.

Zauważmy, że przy konstrukcji podanej w Twierdzeniu 3.4.5 mamy na mocy Twierdzenia 3.4.3 $\|\Omega_\phi\|^2 = \|\phi\|$. Funkcjonały dodatnie o normie 1 nazywamy *stanami* na algebrze A , a więc możemy powiedzieć, że stany na A zadają reprezentacje cykliczne A o jednostkowym wektorze cyklicznym spełniającym (3.7).

Powróćmy teraz do algebr von Neumanna. W analogii do definicji morfizmów normalnych powiemy, że funkcyjnał dodatni ϕ na algebrze von Neumanna M jest normalny jeśli

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(a_\lambda) = \phi\left(\sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda\right)$$

dla dowolnego wzrastającego, normowo ograniczonego ciągu uogólnionego $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ elementów M_{sa} . Mamy następujące, ważne stwierdzenie:

Stwierdzenie 3.4.6 *Niech ϕ będzie dodatnim funkcyjnałem normalnym na algebrze von Neumanna M i niech (π_ϕ, H_ϕ) będzie reprezentacją M zadaną przez ϕ . Wówczas π_ϕ jest morfizmem normalnym $M \rightarrow \pi_\phi(M)$.*

Dowód: Niech $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie normowo ograniczonym, wzrastającym ciągiem uogólnionym w M_{sa} o granicy a . Wówczas $\{\pi_\phi(a_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest normowo ograniczonym, wzrastającym ciągiem uogólnionym w $B(H_\phi)_{sa}$. Niech b oznacza jego granicę. Dla każdego $c \in M$ mamy

$$(x_c | \pi_\phi(a)x_c) = \phi(c^*ac) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(c^*a_\lambda c) = \lim_{\lambda \in \Lambda} (x_c | \pi_\phi(a_\lambda)x_c) = (x_c | bx_c).$$

Wynika stąd, że $(\pi_\phi(a) - b)x_c = 0$ dla wszystkich $c \in M$, a więc $\pi_\phi(a) = b$ na gęstej podprzestrzeni H_ϕ , a zatem $\pi_\phi(a) = b$. Q.E.D.

4 Teoria Tomity-Takesakiego dla stanów

4.1 Algebry σ -skończone

Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech $x \in H$. Oznaczmy przez P_x rzut na domknięcie podprzestrzeni $H_x = \{a'x : a' \in M'\}$. Argumentując tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 3.3.3 łatwo można wykazać, że $P_x \in M$. Rzuty tej postaci nazywamy *rzutami cyklicznymi* w M .

Klasa algebr, którą się zajmujemy w tej części pracy, jest ściśle związana z pojęciem stanu wiernego:

Definicja 4.1.1 *Niech A będzie C^* -algebrą. Powiemy, że stan ϕ na A jest wierny, jeśli $\phi(a^*a) > 0$ dla wszystkich, niezerowych $a \in A$.*

Definicja 4.1.2 *Algebrę von Neumanna $M \subset B(H)$ nazywamy σ -skończoną, jeśli dowolna rodzina parami ortogonalnych rzutów w M jest co najwyżej przeliczalna.*

Algebry σ -skończone można scharakteryzować na kilka sposobów, w szczególności korzystając z pojęcia stanu wiernego. Ilustruje to następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.1.3 *Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. M jest σ -skończona;
2. Istnieje przeliczalny podzbiór H separujący dla M ;
3. M posiada wierny stan normalny;
4. M jest izomorficzna z algebrą von Neumanna posiadającą wektor cykliczny i separujący.

Dowód: “1. $\Rightarrow$ 2.” Niech $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie maksymalną rodziną parami ortogonalnych rzutów cyklicznych w M (to znaczy, że p_λ jest rzutem na $\overline{M'x_\lambda}$, gdzie $x_\lambda \in H$). Jej istnienie gwarantuje nam lemat Kuratowskiego–Zorna. Ponieważ M jest σ -skończona, rodzina $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest przeliczalna. Z maksymalności rodziny $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ nietrudno wywnioskować, że

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda = I,$$

a więc przeliczalny zbiór $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest cykliczny dla M' . Stąd na mocy Stwierdzenia 3.3.8 (1.) $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest separujący dla M .

“2. $\Rightarrow$ 3.” Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ będzie zbiorem separującym dla M . Możemy założyć, że $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = 1$. Definiujemy funkcjonal ϕ na M wzorem

$$\phi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n | a x_n), \quad a \in M.$$

Funkcjonał ten jest oczywiście stanem wiernym na M . Ponadto jest on granicą w normie funkcjonałów wo-ciągłych, a zatem ϕ jest w-ciągły. Z Lematu 3.1.2 (2.) widzimy, że ϕ jest wo-ciągły na zbiorach ograniczonych, a z Twierdzenia 3.2.3 wiemy, że jest to równoważne so-ciągłości na zbiorach ograniczonych. Stąd dla dowolnego wzrastającego, normowo ograniczonego ciągu uogólnionego $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (pamiętamy, że taki ciąg jest so-zbieżny do swojego supremum) mamy

$$\phi\left(\sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda\right) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(a_\lambda)$$

czyli ϕ jest normalny.

“3. $\Rightarrow$ 4.” Niech ϕ będzie wiernym stanem normalnym na M . Rozważmy reprezentację (π_ϕ, H_ϕ) daną przez konstrukcję GNS. Morfizm π_ϕ jest izomorfizmem algebr von Neumanna, gdyż ϕ jest wiernym stanem normalnym. Ponadto od razu widać, że wektor Ω_ϕ skonstruowany w Twierdzeniu 3.4.5 jest wektorem cyklicznym i separującym dla $\pi_\phi(M)$.

“4. $\Rightarrow$ 1.” Niech $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie dowolną rodziną parami ortogonalnych rzutów w M i niech Ω będzie wektorem cyklicznym i separującym dla M . Mamy oczywiście

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \|p_\lambda \Omega\|^2 \leq \|\Omega\|^2 < \infty,$$

a więc jedynie przeliczalna ilość wyrazów ciągu $\{\|p_\lambda \Omega\|^2\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest różna od zera. Z drugiej strony Ω jest wektorem separującym dla M , a zatem tylko przeliczalna ilość rzutów z rodziny $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest różna od zera. Q.E.D.

Uwaga 4.1.4 Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta i niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna. Wówczas M jest σ -skończona.

Algebry σ -skończone mają wiele cech wyróżniających je spośród innych algebr von Neumanna. Ciekawe jest następujące twierdzenie udowodnione w książce [Dix2] (Ch. 3, Prop. 1):

Twierdzenie 4.1.5 Niech M będzie σ -skończoną algebrą von Neumanna. Wówczas mocna operatorowa topologia na M_1 jest metryzowalna.

Z Twierdzenia 4.1.5 w zestawieniu z Uwagą 3.2.1 mamy

Wniosek 4.1.6 Niech M będzie σ -skończoną algebrą von Neumanna. Wówczas mocna topologia na normowo ograniczonych podzbiorach M jest metryzowalna.

4.2 Twierdzenie Tomity i grupa automorfizmów modularnych

Niech $M \subset B(H)$ będzie σ -skończoną algebrą von Neumanna i niech ϕ będzie wiernym stanem normalnym na M . Utożsamiając M z $\pi_\phi(M)$ możemy założyć, że

$$\phi(a) = (\Omega|a\Omega), \quad a \in M,$$

gdzie Ω jest jednostkowym wektorem cyklicznym i separującym dla M . Rozważmy odwzorowanie

$$S_0: H \ni a\Omega \longmapsto a^*\Omega \in H.$$

Jest ono gęsto zdefiniowanym operatorem antyliniowym $H \rightarrow H$. Na mocy Wniosku 3.3.9 Ω jest również wektorem cyklicznym i separującym dla M' a więc odwzorowanie

$$F_0: H \ni a'\Omega \longmapsto a'^*\Omega \in H$$

także jest gęsto zdefiniowanym operatorem antyliniowym $H \rightarrow H$.

Stwierdzenie 4.2.1 *Operator S_0 jest domykalny, a jeśli oznaczymy przez S jego domknięcie, a przez F operator sprzężony do S , to $M'\Omega \subset D(F)$ i $Fa'\Omega = a'^*\Omega$. Ponadto S i F są inwolucjami, tj.*

$$\left(x \in D(S) \right) \implies \left(\begin{array}{l} Sx \in D(S) \text{ oraz} \\ SSx = x \end{array} \right)$$

oraz

$$\left(y \in D(F) \right) \implies \left(\begin{array}{l} Fy \in D(F) \text{ oraz} \\ FFy = y \end{array} \right).$$

Dowód: Dla dowolnych $a \in M$, $a' \in M'$ mamy

$$(a^*\Omega|a'\Omega) = (\Omega|aa'\Omega) = (\Omega|a'a\Omega) = (a'^*\Omega|a\Omega). \quad (4.1)$$

Tak więc $F_0 \subset S_0^*$, a zatem S_0^* jest gęsto zdefiniowany, co implikuje, że S_0 jest domykalny. Z relacji (4.1) wynika również, że $M'\Omega \subset D(F)$ i $Fa'\Omega = a'^*\Omega$. Aby wreszcie udowodnić, że S i F są inwolucjami weźmy $y \in D(F)$ i $a \in M$. Wówczas

$$(Fy|Sa\Omega) = (Fy|a^*\Omega) = (Sa^*\Omega|y) = (a\Omega|y),$$

a stąd $Fy \in D(F)$ i $FFy = y$. Tak samo dowodzimy, że S jest inwolucją. Q.E.D.

Stwierdzenie 4.2.2 *W H istnieją antyliniowa, izometryczna inwolucja J oraz dodatni, samosprzężony operator Δ takie, że*

1. $\Delta = FS$ oraz $\Delta^{-1} = SF$;
2. $S = J\Delta^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J$, $F = J\Delta^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{\frac{1}{2}}J$;
3. $J\Delta^{it} = \Delta^{it}J$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$;
4. $J\Omega = \Omega$ i $\Delta\Omega = \Omega$.

Dowód: Ad 1. i 2.: Ze Stwierdzenia 4.2.1 wnioskujemy, że S jest niezdegenerowanym, domkniętym operatorem antyliniowym w H . Jego rozkład biegunowy ma zatem postać

$$S = J\Delta^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

gdzie J jest operatorem antyunitarnym, a $\Delta = S^*S = FS$. Oczywiście Δ jest dodatnim, samosprężonym operatorem liniowym w H . Korzystając z faktu, że S i F są inwolucjami nietrudno wykazać, że Δ jest niezdegenerowany i

$$\Delta^{-1} = SF.$$

Podobnie sprawdzamy, że $S = S^{-1}$ i stąd

$$J\Delta^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J^* \quad (4.3)$$

i w efekcie

$$J\Delta^{\frac{1}{2}}J = \Delta^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Oczywiście mamy

$$\Delta^{-\frac{1}{2}} = J^2J^*\Delta^{\frac{1}{2}}J,$$

a przy tym J^2 jest unitarny, a $J^*\Delta^{\frac{1}{2}}J$ dodatni, samosprężony. Biorąc pod uwagę jednoznaczność rozkładu biegunowego $\Delta^{-\frac{1}{2}}$ otrzymujemy $J^2 = I$, a zatem $J^* = J$ i możemy (4.3) przepisać jako

$$S = J\Delta^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J.$$

Ponieważ $F = S^*$ mamy $F = (\Delta^{-\frac{1}{2}}J)^* = J\Delta^{-\frac{1}{2}}$ i korzystając z (4.4) przy $J = J^*$ otrzymujemy

$$F = J\Delta^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J.$$

Ad 3.: Punkt 3. wynika ze wzoru (4.4) oraz faktu, że dla dowolnej funkcji borelowskiej f na $]0, \infty[$ mamy

$$f(J\Delta^{\frac{1}{2}}J) = J\overline{f}(\Delta^{\frac{1}{2}})J.$$

Istotnie: biorąc $f(s) = s^{-2it}$ dla $s \in]0, \infty[$ oraz $t \in \mathbb{R}$ dostajemy

$$J\Delta^{it} = \Delta^{it}J, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ad 4.: Jako że $S\Omega = \Omega$ i $F\Omega = \Omega$ mamy $\Delta\Omega = \Omega$, a stąd $\Delta^{\frac{1}{2}}\Omega = \Omega$ i korzystając ze wzoru (4.2) otrzymujemy $J\Omega = \Omega$. Q.E.D.

Operator Δ skonstruowany w Stwierdzeniu 4.2.2 nazywamy *operatorem modularnym* wyznaczonym przez stan ϕ , a operator antyunitarny J nosi nazwę *sprężenia modularnego* lub *inwolucji modularnej* wyznaczonej przez ϕ . W teorii Tomity-Takesakiego centralne miejsce zajmuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.2.3 (Tomita) *Mamy*

$$JM J = M' \quad (4.5)$$

oraz

$$\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M \quad (4.6)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Postaramy się naszkicować dowód Twierdzenia 4.2.3 w szczególnym przypadku, gdy Δ jest operatorem ograniczonym (w świetle (4.2) jest to oczywiście równoważne temu, że operator S jest ograniczony). Należy pamiętać jednak, że w znakomitej większości sytuacji operator modularny jest nieograniczony.

Lemat 4.2.4 *Załóżmy, że Δ jest ograniczony. Wówczas*

$$\begin{aligned} SMS &= M', \\ FMF &= M' \end{aligned}$$

oraz

$$\Delta M \Delta^{-1} = M.$$

Dowód: Dla dowolnych $a, b \in M$ mamy

$$SaSb\Omega = Sab^*\Omega = ba^*\Omega = bSa\Omega, \quad (4.7)$$

a więc jeśli zastosujemy (4.7) dwukrotnie, otrzymamy dla $a, b, c \in M$

$$SaSbc\Omega = bcSa\Omega = bSaSc\Omega$$

i ponieważ $M\Omega$ jest gęsty w H , dostajemy

$$SaSb = bSaS$$

dla wszystkich $a, b \in M$, a co za tym idzie

$$SMS \subset M'.$$

Tak samo dowodzimy, że

$$FM'F \subset M. \quad (4.8)$$

Sprzegając relację (4.8) otrzymujemy

$$SM'S \subset M,$$

co w połączeniu z faktem, że $S = S^{-1}$ daje $SMS \supset M'$ i mamy

$$SMS = M'. \quad (4.9)$$

Ponownie tą samą techniką pokazujemy, że

$$SMS = M'.$$

Na koniec korzystając z punktu 1. Stwierdzenia 4.2.2 otrzymujemy

$$\Delta M \Delta^{-1} = M.$$

Q.E.D.

Obkładając n -krotnie obie strony wzoru

$$\Delta M \Delta^{-1} \subset M$$

operatorami Δ i Δ^{-1} otrzymujemy

$$\Delta^n M \Delta^{-n} \subset M \quad (4.10)$$

dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Ustalmy $x, y \in H$, $a \in M$ oraz $a' \in M'$ i rozważmy funkcję całkowitą

$$f(z) = (x | [\Delta^z a \Delta^{-z}, a'] y).$$

Wzór (4.10) mówi nam, że $f(z) = 0$ dla $z = 0, 1, 2, \dots$ i pamiętając, że

$$\|\Delta^{-1}\| = \|J \Delta J\| = \|\Delta\|$$

widzimy, że istnieją dodatnie stałe C i K takie, że

$$|f(z)| \leq K e^{C \operatorname{Re} z},$$

co na mocy [SLW1] (Lem. Sect. 3) implikuje, że $f(z) = 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Stąd

$$\Delta^z M \Delta^{-z} \subset M'' = M$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$, a więc mamy

$$M = \Delta^z (\Delta^{-z} M \Delta^z) \Delta^{-z} \subset \Delta^z M \Delta^{-z}$$

i w efekcie

$$\Delta^z M \Delta^{-z} = M, \quad z \in \mathbb{C}.$$

W szczególności zachodzi wzór (4.6).

Dla dowodu wzoru (4.5) zauważmy, że ze wzoru (4.9) wynika, że

$$J M J = J \Delta^{\frac{1}{2}} M \Delta^{-\frac{1}{2}} J = S M S^{-1} = S M S = M'.$$

Przypadek ogólny (tj. kiedy nie zakładamy ograniczoności Δ) jest jednak o wiele trudniejszy. Istnieje kilka różnych dowodów twierdzenia Tomity (patrz np. [SLW1] i [SLW2], [VD1], [VD2], [Tak] lub [Bra], Sect. 2.5.2). Bardzo ważnym wnioskiem z twierdzenia Tomity jest:

Wniosek 4.2.5 *Odwzorowanie*

$$M \ni a \longmapsto \Delta^{it} a \Delta^{-it} \in M$$

*jest *-automorfizmem algebry M . Ponadto jeśli przyjmiemy oznaczenie*

$$\sigma_t^\phi(a) = \Delta^{it} a \Delta^{-it}, \quad a \in M,$$

to

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \sigma_t^\phi \in \operatorname{Aut}(M) \quad (4.11)$$

*jest w-ciągłą jednoparametrową grupą *-automorfizmów M , to znaczy, że dla dowolnego $\psi \in M_*$ funkcja*

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \psi(\sigma_t^\phi(a)) \in \mathbb{C}$$

jest ciągła.

Definicja 4.2.6 Niech M będzie σ -skończoną algebrą von Neumanna i niech ϕ będzie wiernym stanem normalnym na M . Jednoparametrową grupę automorfizmów M daną przez (4.11) nazywamy grupą automorfizmów modularnych M wyznaczoną przez ϕ .

Grupa automorfizmów modularnych (nazywana również grupą modularną) jest bardzo ważnym i skutecznym narzędziem w badaniu algebr von Neumanna i w zastosowaniach teorii algebr von Neumanna w fizyce. Odkrycie grupy modularnej umożliwiło między innymi klasyfikację algebr σ -skończonych (patrz [Con], [Bra]). Bardzo istotną rolę odgrywa również grupa automorfizmów modularnych w kwantowej mechanice statystycznej, gdzie opisuje ona (zazwyczaj) dynamikę układu w stanie równowagi (patrz [Bra], Ch. 5 i 6 oraz [HaHW]).

Postaramy się teraz wyeksponować pewną własność grupy modularnej związaną z przedłużeniem analitycznym. Na początek założymy, że dla pewnego elementu $a \in M$ funkcja

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \sigma_t^\phi(a) \in M$$

ma przedłużenie analityczne na całą płaszczyznę zespoloną. Elementy takie nazywamy elementami całkowitymi dla σ_t^ϕ (w podrozdziale 7.1 udowodnimy, że zbiór elementów całkowitych dla σ_t^ϕ jest gęsty w M). Oznaczmy owo przedłużenie przez

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \sigma_z^\phi(a) \in M.$$

Uwaga na końcu [Bra], Sect. 2.5.3 mówi, że

$$\sigma_z^\phi(a) = \Delta^{iz} a \Delta^{-iz}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.12)$$

co w szczególności oznacza, że takie przedłużenie jest jednoznaczne i

$$\sigma_z^\phi(\sigma_{z'}^\phi(a)) = \sigma_{z+z'}^\phi(a), \quad z, z' \in \mathbb{C}. \quad (4.13)$$

Stwierdzenie 4.2.7 Niech a i b będą elementami całkowitymi dla σ_t^ϕ . Wówczas

$$\phi(\sigma_{z+i}^\phi(a)b) = \phi(b\sigma_z^\phi(a)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.14)$$

Dowód: Będziemy korzystali ze wzorów

$$\Delta^{-1}\Omega = \Omega, \quad (4.15)$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}} = JS, \quad (4.16)$$

oraz z tego, że $J = J^*$ czyli

$$(x|Jy) = (y|Jx), \quad x, y \in H. \quad (4.17)$$

Weźmy elementy całkowite dla σ_t^ϕ $a, b \in M$. Mamy dla $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi(\sigma_{t+i}^\phi(a)b) &= (\Omega|\Delta^{-1}\Delta^{it}a\Delta^{-it}\Delta b\Omega) = (\Delta^{-1}\Omega|\Delta^{it}a\Delta^{-it}\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}b\Omega) \\ &\stackrel{4.15}{=} (\Omega|\Delta^{it}a\Delta^{-it}\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}b\Omega) \stackrel{4.16}{=} (\Omega|\Delta^{it}a\Delta^{-it}\Delta^{\frac{1}{2}}JSb\Omega) \\ &= (\Omega|\Delta^{it}a\Delta^{-it}\Delta^{\frac{1}{2}}Jb^*\Omega) = (\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{it}a^*\Delta^{-it}\Omega|Jb^*\Omega) \\ &\stackrel{4.17}{=} (b^*\Omega|J\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{it}a^*\Delta^{-it}\Omega) = (b^*\Omega|S\Delta^{it}a^*\Delta^{-it}\Omega) \\ &= (b^*\Omega|\Delta^{it}a\Delta^{-it}\Omega) = (\Omega|b\Delta^{it}a\Delta^{-it}\Omega) = \phi(b\sigma_t^\phi(a)). \end{aligned}$$

Teraz podstawiając $t = \operatorname{Re} z$, $\phi \circ \sigma_{i\operatorname{Im} z}^\phi$ w miejsce ϕ oraz $\sigma_{-i\operatorname{Im} z}^\phi(b)$ za b i korzystając z własności (4.13) otrzymujemy tezę. Q.E.D.

Uwaga 4.2.8 Niech $a \in M$ będzie takim operatorem, że dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ $\Delta^{i(t+i)}a\Delta^{-i(t+i)}$ rozszerza się do operatora ograniczonego i niech $b \in M$ będzie dowolnym elementem. Wówczas dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\phi(\sigma_{t+i}^\phi(a)b) = \phi(b\sigma_t^\phi(a)).$$

4.3 Warunek KMS

Definicja 4.3.1 Niech $t \mapsto \alpha_t$ będzie w-ciągłą, jednoparametrową grupą automorfizmów algebry von Neumanna M i niech ϕ będzie stanem normalnym na M . Powiemy, że ϕ spełnia warunek Kubo-Martina-Schwingera (warunek KMS) dla $\beta \in]0, \infty[$, jeśli dla dowolnych dwóch elementów całkowitych dla α_t $a, b \in M$ mamy

$$\phi(\alpha_{z+i\beta}(a)b) = \phi(b\alpha_z(a)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Mówimy, że ϕ spełnia warunek KMS dla $\beta = 0$ gdy ϕ jest α -niezmienniczym śladem, tj. $\phi \circ \alpha_t = \phi$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ oraz

$$\phi(ab) = \phi(ba), \quad a, b \in M.$$

Wtedy ϕ nazywamy stanem chaotycznym. Z kolei ϕ spełnia warunek KMS dla $\beta = \infty$, jeśli dla każdego elementu całkowitego a i dowolnego $b \in M$ funkcja całkowita $f : \mathbb{C} \ni z \mapsto \phi(\alpha_z(a)b) \in \mathbb{C}$ spełnia

$$|f(z)| \leq \|a\| \|b\| \quad \text{dla} \quad \text{Im}(z) \geq 0.$$

Taki stan nazywamy stanem podstawowym. Stan spełniający warunek KMS dla $\beta = 1$ nazywamy w skrócie stanem KMS, jeśli $\beta \neq 1$, to ϕ nazywamy stanem β -KMS.

Warunek KMS został sformułowany na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych przez fizyków R. Kubo, P. C. Martina i J. Schwingera jako warunek opisujący stan równowagi układu termodynamicznego. Kilka lat później R. Haag, N. Hugenholtz i M. Winnik w pracy [HaHW] zauważyli, że warunek ten może zastąpić tak zwany warunek Gibbsa i można go stosować do układów o nieskończonej liczbie stopni swobody, gdzie warunek Gibbsa nie ma sensu.

Zauważmy, że Stwierdzenie 4.2.7 mówi dokładnie tyle, że jeśli ϕ jest wiernym stanem normalnym na algebrze von Neumanna M , to ϕ jest stanem KMS dla grupy σ_t^ϕ .

Zachodzi następujące twierdzenie (patrz [Ped] Prop. 8.12.3):

Twierdzenie 4.3.2 Niech $t \mapsto \alpha_t$ będzie w-ciągłą, jednoparametrową grupą automorfizmów algebry von Neumanna M i niech ϕ będzie stanem normalnym na M . Ustalmy $\beta \in]0, \infty[$ Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. ϕ jest stanem β -KMS;
2. Dla dowolnych $a, b \in M$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja F na pasku

$$D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im}(z) \leq \beta\},$$

holomorficzna we wnętrzu D_β taka, że

$$F(t) = \phi(\alpha_t(a)b), \quad F(t + i\beta) = \phi(b\alpha_t(a)), \quad t \in \mathbb{R};$$

Warto wspomnieć, że pierwsze sformułowania warunku KMS odpowiadały warunkowi 2. z Twierdzenia 4.3.2. Definicja 4.3.1 zaczerpnięta jest z książki [Ped]. Jedną z prostych konsekwencji Twierdzenia 4.3.2 jest:

Wniosek 4.3.3 *Niech M , α_t oraz ϕ będą takie jak w założeniach Twierdzenia 4.3.2. Załóżmy, że ϕ jest stanem KMS dla α_t . Wówczas ϕ jest stanem α -niezmienniczym.*

Dowód: Korzystamy z warunku 2. z Twierdzenia 4.3.2 przy $b = I$ i otrzymujemy

$$F(t) = \phi(\alpha_t(a)) = F(t + i)$$

czyli funkcja F jest periodyczna z okresem i . Możemy ją zatem przedłużyć do funkcji całkowitej, a ponieważ $|F|$ jest ograniczona na D_1 , z twierdzenia Louville’a wnioskujemy, że F jest stała. W szczególności

$$\phi(\alpha_t(a)) = \phi(\alpha_0(a)) = \phi(a), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in M$$

czyli $\phi \circ \alpha_t = \phi$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Q.E.D.

Niemal takie samo rozumowanie pozwala nam scharakteryzować elementy α -niezmiennicze w M :

Stwierdzenie 4.3.4 *Niech $t \mapsto \alpha_t$ będzie w-ciągłą, jednoparametrową grupą automorfizmów algebry von Neumanna M i niech ϕ będzie wiernym stanem normalnym na M spełniającym warunek KMS dla $\beta > 0$. Ustalmy $b \in M$, wówczas*

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_t(b) = b \\ \text{dla wszystkich } t \in \mathbb{R} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{c} \phi(ab) = \phi(ba) \\ \text{dla wszystkich } a \in M \end{array} \right).$$

Dowód: “ $\Leftarrow$ ”. Jeśli b jest taki, że dla wszystkich $a \in M$ mamy $\phi(ab) = \phi(ba)$, to z punktu 2. Twierdzenia 4.3.2 wnioskujemy, że $F(t) = F(t + i\beta)$ i w konsekwencji (patrz Wniosek 4.3.3) F jest stała i mamy w szczególności dla każdego $a \in M$

$$\phi(\alpha_{-t}(a)b) = \phi(\alpha_t(a)b), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Teraz skoro $\phi \circ \alpha_t = \phi$, to wyrażenie

$$\phi(a\alpha_t(b)) = (\phi \circ \alpha_t)(\alpha_{-t}(a)b) = \phi(\alpha_{-t}(a)b) = \phi(\alpha_t(a)b) = F(t)$$

nie zależy od t dla dowolnego $a \in M$. Innymi słowy

$$\phi(a\alpha_t(b) - a\alpha_s(b)) = 0, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

dla wszystkich $a \in M$. Kładąc $a = (\alpha_t(b) - \alpha_s(b))^*$ na mocy wierności ϕ otrzymujemy

$$\alpha_t(b) = b, \quad t \in \mathbb{R}.$$

“ $\Rightarrow$ ”. Oczywiście z warunku 2. z Twierdzenia 4.3.2 po zamianie a z b .

Q.E.D.

Okazuje się, że warunek KMS wystarcza aby całkowicie scharakteryzować grupę automorfizmów modularnych:

Twierdzenie 4.3.5 ([Herm] Th. 1) *Niech M będzie σ -skończoną algebrą von Neumanna i niech $t \mapsto \sigma_t$ będzie jednoparametrową rodziną odwzorowań $M \rightarrow M$. Niech ϕ będzie wiernym stanem normalnym na M i założmy, że dla dowolnych $a, b \in M$ istnieje ciągle i ograniczona funkcja F na D_1 , holomorphyzna w $\text{Int}D_1$ taka, że*

$$F(t) = \phi(\sigma_t(a)b), \quad F(t + i) = \phi(b\sigma_t(a)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Założmy ponadto, że funkcje $t \mapsto \phi(\sigma_t(a)^\sigma_t(a))$ oraz $t \mapsto \phi(\sigma_t(a)\sigma_t(a)^*)$ są ograniczone. Wówczas*

$$\sigma_t = \sigma_t^\phi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5 Kwantowa mechanika statystyczna

5.1 Sformułowanie zagadnienia

W mechanice statystycznej rozważamy układy złożone z bardzo wielu oddziałujących ze sobą cząstek. Stan układu (kwantowego) opisywany jest przez operator gęstości (inaczej macierz gęstości) ρ . Przy pomocy operatora gęstości obliczamy wartość oczekiwaną obserwabli a ze wzoru

$$\langle a \rangle = \text{Tr } a \rho,$$

przy czym operator ρ jest unormowany tak, aby $\text{Tr } \rho = 1$. W opisie stanu równowagi układu używamy jednego z trzech, tak zwanych zespołów statystycznych: zespołu kanonicznego, mikrokanonicznego i dużego zespołu kanonicznego. Zespoły te różnią się definicją operatora ρ . Dla zespołu kanonicznego mamy

$$\rho = e^{-\beta H},$$

gdzie H jest Hamiltonianem (operatorem energii) dla rozważanego układu, a β jest odwrotnością iloczynu temperatury bezwzględnej T i stałej Boltzmanna k :

$$\beta = \frac{1}{kT}.$$

W dużym zespole kanonicznym dopuszczamy wymianę cząstek pomiędzy badanym układem a otoczeniem i definiujemy

$$\rho = e^{-\beta(H-\mu N)},$$

gdzie N jest operatorem liczby cząstek, a μ stałą opisującą potencjał chemiczny. Operator gęstości dla zespołu mikrokanonicznego dany jest przez

$$\rho = P(E + \delta) - P(E)$$

gdzie $P(E)$ jest rzutem na podprzestrzeń rozpinaną przez wektory własne Hamiltonianu o energii mniejszej niż E .

Oczywiście różne definicje operatora gęstości prowadzą do różnych wartości oczekiwanych obserwabli, ale przynajmniej w wielu szczególnych przypadkach udaje się udowodnić, że w tak zwanej granicy termodynamicznej (czyli przy przejściu do nieskończoności z liczbą cząstek) otrzymujemy takie same wyniki bez względu na to jakiego zespołu użyliśmy.

5.2 Układy kratowe

Wiele ważnych modeli układów kwantowych otrzymujemy z ogólnej konstrukcji tak zwanych układów kratowych. Opiszemy tu pokrótce takie układy.

Rozważamy kratę $\mathbb{Z}^\nu$. Z każdym punktem $x \in \mathbb{Z}^\nu$ wiążemy p -wymiarową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_x$ (liczba p jest z góry ustalona). Dla dowolnego skończonego podzbioru $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ zawierającego $N(\Lambda)$ punktów definiujemy

$$\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x.$$

Oczywiście $\mathcal{H}_\Lambda$ jest $p^{N(\Lambda)}$ -wymiarową przestrzenią Hilberta. Dalej oznaczmy przez $\mathcal{A}(\Lambda)$ algebrę $B(\mathcal{H}_\Lambda) = M_{p^{N(\Lambda)}}(\mathbb{C})$. Jeśli Λ' jest innym skończonym podzbiorem $\mathbb{Z}^\nu$ takim, że $\Lambda \subset \Lambda'$, to mamy oczywistą inkluzję

$$\mathcal{A}(\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{A}(\Lambda'). \quad (5.1)$$

Zauważmy, że jeśli $\Lambda \cap \Lambda' = \emptyset$, to operatory z $\mathcal{A}(\Lambda)$ komutują z operatorami z $\mathcal{A}(\Lambda')$. Nietrudno się przekonać, że zbiór wszystkich lokalnych obserwabli

$$\mathcal{A}_L = \bigcup_{\Lambda} \mathcal{A}(\Lambda)$$

jest $*$ -algebrą. Ponadto na każdej algebrze $\mathcal{A}(\Lambda)$ mamy normę (operatorową) i normy te są zgodne z inkluzjami (5.1), tak więc mamy normę na $\mathcal{A}_L$. Domknięcie $\mathcal{A}_L$ w tej normie jest C^* -algebrą. Nazywamy ją algebrą obserwabli quasi-lokalnych i oznaczamy przez $\mathcal{A}$.

Skonstruowawszy algebrę $\mathcal{A}$ możemy przyjrzeć się dwóm ważnym grupom przekształceń obserwabli.

Grupa translacji przestrzennych. Niech $a \in \mathcal{A}(\Lambda)$ dla pewnego skończonego podzbioru $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$. Dla $x \in \mathbb{Z}^\nu$ definiujemy $\alpha_x(a)$ jako odpowiedni operator w $\mathcal{A}(\Lambda + x)$. Jest jasne, że α_x zadaje izomorfizm algebry $\mathcal{A}(\Lambda)$ na $\mathcal{A}(\Lambda + x)$, a powiększając Λ otrzymujemy w efekcie automorfizm $\mathcal{A}_L$, który przez ciągłość rozszerzamy na $\mathcal{A}$. W ten sposób zbiór $\{\alpha_x : x \in \mathbb{Z}^\nu\}$ staje się grupą automorfizmów $\mathcal{A}$ odpowiadającą translacjom przestrzennym.

Ewolucja w czasie. Ze względu na to, że nasz układ składa się z nieskończenie wielu cząstek, nie możemy zdefiniować jego Hamiltonianu, a zatem będziemy musieli ponownie odwołać się do własności lokalnych algebry $\mathcal{A}$.

Załóżmy, że mamy dany potencjał Φ to jest funkcję przeprowadzającą skończone podzbiory $X \subset \mathbb{Z}^\nu$ w samosprężone elementy $\mathcal{A}_X$. Każdy operator $\Phi(X)$ reprezentuje energię oddziaływań pomiędzy cząstkami z X . Będziemy rozważać tylko tak zwane potencjały o skończonym zasięgu czyli takie Φ , dla których istnieje dodatnia stała d_Φ taka, że $\Phi(X) = 0$ jeśli $D(X) > d_\Phi$, gdzie $D(X)$ jest średnicą zbioru X :

$$D(X) = \sup_{x, y \in X} \|x - y\|.$$

Teraz możemy zdefiniować lokalny operator energii dla skończonego podzbioru $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$:

$$H(\Lambda) = \sum_{X \subset \Lambda} \Phi(X).$$

Oczywiście $H(\Lambda)$ jest samosprężonym elementem $\mathcal{A}(\Lambda)$. Nietrudno udowodnić, że dla potencjałów o skończonym zasięgu mamy

$$H(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = H(\Lambda_1) + H(\Lambda_2),$$

jeśli tylko zbiory Λ_1 i Λ_2 są odpowiednio daleko od siebie.

Przykład 1: Model Isinga. Dla każdego $x \in \mathbb{Z}^\nu$ przestrzeń $\mathcal{H}_x$ jest 2-wymiarowa, natomiast

$$\Phi(X) = \begin{cases} J(x, y)\sigma_3(x)\sigma_3(y), & X = \{x, y\} \text{ i } D(X) = 1, \\ 0, & N(X) \neq 2 \text{ lub } D(X) > 1, \end{cases}$$

gdzie J jest pewną funkcją rzeczywistą na $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu$, a σ_3 jest jedną z macierzy Pauliego:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

przy czym iloczyn $\sigma_3(x)\sigma_3(y)$ bierzemy jako złożenie operatorów z $\mathcal{A}(\{x, y\})$. Z tak określonym potencjałem mamy dla skończonego podzbioru $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$

$$H(\Lambda) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ \|x-y\|=1}} J(x, y)\sigma_3(x)\sigma_3(y).$$

Przykład 2: Model Heisenberga. Tak samo jak w modelu Isinga przestrzenie $\mathcal{H}_x$ są 2-wymiarowe. Potencjał zadany jest wzorem

$$\Phi(X) = \begin{cases} J \sum_{j=1}^3 \sigma_j(x)\sigma_j(y), & X = \{x, y\} \text{ i } D(X) = 1, \\ 0, & N(X) \neq 2 \text{ lub } D(X) > 1. \end{cases} \quad (5.2)$$

gdzie J jest stałą (w interpretacji fizycznej odpowiadającą między innymi za wymiar wyrażenia (5.2)). Lokalny Hamiltonian dla $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ wygląda w tym modelu tak:

$$H(\Lambda) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ \|x-y\|=1}} J \sum_{j=1}^3 \sigma_j(x)\sigma_j(y).$$

Lokalny Hamiltonian $H(\Lambda)$ pozwala nam zdefiniować lokalną grupę automorfizmów α_t^Λ algebry $\mathcal{A}(\Lambda)$:

$$\mathcal{A}(\Lambda) \ni a \longmapsto \alpha_t^\Lambda(a) = e^{-itH(\Lambda)} a e^{itH(\Lambda)} \in \mathcal{A}(\Lambda).$$

Okazuje się, że można rozszerzyć tak zdefiniowaną lokalną ewolucję w czasie na całą algebrę $\mathcal{A}$. Mamy nawet następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.2.1 (Streater, Robinson) *Dla potencjału o skończonym zasięgu ewolucja w czasie jest mocno ciągłą grupą automorfizmów α_t algebry $\mathcal{A}$ zdefiniowaną na gęstej podalgebrze $\mathcal{A}_L$ za pomocą następującego przejścia granicznego: niech $a \in \mathcal{A}(\Lambda_0)$, wówczas*

$$\alpha_t(a) = \lim_{\substack{\Lambda_0 \subset \Lambda \\ \Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu}} e^{-itH(\Lambda)} a e^{itH(\Lambda)}, \quad (5.3)$$

gdzie granicę bierzemy po zbiorze skierowanym skończonych podzbiorów $\mathbb{Z}^\nu$ częściowo uporządkowanym przez relację " $\subset$ ". Ponadto zbieżność (5.3) jest jednostajna dla t w pewnym kole wokół $t = 0$.

5.3 Równowaga układów skończonych

Będziemy rozważać skończony podzbiór $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$. W fizycznej interpretacji odpowiada to ograniczonemu obszarowi zawierającemu skończoną liczbę cząstek. Mając do dyspozycji lokalny Hamiltonian $H(\Lambda)$ możemy zdefiniować *stan Gibbsa* dla naszego układu, tj. stan opisujący wartość oczekiwaną lokalnych obserwabli w zespole kanonicznym przy zadanej temperaturze T : dla $a \in \mathcal{A}(\Lambda)$

$$\omega_\Lambda(a) = \text{Tr } a \rho_\Lambda,$$

gdzie

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\Lambda)},$$

a Z jest stałą normalizacji (patrz część 5.1).

Udowodnimy, że dla dowolnych, $a, b \in \mathcal{A}(\Lambda)$ istnieje funkcja całkowita F , ograniczona na pasku $D_\beta = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z \leq \beta\}$ taka, że dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \omega_\Lambda(\alpha_t^\Lambda(a)b), \quad F(t + i\beta) = \omega_\Lambda(b\alpha_t^\Lambda(a)). \quad (5.4)$$

Zauważmy, że operatory a i b są po prostu macierzami $p^{N(\Lambda)} \times p^{N(\Lambda)}$ nad $\mathbb{C}$, a więc funkcje $t \mapsto \omega_\Lambda(\alpha_t^\Lambda(a)b)$ i $t \mapsto \omega_\Lambda(b\alpha_t^\Lambda(a))$ można zapisać jako skończone sumy funkcji eksponentialnych, a co za tym idzie można je przedłużyć do funkcji całkowitych. Podobny argument pokazuje, że odwzorowanie $\mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha_t^\Lambda(a)$ ma przedłużenie na całą płaszczyznę zespoloną z zachowaniem własności $\alpha_t^\Lambda \alpha_s^\Lambda = \alpha_{t+s}^\Lambda$. Teraz połóżmy $F(t) = \omega_\Lambda(\alpha_t^\Lambda(a)b)$. Własności (5.4) dowodzimy prostym rachunkiem korzystając z niezmienniczości śladu na cykliczne permutacje czynników w argumentcie:

$$\begin{aligned} \omega_\Lambda(\alpha_{t+i\beta}^\Lambda(a)b) &= \text{Tr} \left(e^{-i(t+i\beta)H(\Lambda)} a e^{i(t+i\beta)H(\Lambda)} b \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\Lambda)} \right) \\ &= \text{Tr} \left(e^{\beta H(\Lambda)} e^{-itH(\Lambda)} a e^{itH(\Lambda)} \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\Lambda)} b e^{-\beta H(\Lambda)} \right) \\ &= \text{Tr} \left(e^{-itH(\Lambda)} a e^{itH(\Lambda)} \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\Lambda)} b e^{-\beta H(\Lambda)} e^{\beta H(\Lambda)} \right) \\ &= \text{Tr} \left(e^{-itH(\Lambda)} a e^{itH(\Lambda)} \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\Lambda)} b \right) \\ &= \text{Tr} \left(b e^{-itH(\Lambda)} a e^{itH(\Lambda)} \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\Lambda)} \right) \\ &= \omega_\Lambda(b\alpha_t^\Lambda(a)). \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że ω_Λ jest stanem β -KMS dla grupy α_t^Λ automorfizmów algebry $\mathcal{A}(\Lambda)$.

Twierdzenie 5.3.1 *Stan Gibbsa jest jedynym stanem β -KMS dla α_t^Λ .*

Dowód: Załóżmy, że ω jest stanem β -KMS dla α_t^Λ . Z Twierdzenia 4.3.2 mamy

$$\omega(\alpha_{z+i\beta}^\Lambda(a)b) = \omega(b\alpha_z^\Lambda(a))$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ i dla wszystkich $a, b \in \mathcal{A}(\Lambda)$. W szczególności

$$\omega(\alpha_{i\beta}^\Lambda(a)b) = \omega(ba).$$

Korzystając z tego, że $\mathcal{A}(\Lambda) = B(\mathcal{H}(\Lambda))$ możemy na mocy [Bra] Prop. 2.4.3 zapisać stan ω tak:

$$\omega(b) = \text{Tr } b\rho, \quad b \in \mathcal{A}(\Lambda),$$

gdzie ρ jest operatorem takim, że $\text{Tr } \rho = 1$. Tak więc dla dowolnych $a, b \in \mathcal{A}(\Lambda)$ mamy

$$\text{Tr } ba\rho = \text{Tr } \alpha_{i\beta}^\Lambda(a)b\rho = \text{Tr } e^{\beta H(\Lambda)} a e^{-\beta H(\Lambda)} b\rho = \text{Tr } b\rho e^{\beta H(\Lambda)} a e^{-\beta H(\Lambda)}.$$

Ponieważ b jest dowolny, mamy

$$a\rho = \rho e^{\beta H(\Lambda)} a e^{-\beta H(\Lambda)}$$

czyli

$$[a, \rho e^{\beta H(\Lambda)}] = 0,$$

co przy dowolności a implikuje, że $\rho e^{\beta H(\Lambda)} = \lambda I$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$. Stąd

$$\rho = \lambda e^{-\beta H(\Lambda)},$$

a unormowanie ω daje $\lambda = \frac{1}{Z}$ czyli $\rho = \rho_\Lambda$.

Q.E.D.

Zauważmy, że z Wniosku 4.3.3 wynika, że stan Gibbsa jest stanem niezmienniczym ze względu na ewolucję w czasie. Nie jest to wynik nieoczekiwany, gdyż stan Gibbsa jest stanem danym przez zespół kanoniczny, a więc ma opisywać stan równowagi układu.

5.4 Granica termodynamiczna

Definicja 5.4.1 Niech dla każdego skończonego podzbioru $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ dany będzie pewien stan ω_Λ na $\mathcal{A}(\Lambda)$ i niech ω będzie stanem na $\mathcal{A}$. Stan ω nazywamy granicą termodynamiczną stanów $\{\omega_\Lambda\}_{\substack{\Lambda \in \mathbb{Z}^\nu \\ N(\Lambda) < \infty}}$ jeśli dla każdego skończonego podzbioru $\Lambda_0 \subset \mathbb{Z}^\nu$ i dla każdego $a \in \mathcal{A}(\Lambda_0)$ mamy

$$\omega(a) = \lim_{\substack{\Lambda_0 \subset \Lambda \\ \Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu}} \omega_\Lambda(a).$$

Ponieważ interesuje nas stan równowagi dla układów nieskończonych, za rodzinę stanów $\{\omega_\Lambda\}_{\substack{\Lambda \in \mathbb{Z}^\nu \\ N(\Lambda) < \infty}}$ weźmiemy stany Gibbsa zdefiniowane na lokalnych obserwabkach przy ustalonej stałej $\beta = \frac{1}{kT}$.

Definicja 5.4.2 Stanem równowagi układu nieskończonego dla temperatury T nazywamy stan ω na $\mathcal{A}$, będący granicą termodynamiczną stanów Gibbsa dla temperatury T .

Dowodzi się, że dla potencjałów o skończonym zasięgu istnieje stan równowagi dla układu nieskończonego. Ponadto korzystając z własności stanów Gibbsa mamy

Twierdzenie 5.4.3 ([HaHW] Sect. 4) Niech ω będzie stanem równowagi układu nieskończonego w temperaturze T . Wówczas dla dowolnych $a, b \in \mathcal{A}$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja $F: D_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphyzna we wnętrzu D_β taka, że dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$F(t) = \omega(\alpha_t(a)b), \quad F(t + i\beta) = \omega(b\alpha_t(a)). \quad (5.5)$$

Powyższe twierdzenie można nieco wzmocnić, mamy mianowicie

Twierdzenie 5.4.4 (M. Takesaki) *Niech ω będzie stanem równowagi układu nieskończonego i niech (π, H) będzie reprezentacją GNS algebry $\mathcal{A}$ zadaną przez stan ω . Wówczas rozszerzenie $\tilde{\omega}$ stanu ω na algebrę von Neumanna $\pi(\mathcal{A})'' \subset B(H)$ jest normalnym stanem wiernym spełniającym warunek KMS względem rozszerzenia $\tilde{\alpha}_t$ grupy α_t na $\pi(\mathcal{A})''$, tj. kanonicznego rozszerzenia mocno ciągłej grupy α_t na so-domknięcie algebry $\pi(\mathcal{A})$.*

Z Twierdzenia 4.3.5 mamy natychmiast

Wniosek 5.4.5 *Grupa $\tilde{\alpha}_t$ jest grupą automorfizmów modularnych algebry $\pi(\mathcal{A})''$ wyznaczoną przez $\tilde{\omega}$.*

6 Pełna teoria Tomity-Takesakiego

6.1 Uogólnione wektory cykliczne i separujące

W tej części pracy będziemy korzystali z następującego lematu:

Lemat 6.1.1 *Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech $J \subset M$ będzie lewym ideałem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *Dla każdego $0 \neq x \in H$ istnieje operator $a \in J$ taki, że $ax \neq 0$;*
2. *J jest s-gęsty w M ;*
3. *J jest so-gęsty w M .*

Dowód: “1. $\Rightarrow$ 2.” Rozważmy rodzinę $\mathcal{R}$, której elementami są układy parami ortogonalnych rzutów $\{p_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ zawarte w J . $\mathcal{R}$ jest rodziną częściowo uporządkowaną przez relację “ $\subset$ ” i każdy liniowo uporządkowany łańcuch w $\mathcal{R}$ ma element największy, a więc istnieje w $\mathcal{R}$ element maksymalny $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{R}$. Wprowadźmy oznaczenie

$$P = \sum_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda. \quad (6.1)$$

Weźmy niezerowy wektor $x \in H$ i przypuśćmy, że $Px = 0$. Z założenia istnieje $a \in J$ taki, że $ax \neq 0$. Wówczas $a^*ax \neq 0$. Z tego, że $x \perp PH$ wynika, że istnieją podzbiory borelowskie $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}_+$ takie, że $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $H(a^*a \in A_2) \supset PH$ oraz $H(a^*a \in A_1) \supset \text{span}\{x\}$. Skoro $a^*ax \neq 0$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\chi(a^*a \geq \varepsilon)x \neq 0$. Niech $A = A_1 \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \geq \varepsilon\}$, połóżmy $\tilde{p} = \chi(a^*a \in A)$. Wówczas $\tilde{p} \perp P$ oraz $\tilde{p} \neq 0$, gdyż $\tilde{p}x \neq 0$. Ponadto $\tilde{p} \in J$, jako że $\tilde{p} = f(a^*a)a^*a$, gdzie

$$f(t) = \frac{\chi_A(t)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

Stąd $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{\tilde{p}\}$ jest układem parami ortogonalnych rzutów w J większym niż $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, co przeczy maksymalności układu $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Stąd wniosek, że $x = 0$. Tym samym pokazaliśmy, że $Px \neq 0$ dla wszystkich $0 \neq x \in H$ i w konsekwencji $P = I$. Pozostaje wykazać, że P należy do s-domknięcia J , ale to wynika z faktu, że szereg (6.1) jest so-zbieżny i ciąg uogólniony jego sum częściowych jest normowo ograniczony, co na mocy Uwagi 3.2.1 implikuje, że szereg (6.1) jest s-zbieżny.

“2. $\Rightarrow$ 3.” Wynika to z faktu, że s-topologia jest mocniejsza niż so-topologia.

“3. $\Rightarrow$ 1.” Weźmy niezerowy wektor $x \in H$. Niech $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie ciągiem uogólnionym elementów J so-zbieżnym do $I \in M$. Wówczas istnieje wskaźnik $\lambda_0 \in \Lambda$ taki, że dla wszystkich $\lambda \succeq \lambda_0$ mamy $\|a_\lambda x - x\| < \frac{\|x\|}{2}$. W tej sytuacji $a_{\lambda_0}x \neq 0$. Q.E.D.

Niech M będzie algebrą von Neumanna działającą w przestrzeni Hilberta H . Będziemy badać odwzorowania liniowe $\eta: M \rightarrow H$ spełniające następujące warunki:

$$\left. \begin{array}{l} 1. D(\eta) \text{ jest } s\text{-gęstym lewym ideałem w } \\ M \text{ i dla wszystkich } a \in M, b \in D(\eta) \\ \eta(ab) = a\eta(b), \\ 2. \ker \eta = \{0\} \text{ oraz } \overline{\eta(M)} = H, \\ 3. \eta \text{ jest } s \times \|\cdot\| \text{-domknięte.} \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

Definicja 6.1.2 *Odwzorowanie liniowe $\eta: M \rightarrow H$ spełniające warunki (6.2) nazywamy uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym dla M .*

Postaramy się znaleźć uogólnienie Wniosku 3.3.9 dla uogólnionych wektorów cyklicznych i separujących. Przyjmijmy oznaczenie

$$G = \text{Graph}(\eta) \subset B(H) \times H.$$

Dla dowolnego podzbioru $S \subset B(H) \times H$ zdefiniujemy

$$S^\oplus = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} : as = sa, sx = ay \text{ dla wszystkich } \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} \in S \right\}. \quad (6.3)$$

Zauważmy, że oznaczając $F_{s,y}(a, x) = ay - sx$ mamy

$$S^\oplus = \left((\text{Pr}_1 S)' \times H \right) \cap \bigcap_{\begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} \in S} \ker F_{s,y},$$

gdzie $\text{Pr}_1: B(H) \times H \rightarrow B(H)$ jest kanoniczną projekcją na pierwszą współrzędną. Widać stąd łatwo, że $S^\oplus$ jest zbiorem $s \times \|\cdot\|$ -domkniętym, gdyż zbiór $(\text{Pr}_1 S)' \times H$ jest $\text{so} \times \|\cdot\|$ -domknięty, a więc i $s \times \|\cdot\|$ -domknięty, a formy liniowe $F_{s,y}$ o wartościach w H są $\text{so} \times \|\cdot\|$ -ciągłe, a zatem również $s \times \|\cdot\|$ -ciągłe. Weźmy teraz zbiór G w miejsce S . Nietrudno się przekonać, że z s -gęstości $D(\eta)$ w M wynika, że $\text{Pr}_1(G^\oplus) \subset M'$. Udowodnimy teraz trzy łatwe stwierdzenia:

1. $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in G^\oplus \right) \implies (y = 0).$
2. $\left(\begin{pmatrix} a' \\ 0 \end{pmatrix} \in G^\oplus \right) \implies (a' = 0).$
3. $\left(\begin{pmatrix} a' \in M' \\ b' \\ y \end{pmatrix} \in G^\oplus \right) \implies \left(\begin{pmatrix} a'b' \\ a'y \end{pmatrix} \in G^\oplus \right).$

Zauważmy, że 1. mówi nam, że $G^\oplus$ jest wykresem $s \times \|\cdot\|$ -domkniętego odwzorowania $\eta': M' \rightarrow H$ zdefiniowanego na $D(\eta') = \text{Pr}_1(G^\oplus)$. Z kolei 2. oznacza, że $\ker \eta' = \{0\}$. Z 3. wnioskujemy, że $D(\eta')$ jest lewym ideałem w M' oraz, że dla każdego $a' \in M'$, $b' \in D(\eta')$

$$\eta'(a'b') = a'\eta(b'). \quad (6.4)$$

Ad 1.: Jeśli $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in G^\oplus$, to dla każdego $a \in D(\eta)$, $ay = 0$, a ponieważ $D(\eta)$ jest s-gęsta w M mamy $y = 0$.

Ad 2.: Jeśli $\begin{pmatrix} a' \\ 0 \end{pmatrix} \in G^\oplus$, to dla każdego $a \in D(\eta)$, $a'\eta(a) = 0$, ale $\overline{\eta(M)} = H$, więc $a' = 0$.

Ad 3.: Niech $a \in D(\eta)$, $a' \in M'$, $b' \in D(\eta')$. Oczywiście $a'b'$ komutuje z a , a ponadto mamy

$$a'b'\eta(a) = a'a\eta'(b') = aa'\eta(b'),$$

a więc ze wzoru (6.3) mamy $\begin{pmatrix} a'b' \\ a'y \end{pmatrix} \in G^\oplus$.

Dla dalszego rozumowania kluczowe jest następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 6.1.3 *Niech $a \in M$, $x \in H$. Wówczas*

$$\left(\begin{array}{c} \text{Dla każdego } a' \in D(\eta') \\ a\eta'(a') = a'x \end{array} \right) \implies \left(\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \in G \right). \quad (6.5)$$

Dowód: Chcemy pokazać, że $a \in D(\eta)$ i $\eta(a) = x$. Jako, że η jest odwzorowaniem $s \times \|\cdot\|$ -domkniętym wystarczy wykazać, że wektor $\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}$ należy do $s \times \|\cdot\|$ -domknięcia zbioru G . Baza otoczeń $0 \in B(H) \times H$ w $s \times \|\cdot\|$ -topologii dana jest przez ciągi wektorów $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ takie, że $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$ i liczby $\varepsilon > 0$ definiujące zbiory

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\varepsilon, \{x_n\}} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} : \|y\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|bx_n\|^2 < \varepsilon \right\}$$

(por. (3.2)).

Innymi słowy chcemy pokazać, że

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dla każdego } \varepsilon > 0 \text{ i dowolnego ciągu } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ takiego, że} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty, \\ \text{istnieje } b \in D(\eta) \text{ taki, że} \\ \begin{pmatrix} a-b \\ x-\eta(b) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathcal{O}}_{\varepsilon, \{x_n\}}. \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

Ustalmy więc ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k, & H_k &= H, \\ \hat{b} &= \text{diag}(b, b, \dots), \\ \hat{x} &= \begin{pmatrix} x \\ ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ H_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} \eta(b) \\ bx_1 \\ bx_2 \\ \vdots \end{pmatrix} : b \in D(\eta) \right\} \subset \hat{H}. \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że warunek (6.6) jest równoważny temu, że $\hat{x} \in \overline{\hat{H}_0}$, gdzie domknięcie bierzemy w normie przestrzeni $\hat{H}$.

Niech P będzie rzutem $\widehat{H}$ na $H_0^\perp$. W zapisie macierzowym mamy

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & \\ p_{20} & \cdots & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}, \quad p_{ij} \in B(H), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Z własności η i $D(\eta)$ bez trudu wnioskujemy, że

$$P\widehat{b} = \widehat{b}P$$

dla wszystkich $b \in M$, a to jest równoważne temu, że

$$p_{ij} \in M', \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Oczywiście dla każdego $b \in D(\eta)$ mamy

$$P \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & \\ p_{20} & \cdots & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(b) \\ bx_1 \\ bx_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0,$$

a więc

$$p_{k0}\eta(b) + \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl}bx_l = 0, \quad b \in D(\eta), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

i wreszcie

$$p_{k0}\eta(b) = b \left(- \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl}x_l \right), \quad b \in D(\eta), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

co oznacza, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$

$$p_{k0} \in D(\eta') \quad \text{ i } \quad \eta'(p_{k0}) = - \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl}x_l.$$

Patrząc na lewą stronę (6.5) mamy

$$a\eta'(p_{k0}) = p_{k0}x, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

czyli

$$a \left(- \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl}x_l \right) = p_{k0}x, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

co w formie

$$p_{k0}x + \sum_{l=1}^{\infty} p_{kl}ax_l = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

oznacza po prostu

$$P\widehat{x} = 0.$$

Stąd $\widehat{x} \in (P\widehat{H})^\perp = \overline{H_0}$.

Q.E.D.

Wniosek 6.1.4 $D(\eta')$ jest zbiorem s -gęstym w M' .

Dowód: Niech $x \in H$. Jeśli dla każdego $a' \in D(\eta')$ mamy

$$a'x = 0,$$

to dla każdego $a' \in D(\eta')$ zachodzi

$$0 \cdot \eta'(a') = a'x,$$

a więc na mocy (6.5)

$$x = \eta(0) = 0.$$

Tym samym wykazaliśmy, że dla każdego $0 \neq x \in H$ istnieje operator $a \in J$ taki, że $ax \neq 0$, co w świetle Lematu 6.1.1 implikuje s -gęstość $D(\eta')$ w M' . Q.E.D.

Do uzyskania pełnej analogii do Wniosku 3.3.9 dla uogólnionych wektorów cyklicznych i separujących potrzebujemy jeszcze tylko następującego stwierdzenia:

Stwierdzenie 6.1.5 $\overline{\eta'(M')} = H$.

Dowód: Dla każdego $a' \in M'$ mamy $a'\eta'(M') \subset \eta'(M')$, a więc $\overline{\eta'(M')}$ jest podprzestrzenią M' -niezmienniczą. Oznacza to, że zarówno rzut Q na $\eta'(M')$ jak i $P = I - Q$ należą do M . Ponieważ mamy $P\overline{\eta'(M')} = \{0\}$, na mocy Stwierdzenia 6.1.3

$$\begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \in G,$$

a skoro $\ker \eta = \{0\}$, mamy $P = 0$ czyli $Q = I$. W konsekwencji $\overline{\eta'(M')} = H$. Q.E.D.

Wniosek 6.1.4 i Stwierdzenie 6.1.5 mówią nam, że mając daną algebrę von Neumanna M wraz z uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym $\eta: M \rightarrow H$ możemy w kanoniczny sposób skonstruować uogólniony wektor cykliczny i separujący η' dla M' . Tak skonstruowane odwzorowanie η' nazywamy *komutantem* η . Ponadto z konstrukcji odwzorowania η' i ze Stwierdzenia 6.1.3 nietrudno wywnioskować, że zachodzi następujący wzór wiążący η i η' :

$$a\eta'(a') = a'\eta(a), \quad a \in D(\eta) \quad a' \in D(\eta'), \quad (6.7)$$

który będzie bardzo pomocny w przytoczonej poniżej analizie ogólnej struktury uogólnionych wektorów cyklicznych i separujących dla algebr działających w ośrodkowej przestrzeni Hilberta.

Twierdzenie 6.1.6 Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna z uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym η . Wówczas istnieje ciąg parami ortogonalnych wektorów $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ taki, że dla każdego $a \in M$ mamy

$$\begin{pmatrix} a \in D(\eta) \\ x = \eta(a) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \|a\Omega_n\|^2 < \infty \\ x = \sum_{n=1}^{\infty} a\Omega_n \end{pmatrix}.$$

Dowód Twierdzenia 6.1.6 poprzedzimy kilkoma lematami.

Lemat 6.1.7 *Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Wówczas $B(H)$ jest s -ośrodkowa.*

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie bazą ortonormalną w H . Niech

$$S = \left\{ \sum_{n=1}^N (q_1 + iq_2)x_n : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, \quad N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zbiór S jest normowo gęsty w ideale operatorów zwartych $CB(H)$, a więc jest też s -gęsty. Z kolei $CB(H)$ jest so -gęsty w $B(H)$. Lemat 6.1.1 gwarantuje nam zatem s -gęstość $CB(H)$ w $B(H)$ co kończy dowód. Q.E.D.

Dla dowolnego podzbioru $S \subset M$ przyjmijmy oznaczenie

$$S_+ = \{a \in S : a \geq 0\}. \quad (6.8)$$

Z Lematu 6.1.7 wynika natychmiast następujący wniosek:

Wniosek 6.1.8 *W zbiorze*

$$(D(\eta')_+ \times H) \cap G_1 = \left\{ \left(\eta'^{\frac{a'}{a'}} \right) : a' \in D(\eta'), \quad a' \geq 0, \quad \|a'\| + \|\eta'(a')\| \leq 1 \right\}$$

istnieje przeliczalny podzbiór $s \times \|\cdot\|$ -gęsty.

Ustawmy pierwsze współrzędne elementów owego gęstego podzbioru w ciąg $\{a'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Niech

$$a' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a'_n{}^* a'_n \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.9)$$

Oczywiście $a' \in M'$ oraz $a'^2 \in D(\eta')$. Istotnie: szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a'_n{}^* a'_n$$

jest zbieżny normowo, a zatem jest również s -zbieżny. Dalej mamy

$$\|\eta'(a'_n{}^* a'_n)\| \leq \|a'_n\| \|\eta'(a'_n)\| \leq 1,$$

a więc szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \eta'(a'_n{}^* a'_n)$$

jest zbieżny i z $s \times \|\cdot\|$ -domkniętości η' wnioskujemy, że $a'^2 \in D(\eta')$ i

$$\eta'(a'^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \eta'(a'_n{}^* a'_n).$$

Lemat 6.1.9 $\ker a' = \{0\}$.

Dowód: Jeśli $x \in \ker a'$, to $x \in \ker a'^2$, a więc na mocy (6.9) $x \in \ker a'_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg $\{a'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest s-gęsty w $\{a' \in D(\eta') : \|a'\| + \|\eta'(a')\| \leq 1\}$, a $D(\eta')$ jest s-gęstym ideałem w M , a zatem $x \in \ker b$ dla wszystkich $b \in M$ o odpowiednio małej normie. Stąd wynika już, że $x = 0$. Q.E.D.

Ponieważ a' jest operatorem samosprzężonym mamy oczywiście

Wniosek 6.1.10 $\overline{a'H} = H$.

Lemat 6.1.11 $a' \in D(\eta')$.

Dowód: Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ niech $H_k = H$ i niech

$$\widehat{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k.$$

Zdefiniujmy przekształcenie

$$\widetilde{a'} : H \ni x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} a'_1 x \\ \frac{1}{2} a'_2 x \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} a'_n x \\ \vdots \end{pmatrix} \in \widehat{H}.$$

Nietrudno sprawdzić, że

$$a'^2 = \widetilde{a'}^* \widetilde{a'},$$

a co za tym idzie $\|a'x\| = \|\widetilde{a'}x\|$ dla wszystkich $x \in H$. Możemy zatem zdefiniować częściową izometrię

$$V : \widehat{H} \longrightarrow H$$

kładąc $V = 0$ na $(\widetilde{a'H})^\perp$, a na $\widetilde{a'H}$

$$V : \widetilde{a'}x \longmapsto a'x$$

tak, że zachodzi wzór

$$a' = V \widetilde{a'}. \tag{6.10}$$

W zapisie macierzowym możemy przedstawić V jako wiersz

$$V = (v_1, v_2, \dots), \quad v_n \in B(H), \quad n \in \mathbb{N}.$$

i dla $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \widehat{H}$ mamy

$$V \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n.$$

Z kolei dla $x \in H$ mamy

$$a'x = V \widetilde{a'}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} v_n a'_n x. \tag{6.11}$$

Weźmy dowolny operator unitarny $u \in M$. korzystając ze wzoru (6.10) mamy

$$u^*a'u = u^*V\tilde{a}'u \quad (6.12)$$

Ponieważ $a' \in M'$ oraz $\{a'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M'$ możemy przepisać (6.12) jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} v_n a'_n x = V\tilde{a}'x = a'x = u^*a'u x = u^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} v_n a'_n u x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} u^* v_n u a'_n x$$

dla wszystkich $x \in H$ czyli

$$V\tilde{a}' = a' = u^*a'u = \hat{u}^*V\hat{u}\tilde{a}',$$

gdzie $\hat{u} = \text{diag}(u, u, \dots)$. Oznacza to, że $V|_{\tilde{a}'H} = \hat{u}^*V\hat{u}|_{\tilde{a}'H}$. Z drugiej strony na podprzestrzeni $(\tilde{a}'H)^\perp$ mamy $V = 0$, więc $V = \hat{u}^*V\hat{u}$, co jest oczywiście równoważne temu, że $u^*v_n u = v_n$ dla każdego n , a stąd na mocy Wniosku 3.3.5

$$v_n \in M', \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teraz korzystając ze wzoru (6.11), pamiętając, że $D(\eta')$ jest lewym ideałem, i że $\|v_n\| \leq 1$ dla wszystkich n i używając tych samych argumentów, których użyliśmy dowodząc, że $a'^2 \in D(\eta')$ czytelnik z łatwością wykaże, że $a' \in D(\eta')$ oraz

$$\eta'(a') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \eta'(v_n a'_n).$$

Q.E.D.

Lemat 6.1.12 Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje operator $b'_n \in M'$ taki, że

$$a'_n = b'_n a'. \quad (6.13)$$

Dowód: Wykorzystamy definicje i oznaczenia z dowodu Lematu 6.1.11. Mnożąc obie strony równania (6.10) z lewej przez V^* i porównując odpowiednie elementy macierze otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} v_n^* a' = \frac{1}{2^n} v_n^* v_n a'_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

czyli

$$\sqrt{2^n} v_n^* a' = v_n^* v_n a'_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.14)$$

Zauważmy, że V^*V jest rzutem $\hat{H}$ na $\overline{a'H}$, a więc z definicji zachowuje wszystkie wektory postaci

$$\begin{pmatrix} a'_1 x \\ a'_2 x \\ \vdots \\ a'_n x \\ \vdots \end{pmatrix} \in \hat{H}.$$

Stąd $v_n^* v_n a'_n = a'_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Teraz kładąc $b'_n = \sqrt{2^n} v_n^*$ możemy przepisać (6.14) jako (6.13). Q.E.D.

Na podstawie Lematu 6.1.12 i faktu, że ciąg $\left\{ \begin{pmatrix} a'_n \\ \eta'(a'_n) \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest gęsty w

$$(D(\eta')_+ \times H) \cap G_1$$

łatwo wyciągnąć następujący wniosek:

Wniosek 6.1.13 Zbiór $M'a' = \{b'a' : b' \in M'\}$ jest istotną dziedziną dla η' .

Niech $C \subset D(\eta')$ będzie istotną dziedziną dla η' . Korzystając ze Stwierdzenia 6.1.3 i z konstrukcji η' nietrudno wykazać, że

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \in G \right) \iff \left(\begin{array}{c} \text{Dla wszystkich } b' \in C \\ a\eta'(b') = b'x \end{array} \right).$$

Teraz Wniosek 6.1.13 i warunek (6.2(1.)) dla η' dają nam

Wniosek 6.1.14

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \in G \right) \iff (a\eta'(a') = a'x).$$

Możemy teraz przystąpić do dowodu głównego twierdzenia.

Dowód Twierdzenia 6.1.6: Definiujemy ciąg parami ortogonalnych rzutów $\{p'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M'$

$$\begin{aligned} p'_1 &= \chi(a' \geq 1), \\ p'_n &= \chi\left(\frac{1}{n} \leq a' < \frac{1}{n-1}\right), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $p'_n = f_n(a')a'$, gdzie

$$f_1(t) = \frac{\chi_{[1, \infty[}(t)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$f_n(t) = \frac{\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}[}(t)}{t}, \quad n \geq 2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

a więc w świetle Lematu 6.1.11 i faktu, że $D(\eta')$ jest lewym ideałem mamy $\{p'_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\eta')$. Z kolei z Lematu 6.1.9 nietrudno wywnioskować, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} p'_n = I. \tag{6.15}$$

Niech $\Omega_n = \eta'(p'_n)$. Ponieważ

$$p'_{n_1} \Omega_{n_2} = p'_{n_1} \eta'(p'_{n_2}) = \eta'(p'_{n_1} p'_{n_2}) = \delta_{n_1 n_2} \Omega_{n_2}$$

wektory $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są parami ortogonalne, a ponadto wzór (6.7) pokazuje, że

$$a\Omega_{n_1} \perp a\Omega_{n_2} \text{ dla } n_1 \neq n_2$$

dla wszystkich $a \in M$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\tilde{\eta}: M \rightarrow H$ wzorem

$$\left(\begin{array}{c} a \in D(\tilde{\eta}) \\ y = \tilde{\eta}(a) \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \|a\Omega_n\|^2 < \infty \\ y = \sum_{n=1}^{\infty} a\Omega_n \end{array} \right)$$

Chcemy udowodnić, że $\eta = \tilde{\eta}$.

Krok 1: “ $\eta \subset \tilde{\eta}$ ”. Niech $a \in D(\eta)$. Korzystając z (6.7) i (6.15) mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a\Omega_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|a\eta'(p'_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|p'_n\eta(a)\|^2 = \|\eta(a)\|^2 < \infty$$

oraz

$$\eta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} p'_n\eta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a\eta'(p'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a\Omega_n.$$

Tym samym udowodniliśmy, że $a \in D(\tilde{\eta})$ i $\tilde{\eta}(a) = \eta(a)$ czyli $\eta \subset \tilde{\eta}$.

Krok 2: “ $\tilde{\eta} \subset \eta$ ”. Niech $a \in D(\tilde{\eta})$. Wtedy

$$a'\tilde{\eta}(a) = a' \sum_{n=1}^{\infty} a\Omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'a\Omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} aa'\Omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} aa'\eta'(p'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a\eta'(a'p'_n),$$

a ponieważ p'_n jest funkcją od a' , dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a'p'_n = p'_na', \quad n \in \mathbb{N}$$

i korzystając z (6.15) otrzymujemy

$$a'\tilde{\eta}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a\eta'(a'p'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a\eta'(p'_na') = \sum_{n=1}^{\infty} ap'_n\eta'(a') = \sum_{n=1}^{\infty} p'_na\eta'(a') = a\eta'(a')$$

czyli na mocy Wniosku 6.1.14 $a \in D(\eta)$ i $\eta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a\Omega_n = \tilde{\eta}(a)$ i otrzymujemy $\tilde{\eta} \subset \eta$.

Q.E.D.

6.2 Wagi i twierdzenie Haagerupa

Niech A będzie C^* -algebrą. Weźmy $a, b \in A_{sa}$. Powiemy, że $a \geq b$, jeśli istnieje $c \in A$ taki, że $a - b = c^*c$. Jeśli A jest algebrą von Neumanna, to jest to powyższa relacja “ $\geq$ ” jest identyczna z relacją wprowadzoną przez (3.6). W analogii do (6.8) wprowadźmy oznaczenie

$$A_+ = \{a \in A : a \geq 0\}.$$

Definicja 6.2.1 Niech A będzie C^* -algebrą. Wagą na A nazywamy dodatnio jednorodne, addytywne odwzorowanie $A_+ \rightarrow [0, \infty]$.

Niech φ będzie wagą na C^* -algebrze A . Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} n_\varphi &= \{a \in A : \varphi(a^*a) < \infty\}, \\ N_\varphi &= \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}, \\ m_\varphi &= \text{span}\{a \in A_+ : \varphi(a) < \infty\} = \text{span } n_\varphi^* n_\varphi. \end{aligned}$$

φ przedłuża się do dodatniego funkcjonału liniowego na m_φ .

Stwierdzenie 6.2.2 n_φ jest lewym ideałem w A .

Dowód: Zauważmy, że jeśli $a, b \in A_+$ i $a \geq b$, to $\varphi(a) \geq \varphi(b)$. Niech $a \in A$, $b \in n_\varphi$. Mamy

$$a^*a \leq \|a\|^2 I. \quad (6.16)$$

Mnożąc obie strony nierówności (6.16) z lewej strony przez b^* , a z prawej przez b (taka operacja zachowuje relację “ $\geq$ ”) otrzymujemy

$$b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b$$

i dlatego

$$\varphi(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \varphi(b^*b) < \infty.$$

Weźmy teraz $a, b \in n_\varphi$. Mamy

$$(a+b)^*(a+b) = 2(a^*a + b^*b) - (a-b)^*(a-b) \leq 2(a^*a + b^*b),$$

a zatem

$$\varphi((a+b)^*(a+b)) \leq 2(\varphi(a^*a) + \varphi(b^*b)) < \infty.$$

Q.E.D.

Używając tych samych oszacowań, co w dowodzie Stwierdzenia 6.2.2 otrzymujemy również

Stwierdzenie 6.2.3 N_φ jest lewym ideałem w A .

Mówimy, że waga φ jest *wierna*, jeśli $N_\varphi = \{0\}$. Ponadto może się zdarzyć, że φ przyjmuje jedynie skończone wartości. Wówczas $n_\varphi = m_\varphi = A$ i mówimy, że waga φ jest *skończona*. Mamy wzajemnie jednoznaczność pomiędzy wagami skończonymi na A a funkcjonalami dodatnimi na A .

Niech φ będzie wagą na A . Oznaczmy przez H_φ uzupełnienie przestrzeni prehilbertowskiej n_φ/N_φ z iloczynem skalarnym

$$(\eta_\varphi(a)|\eta_\varphi(b)) = \varphi(a^*b),$$

gdzie $\eta_\varphi: n_\varphi \rightarrow n_\varphi/N_\varphi$ jest kanonicznym epimorfizmem. Dla $a \in A$ definiujemy operator liniowy $\pi_\varphi(a): A \rightarrow A$:

$$\pi_\varphi(a)\eta_\varphi(b) = \eta_\varphi(ab), \quad a \in A, \quad b \in n_\varphi.$$

Pamiętając, że $b^*a^*ab \leq b^*(\|a\|^2 I)b = \|a\|^2 b^*b$ mamy

$$\begin{aligned} \|\pi_\varphi(a)\eta_\varphi(b)\|^2 &= \|\eta_\varphi(ab)\|^2 = (\eta_\varphi(ab)|\eta_\varphi(ab)) \\ &= \varphi(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 \varphi(b^*b) = \|a\|^2 \|\eta_\varphi(b)\|^2, \end{aligned}$$

a więc $\pi_\varphi(a)$ rozszerza się do operatora ograniczonego na H_φ . W ten sposób otrzymujemy reprezentację (π_φ, H_φ) algebry A . Ponadto mamy

$$(\eta_\varphi(a)|\pi_\varphi(b)\eta_\varphi(c)) = \varphi(a^*bc), \quad b \in A, \quad b, c \in n_\varphi. \quad (6.17)$$

Argumentując tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 3.4.5 widzimy, że trójka $(\pi_\varphi, H_\varphi, \eta_\varphi)$ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do unitarnej równoważności przez warunek 6.17.

Otrzymaną w wyniku przedstawionej powyżej konstrukcji reprezentację nazywamy reprezentacją GNS wyznaczoną przez wagę φ . Zauważmy, że jeśli φ jest skończona, to $n_\varphi = A$ i $\eta_\varphi(a) = a\Omega_\varphi$, gdzie Ω_φ jest wektorem cyklicznym skonstruowanym w Twierdzeniu 3.4.5. Z drugiej strony jeśli istnieje w H_φ taki wektor Ω , że $\eta_\varphi(a) = a\Omega$ dla wszystkich $a \in n_\varphi$, to mamy $n_\varphi = A$ i Ω jest wektorem cyklicznym dla $\pi_\varphi(A)$. Niech M będzie algebrą von Neumanna. Wagę φ na M nazywamy *normalną*, jeśli dla każdego normowo ograniczonego, wzrastającego ciągu uogólnionego $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset M_+$ mamy

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \varphi(a_\lambda) = \varphi \left(\sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \right).$$

φ nazywamy *półskończoną*, jeśli ideał n_φ jest s-gęsty w M lub równoważnie, jeśli podalgebra m_φ jest w-gęsta w M .

Niech φ będzie wierną, półskończoną wagą na algebrze von Neumanna M . Wówczas reprezentacja GNS algebry M zadana przez φ jest $*$ -izomorfizmem, a więc w szczególności jest morfizmem normalnym. Istotnie: jeśli $\pi_\varphi(a) = 0$, to $ab \in N_\varphi = \{0\}$ dla wszystkich $b \in n_\varphi$. Mnożenie z lewej przez ustalony operator jest operacją w-ciągłą, a ideał n_φ jest s-gęsty, a zatem również w-gęsty w M . Stąd $ab = 0$ dla wszystkich $b \in M$ czyli $a = 0$.

Okazuje się że jeśli tylko waga φ jest normalna, to reprezentacja GNS zadana przez φ też jest normalna ([Stra] Th. 2.2). Podsumowując powyższe roważania mamy

Twierdzenie 6.2.4 *Niech φ będzie wagą na C^* -algebrze A . Wówczas istnieje dokładnie jedna (z dokładnością do unitarnej równoważności) trójka $(\pi_\varphi, H_\varphi, \eta_\varphi)$ taka, że (π_φ, H_φ) jest reprezentacją A , a $\eta_\varphi: A \rightarrow H_\varphi$ jest odwzorowaniem linowym na gęsty podzbiór w H_φ taka, że zachodzi (6.17).*

Ponadto jeśli A jest algebrą von Neumanna i φ jest normalna, to π_φ jest morfizmem normalnym, a jeśli φ jest półskończona i wierna, to π_φ jest $$ -izomorfizmem.*

Niech M będzie algebrą von Neumanna i niech φ będzie normalną wagą na M . Okazuje się, że normalność φ jest równoważna w-półciągłości z dołu ([Haa] Th. 1.8), to znaczy, że jeśli $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset M_+$ jest w-zbieżnym ciągiem uogólnionym, to

$$\varphi \left(\lim_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \right) \leq \liminf_{\lambda \in \Lambda} \varphi(b_\lambda).$$

Korzystając z tej charakteryzacji możemy udowodnić następujące twierdzenie

Twierdzenie 6.2.5 *Niech M będzie algebrą von Neumanna i niech φ będzie wierną, normalną, półskończoną wagą na M . Wówczas odwzorowanie $\eta_\varphi: n_\varphi \rightarrow H_\varphi$ jest (po utożsamieniu M z $\pi_\varphi(M)$) uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym dla M .*

Dowód: Nietrudno wykazać, że warunki (6.2(1.)) i (6.2(2.)) są spełnione. Pozostaje wykazać, że η_φ jest odwzorowaniem $s \times \|\cdot\|$ -domkniętym. Niech $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset n_\varphi$ będzie ciągiem uogólnionym takim, że

$$a_\lambda \xrightarrow[\lambda \in \Lambda]{s} a \in M, \tag{6.18}$$

$$\eta_\varphi(a_\lambda) \xrightarrow[\lambda \in \Lambda]{\|\cdot\|} \eta \in H_\varphi. \tag{6.19}$$

Wówczas z (6.18) mamy $a_\lambda^* a_\lambda \xrightarrow[\lambda \in \Lambda]{w} a^* a$, natomiast z (6.19) widzimy, że istnieją $\lambda_0 \in \Lambda$ oraz dodatnia stała C takie, że

$$\varphi(a_\lambda^* a_\lambda) = \|\eta_\varphi(a_\lambda)\|^2 \leq C, \quad \lambda \succeq \lambda_0, \quad (6.20)$$

$$\varphi((a_\lambda - a_\gamma)^*(a_\lambda - a_\gamma)) = \|\eta_\varphi(a_\lambda) - \eta_\varphi(a_\gamma)\|^2 \xrightarrow[\lambda, \gamma \in \Lambda]{} 0. \quad (6.21)$$

Z (6.20) oraz z w-półciągłości z dołu φ dostajemy

$$\varphi(a^* a) \leq \liminf_{\lambda \in \Lambda} \varphi(a_\lambda^* a_\lambda) \leq C,$$

a więc $a \in n_\varphi$. Teraz ponieważ

$$\|\eta_\varphi(a) - \eta\| \leq \|\eta_\varphi(a_\lambda) - \eta_\varphi(a)\| + \|\eta_\varphi(a_\lambda) - \eta\|$$

oraz

$$\|\eta_\varphi(a_\lambda) - \eta\| \xrightarrow[\lambda \in \Lambda]{} 0$$

wystarczy zająć się wyrazem $\|\eta_\varphi(a_\lambda) - \eta_\varphi(a)\|$. Korzystając z (6.21) mamy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi((a_\lambda - a)^*(a_\lambda - a)) \\ &\leq \liminf_{\gamma \in \Lambda} \varphi((a_\lambda - a_\gamma)^*(a_\lambda - a_\gamma)) \\ &\leq \liminf_{\lambda \in \Lambda} \liminf_{\gamma \in \Lambda} \varphi((a_\lambda - a_\gamma)^*(a_\lambda - a_\gamma)) \\ &\leq \lim_{\lambda, \gamma \in \Lambda} \varphi((a_\lambda - a_\gamma)^*(a_\lambda - a_\gamma)) = 0, \end{aligned}$$

a to znaczy, że $\eta = \eta_\varphi(a)$.

Q.E.D.

W ten sposób wykazaliśmy, że każda wierna, normalna, półskończona waga na algebrze von Neumanna zadaje pewien uogólniony wektor cykliczny i separujący dla tej algebry. Ponadto można udowodnić, że każdy uogólniony wektor cykliczny i separujący η dla algebry von Neumanna M zadaje wierną, normalną, półskończoną wagę φ na M daną dla $a \in M_+$ wzorem

$$\varphi(a) = \begin{cases} (\eta(b)|\eta(b)) & \text{jeśli istnieje } b \in D(\eta) \text{ taki, że } a = b^*b, \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W przypadku, gdy algebra M działa w ośrodkowej przestrzeni Hilberta fakt ten jest nietrudną konsekwencją Twierdzenia 6.1.6.

Istnieje twierdzenie opisujące ogólną strukturę normalnych wag na algebrach von Neumanna, jest to tak zwane Twierdzenie Haagerupa.

Twierdzenie 6.2.6 (Haagerup, [Haa]) *Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech φ będzie wagą na M . Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. φ jest całkowicie addytywna, to znaczy, że

$$\varphi\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(a_\lambda)$$

dla każdego ciągu uogólnionego $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset M_+$ takiego, że $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ istnieje w słabej topologii;

2. φ jest normalna;

3. φ jest w-półciągła z dołu;

4. $\varphi(a) = \sup_{\omega \in F} \omega(a)$ dla wszystkich $a \in M_+$, gdzie F jest pewnym zbiorem dodatnich funkcyj normalnych.;

5. $\varphi(a) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \omega_\gamma(a)$ dla wszystkich $a \in M_+$, gdzie $\{\omega_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ jest ciągiem uogólnionym dodatnich funkcyj normalnych.

Dzięki Twierdzeniu 6.1.6 możemy dla przypadku, gdy H jest przestrzenią óśrodkową łatwo wykazać implikację “2. $\Rightarrow$ 5.”, która w połączeniu z [Haa], Th. 1.8 daje prosty dowód twierdzenia Haagerupa dla algebr działających w óśrodkowej przestrzeni Hilberta i wiernych, półskończonych wag. W tym celu wystarczy położyć $\Gamma = \mathbb{N}$ i $\omega_n(a) = (\Omega_n | \pi_\varphi(a) \Omega_n)$, gdzie $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem wektorów takim, że

$$\eta_\varphi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_\varphi(a) \Omega_n.$$

Funkcjonały $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są oczywiście dodatnie jak i normalne, jako, że każdy z nich jest złożeniem morfizmu normalnego i funkcyjonału dodatniego, wo-ciągłego, a więc normalnego.

6.3 Teoria Tomity-Takesakiego dla wag

Okazuje się, że każda algebra von Neumanna posiada wierną, półskończoną, normalną wagę (patrz [StZs] Sect. 10.14), a zatem każda algebra von Neumanna posiada uogólniony wektor cykliczny i separujący. Fakt ten pozwoli nam uogólnić teorię Tomity-Takesakiego z klasy algebr σ -skończonych na wszystkie algebry von Neumanna.

Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech η będzie uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym dla M . Przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\eta &= D(\eta)^* \cap D(\eta), \\ \mathcal{A}'_\eta &= D(\eta')^* \cap D(\eta'). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_\eta$ i $\mathcal{A}'_\eta$ są *-podalgebrami odpowiednio M i M' .

Lemat 6.3.1 *Zbiory*

$$\begin{aligned} D(S_0) &= \{\eta(a) : a \in \mathcal{A}_\eta\}, \\ D(F_0) &= \{\eta'(a') : a' \in \mathcal{A}'_\eta\}. \end{aligned}$$

są gęste w H

Dowód: Przypuśćmy, że istnieje $x \in H$ ortogonalny do $D(S_0)$. Wówczas dla dowolnych $a, b \in D(\eta)$ mamy $a^*b \in \mathcal{A}_\eta$ i

$$0 = (x | \eta(a^*b)) = (x | a^* \eta(b)) = (ax | \eta(b)).$$

Pamiętamy, że $\overline{\eta(M)} = H$, a więc $ax = 0$ dla wszystkich $a \in D(\eta)$, a stąd $x = 0$. Tak samo pokazujemy, że $\overline{D(F_0)} = H$. Q.E.D.

Zdefiniujmy operatory antyliniowe $H \rightarrow H$

$$\begin{aligned} S_0 : \eta(a) &\longmapsto \eta(a^*), & a &\in \mathcal{A}_\eta \\ F_0 : \eta'(a') &\longmapsto \eta'(a'^*), & a' &\in \mathcal{A}'_\eta. \end{aligned}$$

Stwierdzenie 6.3.2 *Mamy*

$$S_0^* = \overline{F_0}, \tag{6.22}$$

$$F_0^* = \overline{S_0}. \tag{6.23}$$

Dowód: Tak samo jak w dowodzie Stwierdzenia 4.2.1 pokazujemy, że $F \subset S_0^*$, a co za tym idzie

$$\overline{F_0} \subset S_0^*. \tag{6.24}$$

Weźmy $x \in D(S_0^*)$ i niech $y = S_0^*x$. Dla dowolnego $a \in \mathcal{A}_\eta$ zachodzi

$$(y|\eta(a)) = (S_0^*x|\eta(a)) = (S_0\eta(a)|x) = (\eta(a^*)|x). \tag{6.25}$$

Rozważmy operatory

$$\begin{aligned} Q_0 : \eta(a) &\longmapsto ax, & a &\in \mathcal{A}_\eta, \\ Q_0^+ : \eta(a) &\longmapsto ay, & a &\in \mathcal{A}_\eta. \end{aligned}$$

Teraz korzystając ze wzoru (6.25) dostajemy dla $a, b \in D(\eta)$

$$\begin{aligned} (\eta(b)|Q_0\eta(a)) &= (\eta(b)|ax) = (\eta(a^*b)|x) \\ &= (y|\eta(b^*a)) = (by|\eta(a)) = (Q_0^+\eta(b)|\eta(a)). \end{aligned}$$

Ponieważ Q_0^+ ma gęstą dziedzinę, operator Q_0 jest domykalny. Niech $Q' = \overline{Q_0}$. Nie-trudno sprawdzić, że operator ten jest stowarzyszony z M' to znaczy, że

$$u^*Q'u = Q'$$

dla wszystkich unitarnych $u \in M$ (patrz [StZs] Sect. 9.7). Jedną z konsekwencji tego faktu jest to, że jeśli $Q' = u'|Q'|$ jest rozkładem biegunowym Q' , to zarówno u' jak i wszystkie rzuty spektralne $|Q'|$ leżą w M' (patrz [Bra] Lem. 2.5.8). Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} E'_n &= \chi(0 \leq |Q'| \leq n), & n &\in \mathbb{N}, \\ Q'_n &= u'E'_nQ', & n &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mamy wówczas $Q'_n \in M'$, a ponadto $Q'_n \in \mathcal{A}'_\eta$ i

$$\eta'(Q'_n) = u'E'_nu'^*x, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.26}$$

$$\eta'(Q_n'^*) = E'_ny, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.27}$$

Istotnie: dla dowolnego $a \in D(\eta)$ mamy

$$\begin{aligned} au'E'_nu'^*x &= u'E'_nu'^*ax = u'E'_nu'^*Q_0\eta(a) \\ &= u'E'_nu'^*u'|Q'|\eta(a) = Q'_n\eta(a), \end{aligned}$$

a stąd na mocy Stwierdzenia 6.1.3 $Q'_n \in D(\eta')$ i zachodzi (6.26). Podobnie dla dowolnego $a \in D(\eta)$

$$\begin{aligned} aE'_n y &= E'_n a y = E'_n Q'^* \eta(a) \\ &= E'_n |Q'| u'^* \eta(a) = Q'^* \eta(a), \end{aligned}$$

co dowodzi (6.27). Teraz korzystając z faktu, że $E'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{so} I$ oraz $u'u'^* = \chi(|Q'| \neq 0)$ i że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $a_\varepsilon \in D(\eta)$ taki, że $\|a_\varepsilon^* a_\varepsilon x - x\| < \varepsilon$ widzimy, że

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \eta'(Q'_n) &= x, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \eta'(Q'^*_n) &= y, \end{aligned}$$

a stąd $x \in D(\overline{F_0})$ i $\overline{F_0}x = y$ czyli $\overline{F_0} \subset S_0^*$, co w połączeniu z (6.24) dowodzi wzoru (6.22). Dowód wzoru (6.23) jest analogiczny. Q.E.D.

Zauważmy, że Stwierdzenie 6.3.2 jest wzmocnieniem Stwierdzenia 4.2.1, gdyż możemy wziąć $\eta(a) = a\Omega$. Podobnie jak w części 4.2 przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} F &= \overline{F_0}, \\ S &= \overline{S_0}. \end{aligned}$$

Ze stwierdzenia 6.3.2 mamy $F = S^*$ i $F^* = S$. Teraz możemy zdefiniować operator modularny $\Delta = FS$ i modularną inwolucję J jako operator antyunitarny w rozkładzie biegunowym $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$. Nietrudno się przekonać, że w obecnej sytuacji punkty 1.–3. Stwierdzenia 4.2.2 pozostają prawdziwe i to z tymi samymi dowodami. Prawdziwe są również w tym ogólniejszym przypadku Twierdzenie 4.2.3 i Wniosek 4.2.5. Jednoparametrową grupę automorfizmów M daną przez

$$a \longmapsto \Delta^{it} a \Delta^{-it}, \quad a \in M$$

oznaczamy symbolem σ_t^φ . Grupa ta jest oczywiście w-ciągła i $\varphi \circ \sigma_t^\varphi = \varphi$, a ponadto można uogólnić również warunek KMS, mianowicie dla każdej pary $a, b \in n_\varphi^* \cap n_\varphi$ istnieje funkcja F ciągła i ograniczona na pasku $D_1 = \{z : 0 \leq \text{Im } z \leq 1\}$, holomorficzna we wnętrzu D_1 taka, że

$$\begin{aligned} F(t) &= \varphi(\sigma_t^\varphi(a)b), \\ F(t+i) &= \varphi(b\sigma_t^\varphi(a)), \end{aligned}$$

gdzie φ oznacza tu rozszerzenie wagi do funkcjonału na m_φ . Tak samo jak w przypadku algebr σ -skończonych warunek ten jest wystarczający aby scharakteryzować grupę modularną związaną z φ :

Twierdzenie 6.3.3 ([Tak]) *Niech α_t będzie w-ciągłą, jednoparametrową grupą automorfizmów M spełniającą uogólniony warunek KMS względem φ taką, że $\varphi \circ \sigma_t^\varphi = \varphi$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wówczas $\alpha_t = \sigma_t^\varphi$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.*

6.4 Porównywanie wag

W tej części opiszemy pokrótce tak zwaną metodę macierzy 2×2 Alaina Connes'a korzystając jednak z wprowadzonego wyżej formalizmu uogólnionych wektorów cyklicznych i separujących.

Niech $M \subset B(H)$ będzie algebrą von Neumanna i niech φ_1 i φ_2 będą wiernymi, półskończonymi, normalnymi wagami na M . Oznaczmy przez η_1 i η_2 uogólnione wektory cykliczne i separujące związane odpowiednio z wagami φ_1 i φ_2 . Będziemy rozważać nową algebrę von Neumanna

$$\widetilde{M} = M_2(M) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in M \right\} \subset B(\widetilde{H})$$

gdzie $\widetilde{H} = H \oplus H \oplus H \oplus H$, (patrz [StZs] Sect. 3.16). Na $\widetilde{M}$ definiujemy wagę

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \varphi_1(a) + \varphi_2(b).$$

Nietrudno sprawdzić, że φ jest wierną, półskończoną, normalną wagą na $\widetilde{M}$. Niech η będzie uogólnionym wektorem cyklicznym i separującym $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{H}$ związanym z wagą φ . Dziedzina η wygląda tak:

$$D(\eta) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} : a_1, b_1 \in D(\eta_1), \quad a_2, b_2 \in D(\eta_2) \right\}$$

i mamy

$$\eta \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \eta_1(a) \\ \eta_1(c) \\ \eta_2(b) \\ \eta_2(d) \end{pmatrix},$$

natomiast działanie $\widetilde{M}$ na $\widetilde{H}$ jest następujące:

$$\pi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Teraz wprowadzimy operatory S, J i Δ . Niech S, S_1 i S_2 będą operatorami związanymi z wektorami η, η_1 i η_2 tak jak w części 6.3. S jest domknięciem operatora

$$S_0 : \begin{pmatrix} \eta_1(a) \\ \eta_1(c) \\ \eta_2(b) \\ \eta_2(d) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta_1(a^*) \\ \eta_1(b^*) \\ \eta_2(c^*) \\ \eta_2(d^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \eta_1(a) \\ S_{12} \eta_2(b) \\ S_{21} \eta_1(c) \\ S_2 \eta_2(d) \end{pmatrix},$$

gdzie operatory S_{12} i S_{21} są domknięciami operatorów

$$\begin{aligned} S_{0,12} : \eta_2(b) &\mapsto \eta_1(b^*), & b &\in D(\eta_1)^* \cap D(\eta_2), \\ S_{0,21} : \eta_1(c) &\mapsto \eta_2(c^*), & c &\in D(\eta_2)^* \cap D(\eta_1). \end{aligned}$$

Inaczej możemy S zapisać w postaci macierzowej jako

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{12} & 0 \\ 0 & S_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 \end{pmatrix}.$$

Operator Δ definiujemy tak:

$$\Delta = S^* S = \begin{pmatrix} S_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{21}^* & 0 \\ 0 & S_{12}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{12} & 0 \\ 0 & S_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_2 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}, \tag{6.28}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= S_1^* S_1, \\ \Delta_{21} &= S_{21}^* S_{21}, \\ \Delta_{12} &= S_{12}^* S_{12}, \\ \Delta_2 &= S_2^* S_2.\end{aligned}$$

Mamy rozkłady biegunowe

$$\begin{aligned}S_1 &= J_1 \Delta_1^{\frac{1}{2}}, \\ S_{21} &= J_{21} \Delta_{21}^{\frac{1}{2}}, \\ S_{12} &= J_{12} \Delta_{12}^{\frac{1}{2}}, \\ S_2 &= J_2 \Delta_2^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

i możemy opisać operator $J = S \Delta^{-\frac{1}{2}}$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{12} & 0 \\ 0 & J_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}.$$

Niech $\sigma_t^\varphi, \sigma_t^{\varphi_1}$ i $\sigma_t^{\varphi_2}$ będą grupami modularnymi związanymi z wagami φ, φ_1 i φ_2 :

$$\begin{aligned}\pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \Delta^{it} \pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \Delta^{-it}, & t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \widetilde{M}, \\ \sigma_t^{\varphi_1}(a) &= \Delta_1^{it} a \Delta_1^{-it}, & t \in \mathbb{R}, \quad a \in M, \\ \sigma_t^{\varphi_2}(d) &= \Delta_2^{it} d \Delta_2^{-it}, & t \in \mathbb{R}, \quad d \in M.\end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru (6.28) widzimy, że

$$\begin{aligned}\sigma_t^\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \sigma_t^{\varphi_1}(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_t^\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t^{\varphi_2}(d) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\pi\left(\sigma_t^\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) &= \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}^{it} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}^{-it} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \Delta_1^{it} \Delta_{21}^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_{12}^{it} \Delta_2^{-it} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pi\left(\begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

gdzie $u_t = \Delta_1^{it} \Delta_{21}^{-it} = \Delta_{12}^{it} \Delta_2^{-it} \in M$ jest oczywiście operatorem unitarnym.

Definicja 6.4.1 *Jednoparametrową rodzinę operatorów unitarnych $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ nazywamy pochodną Radona-Nikodyma wagi φ_1 względem wagi φ_2 i oznaczamy*

$$u_t = (D\varphi_1 : D\varphi_2)_t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pochodna Radona-Nikodyma ma wiele ciekawych i użytecznych własności. Postaramy się opisać niektóre z nich. Zauważmy, że działając σ_t^φ na obie strony równania

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

i porównując odpowiednie elementy macierzowe otrzymujemy

$$\sigma_t^{\varphi_2}(a) = u_t^* \sigma_t^{\varphi_1}(a) u_t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.29)$$

Podobnie działając σ_t^φ na obie strony

$$\sigma_s^\varphi \left(\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & u_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i porównując odpowiednie elementy macierzowe dostajemy

$$u_{t+s} = \sigma_s^{\varphi_1}(u_t) u_s = u_t \sigma_t^{\varphi_2}(u_s), \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad (6.30)$$

Korzystając z tego, że wagi φ, φ_1 i φ_2 spełniają uogólniony warunek KMS względem grup $\sigma_t^\varphi, \sigma_t^{\varphi_1}$ i $\sigma_t^{\varphi_2}$ otrzymujemy następujący rezultat:

Stwierdzenie 6.4.2 *Dla każdego $a \in n_{\varphi_1}^* \cap n_{\varphi_2}$ i dla każdego $b \in n_{\varphi_2}^* \cap n_{\varphi_1}$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja F zdefiniowana na pasku D_1 , holomorficzna na $\text{Int } D_1$ taka, że dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ mamy*

$$F(t) = \varphi_1(\sigma_t^{\varphi_1}(a) u_t b), \quad F(t+i) = \varphi_2(b u_t \sigma_t^{\varphi_2}(a)), \quad (6.31)$$

gdzie φ_1 i φ_2 rozszerzamy na m_{φ_1} i m_{φ_2} odpowiednio.

Dowód: Weźmy

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{b} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wiemy, że istnieje ciągła i ograniczona funkcja F zdefiniowana na pasku D_1 , holomorficzna na $\text{Int } D_1$ taka, że dla $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) = \varphi \left(\sigma_t^\varphi(\tilde{a}) \tilde{b} \right), \quad F(t+i) = \varphi \left(\tilde{b} \sigma_t^\varphi(\tilde{a}) \right).$$

Korzystając z tego, że

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prostym rachunkiem pokazujemy, że funkcja F spełnia (6.31). Q.E.D.

Ze Stwierdzenia 6.4.2 wynika, że jeśli wagi φ_1 i φ_2 są skończone, to dla dowolnego $a \in M$ istnieje funkcja F taka, że

$$F(t) = \varphi_2(u_t a), \quad F(t+i) = \varphi_1(a u_t).$$

co pozwala wyznaczyć funkcjonal φ_2 znając φ_1 i $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Równania (6.29), (6.30) i istnienie funkcji F takiej jak w Stwierdzeniu 6.4.2 wyznaczają rodzinę $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ jednoznacznie.

Rozważmy następujący przykład: niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą probabilistyczną i niech $M = L^\infty(\Omega, \mu) \subset B(L^2(\Omega, \mu))$. Dla $k = 1, 2$ niech

$$\varphi_k(f) = \int_{\Omega} f d\nu_k, \quad f \in L^\infty(\Omega, \mu),$$

gdzie ν_1 i ν_2 są miarami probabilistycznymi na Ω absolutnie ciągłymi względem μ . Wówczas $t \mapsto (d\nu_2/d\nu_1)^{it}$ spełnia (6.29) i (6.30) oraz tezę Stwierdzenia 6.4.2, a stąd $u_t = (d\nu_2/d\nu_1)^{it}$ i rodzina $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ wyznacza całkowicie pochodną Radona-Nikodyma $d\nu_2/d\nu_1$.

Korzystając z unitarności $\{u_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, z równania

$$u_{t+s} = \sigma_s^{\varphi_1}(u_t)u_s$$

otrzymujemy wzór

$$u_{t+s}u_s^* = \sigma_s^{\varphi_1}(u_t) \quad (6.32)$$

i przykładając $\sigma_{-s}^{\varphi_1}$ do obu stron (6.32) i podstawiając $t = -s$ dostajemy

$$u_{-s} = \sigma_{-s}^{\varphi_1}(u_s^*), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (6.33)$$

Mamy następujące, ważne twierdzenie:

Twierdzenie 6.4.3 (Connes, [Con] Th.1.8) *Niech M będzie algebrą von Neumanna, U — grupą elementów unitarnych M , a φ wierną, półskończoną wagą normalną na M . Odwzorowanie $\psi \mapsto (D\psi : D\varphi)$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy zbiorem mocno ciągłych odwzorowań $\mathbb{R} \rightarrow U$ spełniających (6.29), (6.30) i (6.33), a zbiorem wszystkich wiernych, półskończonych, normalnych wag na M .*

Prostą konsekwencją definicji pochodnej Radona-Nikodyma jest równanie

$$(D\varphi_2 : D\varphi_1)_t^{-1} = (D\varphi_1 : D\varphi_2)_t, \quad (6.34)$$

natomiast używając pojęcia tak zwanej relatywnej pochodnej Radona-Nikodyma nie-trudno udowodnić następującą regułę łańcuchową:

$$(D\varphi_3 : D\varphi_1)_t = (D\varphi_3 : D\varphi_2)_t (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t, \quad (6.35)$$

gdzie φ_1, φ_2 i φ_3 są wiernymi, półskończonymi, wiernymi wagami na M . Dla przypadku wag skończonych (tj. funkcjonałów dodatnich) wzory (6.34) i (6.35) są bardzo elegancko udowodnione w pracy [SLW2].

7 Analityczne generatory grup izometrii przestrzeni Banacha

7.1 Jednparametrowe grupy i przedłużenia analityczne

Definicja 7.1.1 *Dualną parą przestrzeni Banacha nazywamy parę przestrzeni Banacha $(X, \mathcal{F})$ wraz z biliniowym funkcjonalem*

$$X \times \mathcal{F} \ni (x, \phi) \longmapsto \langle x, \phi \rangle \in \mathbb{C}$$

takim, że

$$\|x\| = \sup_{\|\phi\|=1} |\langle x, \phi \rangle|, \quad x \in X$$

oraz

$$\|\phi\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, \phi \rangle|, \quad \phi \in \mathcal{F}.$$

Stwierdzenie 7.1.2 ([CiZs] Prop. 1.2) *Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie dualną parą przestrzeni Banacha, $D \subset \mathbb{C}^N$ zbiorem otwartym, a $f: D \rightarrow X$ funkcją taką, że dla każdego $\phi \in \mathcal{F}$ funkcja*

$$D \ni z \longmapsto \langle f(z), \phi \rangle \in \mathbb{C}$$

jest holomorficzna. Wówczas f jest holomorficzna w topologii normowej na X .

Jeśli $(X, \mathcal{F})$ jest dualną parą przestrzeni Banacha, to odwzorowanie

$$\mathcal{F} \ni \phi \longmapsto \langle \cdot, \phi \rangle \in X^*$$

zadaje izomorfizm $\mathcal{F}$ z domkniętą podprzestrzenią X^* i możemy mówić o $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii na X .

Będziemy rozpatrywali operatory liniowe ciągłe w $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii na X . Operatory ciągłe w $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii i zdefiniowane na całej przestrzeni X nazywamy operatorami $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłymi. Zbiór wszystkich $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłych operatorów w X oznaczamy przez $B_{\mathcal{F}}(X)$.

Stwierdzenie 7.1.3 *Niech $T \in B_{\mathcal{F}}(X)$. Wówczas $T \in B(X)$.*

Dowód: Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów przestrzeni X zbieżnym do 0 w topologii normowej na X . Wówczas

$$\langle Tx_n, \phi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \phi \in \mathcal{F},$$

a więc na mocy twierdzenia Banacha-Steinhausa mamy

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|Tx_n\| < \infty,$$

a to z kolei implikuje ograniczoność T (patrz [Rud] Th. 1.32).

Q.E.D.

Niech S będzie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -gęsto zdefiniowanym, $\sigma(X, \mathcal{F})$ -domkniętym operatorem liniowym w X . Wówczas istnieje $\sigma(\mathcal{F}, X)$ -gęsto zdefiniowany, $\sigma(\mathcal{F}, X)$ -domknięty operator S^T w $\mathcal{F}$ dany przez

$$\left(\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in \text{Graph}(S^T) \right) \iff \left(\begin{array}{l} \langle Sx, \phi \rangle = \langle x, \psi \rangle \text{ dla} \\ \text{wszystkich } x \in D(S) \end{array} \right)$$

i mamy

$$\langle Sx, \phi \rangle = \langle x, S^T \phi \rangle, \quad x \in D(S), \quad \phi \in D(S^T).$$

Ponadto nietrudno wykazać, że jeśli $S \in B_{\mathcal{F}}(X)$, to $S^T \in B_X(\mathcal{F})$ (patrz [Scha] Cor. 7.1 i Sect. 2.1).

Definicja 7.1.4 *Mówimy, że dualna para przestrzeni Banacha $(X, \mathcal{F})$ ma własność Kreina, jeśli $\sigma(X, \mathcal{F})$ -domknięta powłoka wypukła dowolnego zbioru $\sigma(X, \mathcal{F})$ -zwartego jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -zarta.*

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Para (X, X^*) wraz z kanoniczną formą biliniową jest dualną parą przestrzeni Banacha mającą własność Kreina ([DuSc] Th. V.6.4). Podobnie para (X^*, X) jest dualną parą przestrzeni Banacha mającą własność Kreina (twierdzenie Alaoglu).

Twierdzenie 7.1.5 (Arveson) *Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie dualną parą przestrzeni Banacha mającą własność Kreina. Niech Ω będzie lokalnie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Niech $\Omega \ni \omega \mapsto x(\omega) \in X$ będzie $\sigma(x, \mathcal{F})$ -ciągłą i normowo ograniczoną funkcją. Załóżmy dalej, że μ jest zespoloną, regularną miarą borelowską na Ω o skończonej wariacji. Wówczas istnieje dokładnie jeden wektor $x \in X$ taki, że*

$$\langle x, \phi \rangle = \int_{\Omega} \langle x(\omega), \phi \rangle d\mu(\omega), \quad \phi \in \mathcal{F}.$$

Dowód: Załóżmy na początek, że Ω jest przestrzenią zwartą. Zdefiniujmy funkcjonal f na $\mathcal{F}$ wzorem:

$$f(\phi) = \int_{\Omega} \langle x(\omega), \phi \rangle d\mu(\omega), \quad \phi \in \mathcal{F}.$$

Funkcjonal f jest oczywiście elementem $\mathcal{F}^*$. Aby wykazać istnienie takiego wektora $x \in X$, że

$$f(\phi) = \langle x, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{F} \tag{7.1}$$

wystarczy wykazać, że f jest ciągły w topologii Mackey'a $\tau(\mathcal{F}, X)$ na $\mathcal{F}$, tj. topologii zadanej przez rodzinę półnorm $\{p_A\}_{A \in \mathcal{E}}$, gdzie $\mathcal{E}$ jest rodziną wszystkich niepustych, $\sigma(X, \mathcal{F})$ -zwartych, absolutnie wypukłych podzbiorów przestrzeni X , a dla $A \in \mathcal{E}$

$$p_A(\phi) = \sup_{x \in A} |\langle x, \phi \rangle|, \quad \phi \in \mathcal{F}$$

(patrz [Scha] Sect. 3.2).

Niech $C = \{x(\omega) : \omega \in \Omega\}$. C jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -zwartym podzbiorem X , a zatem zbiór $K = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1, x \in C\}$ także jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -zwarty. Ponieważ para $(X, \mathcal{F})$ ma własność Kreina, to absolutnie wypukły zbiór

$$A = \overline{\text{conv } K}^{\sigma(X, \mathcal{F})}$$

jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -zwarty. Teraz dla $\phi \in \mathcal{F}$ mamy

$$\begin{aligned} |f(\phi)| &= \left| \int_{\Omega} \langle x(\omega), \phi \rangle d\mu(\omega) \right| \leq \int_{\Omega} |\langle x(\omega), \phi \rangle| d|\mu|(\omega) \leq \|\mu\| \sup_{x \in C} |\langle x, \phi \rangle| \\ &= \|\mu\| \sup_{x \in K} |\langle x, \phi \rangle| \leq \|\mu\| \sup_{x \in A} |\langle x, \phi \rangle| = \|\mu\| p_A(\phi), \end{aligned}$$

a zatem f jest $\tau(\mathcal{F}, X)$ -ciągły i istnieje $x \in X$ spełniający (7.1). Jedyność takiego x wynika bezpośrednio z Definicji 7.1.1.

Jeśli przestrzeń Ω nie jest zwarta, to korzystając z regularności miary μ wybieramy ciąg jej zwartych podprzestrzeni $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $|\mu|(\Omega \setminus \Omega_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Definiujemy funkcjonały $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ na $\mathcal{F}$ przez

$$f_n(\phi) = \int_{\Omega_n} \langle x(\omega), \phi \rangle d\mu(\omega), \quad \phi \in \mathcal{F}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Powyżej udowodniliśmy, że istnieją wektory $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ w X takie, że

$$f_n(\phi) = \langle x_n, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{F}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pamiętając, że funkcja $\omega \mapsto x(\omega)$ jest normowo ograniczona nietrudno sprawdzić, że istnieje dodatnia stała D taka, że dla wszystkich ϕ

$$|\langle x_n, \phi \rangle - f(\phi)| \leq D \|\phi\| |\mu|(\Omega \setminus \Omega_n).$$

Tak więc

$$\begin{aligned} |\langle x_n - x_m, \phi \rangle| &= |\langle x_n, \phi \rangle - \langle x_m, \phi \rangle| = |\langle x_n, \phi \rangle - f(\phi) - (\langle x_m, \phi \rangle - f(\phi))| \\ &\leq D \|\phi\| (|\mu|(\Omega \setminus \Omega_n) + |\mu|(\Omega \setminus \Omega_m)) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$\|x_n - x_m\| = \sup_{\|\phi\|=1} |\langle x_n - x_m, \phi \rangle| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

czyli $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego, a oznaczając przez x jego granicę mamy oczywiście (7.1). Q.E.D.

Jak zwykle wektor x skonstruowany w Twierdzeniu 7.1.5 oznaczamy

$$x = \int_{\Omega} x(\omega) d\mu(\omega).$$

Definicja 7.1.6 Jednparametrową grupą w $B_{\mathcal{F}}(X)$ nazywamy rodzinę $U \stackrel{\text{ozn}}{=} \{U_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset B_{\mathcal{F}}(X)$ taką, że

$$\begin{aligned} U_0 &= id_X, \\ U_t U_s &= U_{t+s}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Grupę U nazywamy $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jeśli odwzorowanie $t \mapsto U_t x$ jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłe dla każdego $x \in X$. Z kolei U nazywamy grupą mocno ciągłą, jeśli odwzorowanie $t \mapsto U_t x$ jest ciągłe w topologii normowej na X dla wszystkich $x \in X$.

Rozważa się również klasyfikację jednparametrowych grup w $B_{\mathcal{F}}(X)$ ze względu na normy operatorów $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Grupę U nazywamy ograniczoną, jeśli

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U_t\| < \infty.$$

W dalszym ciągu będziemy zajmowali się jedynie grupami izometrii przestrzeni X , ale wszystkie rezultaty można bez przeszkód przenieść na inne grupy ograniczone. Dzięki Twierdzeniu 7.1.5 mamy następujące stwierdzenie (pojawiają się ono również w pracy [Arv] przy czym grupa $\mathbb{R}$ jest zastąpiona tam dowolną, lokalnie zwartą grupą topologiczną):

Stwierdzenie 7.1.7 Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie dualną parą przestrzeni Banacha mającą własność Kreina, niech U będzie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jednparametrową grupą izometrii w $B_{\mathcal{F}}(X)$. Niech μ będzie zespoloną, regularną miarą borelowską na $\mathbb{R}$ o skończonej wariacji. Wówczas wzór

$$Ax = \int_{\mathbb{R}} U_t x d\mu(t), \quad x \in X$$

definiuje operator ograniczony na X . Ponadto jeśli dualna para przestrzeni Banacha $(\mathcal{F}, X)$ ma własność Kreina, to $A \in B_{\mathcal{F}}(X)$.

Dowód: Odwzorowanie $X \ni x \mapsto Ax \in X$ jest liniowe, a ponadto mamy

$$\|Ax\| = \sup_{\|\phi\|=1} |\langle Ax, \phi \rangle| \leq \sup_{\|\phi\|=1} \int_{\Omega} |\langle U_t x, \phi \rangle| d|\mu|(t) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|U_t\| \|\mu\| \|x\|$$

czyli $A \in B(X)$.

Załóżmy teraz, że para $(\mathcal{F}, X)$ ma własność Kreina. Aby wykazać, że $A \in B_{\mathcal{F}}(X)$ wystarczy pokazać, że $A^T \phi$ jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągły dla każdego $\phi \in \mathcal{F}$ czyli w świetle punktu 1. Lematu 3.1.2, że dla każdego $\phi \in \mathcal{F}$ mamy $A^T \phi \in \mathcal{F}$. Ustalmy zatem $\phi \in \mathcal{F}$ i zastosujmy Twierdzenie 7.1.5 do $\sigma(\mathcal{F}, X)$ -ciągłej funkcji $\mathbb{R} \ni t \mapsto U_t^T \phi \in \mathcal{F}$ (można to zrobić, gdyż zakładamy, że dualna para przestrzeni Banacha $(\mathcal{F}, X)$ ma własność Kreina). Pokazuje ono, że istnieje dokładnie jeden wektor $\psi \in \mathcal{F}$ taki, że dla każdego $x \in X$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}} \langle x, U_t^T \phi \rangle d\mu(t) = \langle x, \psi \rangle.$$

Jest jasne, że $A^T \phi = \psi \in \mathcal{F}$, co przy dowolności ϕ daje nam $A \in B_{\mathcal{F}}(X)$. Q.E.D.

Podobnie jak w przypadku całkowania funkcji o wartościach w X przyjmujemy oznaczenie

$$A = \int_{\mathbb{R}} U_t d\mu(t).$$

Stwierdzenie 7.1.8 Niech $\sigma(X, \mathcal{F})$ -gęsto zdefiniowany, $\sigma(X, \mathcal{F})$ -domknięty operator liniowy S będzie taki, że $U_t S = S U_t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Wówczas jeśli oznaczymy

$$A = \int_{\mathbb{R}} U_t d\mu(t),$$

to $AS \subset SA$. W szczególności SA jest gęsto zdefiniowany i $AS = SA|_{D(S)}$.

Dowód: Mamy dla dowolnego $\phi \in D(S^T)$ i $x \in D(S)$

$$\begin{aligned} \langle ASx, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \langle U_t Sx, \phi \rangle d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle S U_t x, \phi \rangle d\mu(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle U_t x, S^T \phi \rangle d\mu(t) \\ &= \langle Ax, S^T \phi \rangle, \end{aligned}$$

co oznacza dokładnie tyle, że $Ax \in D(S^{TT}) = D(S)$ oraz $S^{TT}Ax = SAx = ASx$. Q.E.D.

Wniosek 7.1.9 Niech U będzie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jednoparametrową grupą izometrii w $B_{\mathcal{F}}(X)$ i niech

$$A = \int_{\mathbb{R}} U_t d\mu(t).$$

Wówczas

$$U_s A = \int_{\mathbb{R}} U_{t+s} d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} U_t d\mu(t-s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dowód: Na mocy Stwierdzenia 7.1.8 mamy $U_s A|_{D(U_s)} = A U_s$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$, ale $D(U_s) = X$ i w konsekwencji dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$U_s Ax = A U_s x = \int_{\mathbb{R}} R U_t U_s x d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} U_{t+s} x d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} U(t) x d\mu(t-s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Q.E.D.

Twierdzenie 7.1.10 Niech U będzie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jednoparametrową grupą izometrii w $B_{\mathcal{F}}(X)$ i niech $x \in X$. Wówczas istnieje ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f_n: \mathbb{R} \ni t \mapsto U_t x_n \in X$ ma przedłużenie do funkcji całkowitej $\mathbb{C} \rightarrow X$ i $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ w $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii. W szczególności zbiór X_{∞} elementów całkowitych dla U jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -gęsty w X .

Dowód: Zdefiniujmy

$$x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t x e^{-nt^2} dt.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i z $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłości U w 0 wynika, że ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do x w $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii. Z Wniosku 7.1.9 widzimy, że

$$U_s x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t x e^{-n(t-s)^2} dt, \quad s \in \mathbb{R},$$

a zatem funkcja całkowita

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t x e^{-n(t-z)^2} dt$$

jest rozszerzeniem funkcji $t \mapsto U_t x_n$ czyli x_n jest elementem całkowitym dla U dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

Uwaga 7.1.11 *Jeśli U jest mocno ciąglą grupą izometrii X , to elementy całkowite tworzą zbiór normowo gęsty w X .*

Zauważmy, że jeśli przedłużenie analityczne funkcji $t \mapsto U_t x$ istnieje, to jest ono tylko jedno, gdyż wszystkie funkcje rozszerzające $t \mapsto U_t x$ muszą pokrywać się na $\mathbb{R}$, a więc są sobie równe.

Dla $z \in \mathbb{C}_+$ zdefiniujmy operator $U_z: X \rightarrow X$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Graph}(U_z) \right) \iff \begin{pmatrix} \text{Funkcja } t \mapsto U_t x \text{ przedłuża się} \\ \text{do funkcji } f_x \text{ ciągłej na pasku} \\ D_{\text{Im } z} = \{w : 0 \leq \text{Im } w \leq \text{Im } z\}, \\ \text{holomorficznej na wnętrzu } D_{\text{Im } z} \\ \text{oraz } y = f_x(z) \end{pmatrix}.$$

Analogicznie definiujemy U_z dla $\text{Im } z < 0$:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Graph}(U_z) \right) \iff \begin{pmatrix} \text{Funkcja } t \mapsto U_t x \text{ przedłuża się} \\ \text{do funkcji } f_x \text{ ciągłej na pasku} \\ D_{\text{Im } z} = \{w : 0 \geq \text{Im } w \geq \text{Im } z\}, \\ \text{holomorficznej na wnętrzu } D_{\text{Im } z} \\ \text{oraz } y = f_x(z) \end{pmatrix}.$$

Jako, że przedłużenie analityczne funkcji $t \mapsto U_t x$ jest jednoznaczne, łatwo widzimy, że U_z jest operatorem liniowym, a Twierdzenie 7.1.10 gwarantuje, nam, że jest on ponadto $\sigma(X, \mathcal{F})$ -gęsto zdefiniowany. Z jednoznaczności przedłużenia analitycznego wynikają również następujące stwierdzenia:

$$1. \quad \left(x \in D(U_z) \right) \implies \begin{pmatrix} \text{Dla każdego } t \in \mathbb{R} \text{ mamy } U_t x \in D(U_z) \\ \text{oraz } U_z(U_t x) = U_{z+t} x \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ U_{z_1} x \in D(U_{z_2}) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \in D(U_{z_1+z_2}) \\ \text{oraz mamy} \\ U_{z_1+z_2} x = U_{z_2}(U_{z_1} x) \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Ad 1.: Wzór

$$D_{\text{Im } z} \ni z \longmapsto U_{t+z}x \in X$$

definiuje (jedyne) przedłużenie analityczne funkcji

$$\mathbb{R} \ni s \longmapsto U_s(U_t x) = U_{s+t}x.$$

Q.E.D.

Ad 2.: $U_{z_1}x \in D(U_{z_2})$ oznacza dokładnie tyle, że funkcja

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto U_t(U_{z_1}x) = U_{t+z_1}x$$

przedłuża się do funkcji ciągłej na $D_{\text{Im } z_2}$, holomorficznej we wnętrzu $D_{\text{Im } z_2}$. Wzór

$$D_{\text{Im } z_2} \ni z \longmapsto U_{z+z_1}x \quad (7.4)$$

definiuje takie przedłużenie. Ponadto widzimy, że funkcja

$$D_{\text{Im } z_2} \times D_{\text{Im } z_1} \ni (z, w) \longmapsto U_{z+w}x$$

jest (jako funkcja holomorficzna względem każdej zmiennej z osobna) holomorficzna względem zespołu zmiennych, a więc w szczególności funkcja

$$\{z + w : z \in D_{\text{Im } z_2}, w \in D_{\text{Im } z_1}\} \supset D_{z_1+z_2} \ni z \longmapsto U_z x$$

jest holomorficzna i $x \in D(U_{z_1+z_2})$. Ze wzoru (7.4) mamy

$$U_{z_1+z_2}x = U_{z_2}(U_{z_1}x).$$

Q.E.D.

Teraz możemy zdefiniować centralny obiekt niniejszego rozdziału

Definicja 7.1.12 Niech U będzie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jednoparametrową grupą izometrii w $B_{\mathcal{F}}(X)$. Analitycznym generatorem U nazywamy operator U_i .

Okazuje się, że analityczny generator grupy U jest operatorem $\sigma(X, \mathcal{F})$ -domkniętym (patrz [CiZs] Th. 2.4). Bardzo elegancki dowód tego faktu, korzystający z konstrukcji tak zwanej grupy transponowanej można znaleźć w [Z1] (Th. 1.1). Naszkicujemy dowód domkniętości U_i w topologii normowej:

Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(U_i)$ będzie ciągiem zbieżnym normowo do $x \in X$ i niech ciąg $\{U_i x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega normowo do $y \in X$. Dla każdego $z \in D_1$ korzystając z (7.2) i faktu, że U_t jest izometrią dla każdego $t \in \mathbb{R}$ dostajemy

$$\|U_z x_n - U_z x_m\| \leq \max\{\|x_n - x_m\|, \|U_i x_n - U_i x_m\|\},$$

a więc funkcje

$$D_1 \ni z \longmapsto U_z x_n$$

tworzą ciąg Cauchy'ego w normie "sup". Oznaczmy granicę tego ciągu przez F . Funkcja F jest oczywiście ciągła na D_1 i holomorficzna we wnętrzu D_1 , a ponadto skoro

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_t x_n = U_t x,$$

to $x \in D(U_i)$ i

$$U_i x = F(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_i x_n = y$$

co pokazuje, że operator U_i jest normowo domknięty.

7.2 Spektrum analitycznego generatora

Niech U będzie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jednoparametrową grupą izometrii w $B_{\mathcal{F}}(X)$. W tej części pracy zajmujemy się badaniem spektrum analitycznego generatora grupy U . Twierdzenie Stone'a nasuwa przypuszczenie, że spektrum U_i powinno zawierać się w $\mathbb{R}_+$, ale nie jest to prawda w ogólnym przypadku. Kontrprzykład można znaleźć w pracy [VD3]. Okazuje się nawet, że w interesujących nas głównie przypadkach, gdy X jest algebrą von Neumanna, a U w-ciągłą grupą automorfizmów X mamy zazwyczaj

$$\operatorname{Sp} U_i = \mathbb{C}$$

(patrz [ElZs]).

Ustalmy zatem dualną parę przestrzeni Banacha mającą własność Kreina $(X, \mathcal{F})$ taką, że para $(\mathcal{F}, X)$ również ma własność Kreina oraz $U = \sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jednoparametrową grupą izometrii w $B_{\mathcal{F}}(X)$. Rozważmy przestrzeń Banacha $\operatorname{Graph}(U_i) \subset X \times X$ oraz $\sigma(X, \mathcal{F})$ -domknięty operator $\Delta: \operatorname{Graph}(U_i) \rightarrow \operatorname{Graph}(U_i)$ dany przez

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \in D(\Delta), \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \right) \iff \left(\begin{matrix} x, x' \in D(U_i), \\ y = U_i x, \ y' = U_i x' \end{matrix} \right).$$

Będziemy też używać notacji macierzowej:

$$\Delta = \begin{pmatrix} U_i & 0 \\ 0 & U_i \end{pmatrix}.$$

Okazuje się, że mimo iż spektrum U_i może być całą płaszczyzną zespoloną, to mamy zawsze $\operatorname{Sp} \Delta \subset \mathbb{R}_+$. Aby to wykazać zdefiniujmy dla każdego $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ funkcję $F_\mu = F_\mu(t)$ wzorem:

$$F_\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{E(1+it)}}{(e^E + \mu)^2} dE = \frac{t(-\mu)^{it-1}}{e^{-2\pi t} - 1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Zauważmy, że przy ustalonym μ funkcja F_μ ma przedłużenie analityczne na zbiór $\mathbb{C} \setminus \{\pm ni : n \in \mathbb{N}\}$ i dla $0 \neq t$ w tym obszarze mamy

$$F_\mu(t - 2i) + 2\mu F_\mu(t - i) + \mu^2 F_\mu(t) = 0. \quad (7.5)$$

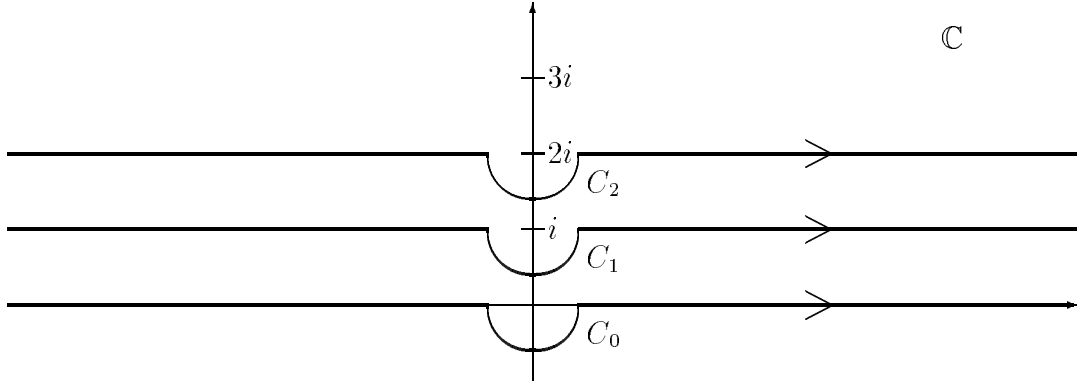
Wprowadźmy teraz operator liniowy $Q_\mu: X \rightarrow X$

$$Q_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\mu(t) U_t dt. \quad (7.6)$$

Funkcja F_μ jest z definicji odwrotną transformatą Fouriera funkcji klasy Schwartza, a więc sama też jest klasy Schwartza i w szczególności jest całkowalna, a zatem na mocy Stwierdzenia 7.1.7 Q_μ jest operatorem ograniczonym na X , a nawet $Q_\mu \in B_{\mathcal{F}}(X)$. Niech $x \in X_\infty$. Policzmy

$$\left. \begin{aligned} & (Q_\mu U_{2i} + 2\mu Q_\mu U_i + \mu^2 Q_\mu)x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_\mu(t) U_{t+2i} x dt + 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} F_\mu(t) U_{t+i} x dt + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_\mu(t) U_t x dt \\ &= \int_{C_0} F_\mu(t) U_{t+2i} x dt + 2\mu \int_{C_0} F_\mu(t) U_{t+i} x dt + \mu^2 \int_{C_0} F_\mu(t) U_t x dt \\ &= \int_{C_2} F_\mu(t - 2i) U_t x dt + 2\mu \int_{C_1} F_\mu(t - i) U_t x dt + \mu^2 \int_{C_0} F_\mu(t) U_t x dt, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

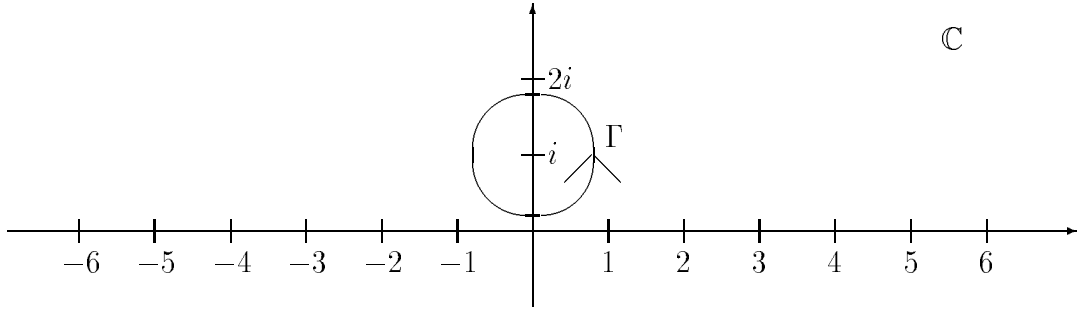
gdzie C_0, C_1 i C_2 są zorientowanymi konturami w $\mathbb{C}$, takimi jak na rysunku poniżej:



Teraz korzystając z (7.5) możemy odjąć 0 od prawej strony (7.7) i biorąc pod uwagę własności holomorficznosci funkcji podcałkowych otrzymamy

$$\begin{aligned}
& (Q_\mu U_{2i} + 2\mu Q_\mu U_i + \mu^2 Q_\mu)x \\
&= \int_{C_2} F_\mu(t-2i)U_t x dt + 2\mu \int_{C_1} F_\mu(t-i)U_t x dt + \mu^2 \int_{C_0} F_\mu(t)U_t x dt \\
&\quad - \left(\int_{C_2} F_\mu(t-2i)U_t x dt + 2\mu \int_{C_2} F_\mu(t-i)U_t x dt + \mu^2 \int_{C_2} F_\mu(t)U_t x dt \right) \\
&= 2\mu \int_{C_1-C_2} F_\mu(t-i)U_t x dt + \mu^2 \int_{C_0-C_2} F_\mu(t)U_t x dt \\
&= 2\mu \int_{\Gamma} F_\mu(t-i)U_t x dt + \mu^2 \int_{\Gamma} F_\mu(t)U_t x dt,
\end{aligned}$$

gdzie Γ jest zorientowanym konturem w $\mathbb{C}$, takim jak na rysunku poniżej:



Ponieważ funkcja $t \mapsto F_\mu(t-i)U_t x$ jest holomorficzna w pasku $\{z : 0 < \text{Im } z < 2\}$, mamy

$$2\mu \int_{\Gamma} F_\mu(t-i)U_t x dt = 0$$

i (7.7) przyjmuje postać

$$(Q_\mu U_{2i} + 2\mu Q_\mu U_i + \mu^2 Q_\mu)x = \mu^2 \int_{\Gamma} F_\mu(t)U_t x dt = \mu^2 2\pi i \text{Res}_{t=i} F_\mu(t)U_t x,$$

a przy tym funkcja $t \mapsto U_t x$ jest holomorficzna (a więc ciągła), a zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{t=i} F_\mu(t) U_t x &= \lim_{t \rightarrow i} (t - i) F_\mu(t) U_t x \\ &= \lim_{t \rightarrow i} (t - i) F_\mu(t) \lim_{t \rightarrow i} U_t x \\ &= \operatorname{Res}_{t=i} F_\mu(t) U_i x = \frac{-i}{\mu^2 2\pi} U_i x. \end{aligned}$$

Tym samym wykazaliśmy, że

$$(Q_\mu U_{2i} + 2\mu Q_\mu U_i + \mu^2 Q_\mu) x = U_i x, \quad x \in X_\infty. \quad (7.8)$$

Będziemy potrzebowali następującego lematu:

Lemat 7.2.1 *Zbiór X_∞ elementów całkowitych dla U jest istotną dziedziną dla U_i .*

Dowód: Niech $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Graph}(U_i)$. Pokażemy, że istnieje ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_\infty$ taki, że $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ oraz $U_i x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ w $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii. Istotnie: niech

$$x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t x e^{-nt^2} dt.$$

W dowodzie Twierdzenia 7.1.10 wykazaliśmy, że $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ w $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii.

Teraz korzystając ze Stwierdzenia 7.1.8 mamy

$$U_i x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} U_i \int_{-\infty}^{+\infty} U_t x e^{-nt^2} dt = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t U_i x e^{-nt^2} dt = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t y e^{-nt^2} dt$$

i ten sam argument pokazuje, że $U_i x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ w $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii. Q.E.D.

Na przestrzeni $X \times X$ wprowadźmy operator ograniczony

$$\widetilde{R}_\mu = \begin{pmatrix} -Q_\mu + \frac{1}{\mu} I & -\frac{1}{\mu} Q_\mu \\ \mu Q_\mu & Q_\mu \end{pmatrix}.$$

Ponieważ Q_μ jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągły, to $\widetilde{R}_\mu$ też jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągły. Pokażemy, że $\widetilde{R}_\mu$ zachowuje $\sigma(X, \mathcal{F})$ -domkniętą podprzestrzeń $\operatorname{Graph}(U_i) \subset X \times X$. Istotnie: niech $x \in X_\infty$. Mamy

$$\widetilde{R}_\mu \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q_\mu + \frac{1}{\mu} I & -\frac{1}{\mu} Q_\mu \\ \mu Q_\mu & Q_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-Q_\mu + \frac{1}{\mu} I - \frac{1}{\mu} Q_\mu U_i) x \\ (\mu Q_\mu + Q_\mu U_i) x \end{pmatrix}$$

Używając wzoru (7.8) otrzymujemy

$$U_i \left(-Q_\mu + \frac{1}{\mu} I - \frac{1}{\mu} Q_\mu U_i \right) x = \left(-Q_\mu U_i + \frac{1}{\mu} U_i - \frac{1}{\mu} Q_\mu U_{2i} \right) x = (\mu Q_\mu + Q_\mu U_i) x,$$

a to oznacza, że

$$\widetilde{R}_\mu \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix} \in \operatorname{Graph}(U_i).$$

Teraz na mocy Lematu 7.2.1 i $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłości $\widetilde{R}_\mu$ mamy

$$\widetilde{R}_\mu \text{Graph}(U_i) \subset \text{Graph}(U_i).$$

Możemy rozpatrywać zatem nowy $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągły operator

$$R_\mu = \widetilde{R}_\mu|_{\text{Graph}(U_i)}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\text{Graph}_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Graph}(U_i) : x, y \in X_\infty \right\}.$$

Na podstawie analogicznego rachunku do przeprowadzonego w dowodzie Lematu 7.2.1 nietrudno wykazać, że Graph_∞ jest istotną dziedziną dla Δ . Mamy nawet następujący, mocniejszy rezultat

Stwierdzenie 7.2.2 *Dla każdego $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(\Delta)$ istnieje ciąg $\{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Graph}_\infty$ taki, że*

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Lemat 7.2.3 *Dla każdego $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Graph}_\infty$ mamy*

$$\begin{aligned} (\Delta + \mu I)R_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ R_\mu(\Delta + \mu I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dowód: Policzmy

$$\begin{aligned} R_\mu(\Delta + \mu I) \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -Q_\mu + \frac{1}{\mu}I & -\frac{1}{\mu}Q_\mu \\ \mu Q_\mu & Q_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i x + \mu x \\ U_{2i} x + \mu U_i x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-Q_\mu U_i + \frac{1}{\mu}U_i - \mu Q_\mu + I - \frac{1}{\mu}Q_\mu U_{2i} - Q_\mu U_i)x \\ (\mu Q_\mu U_i + \mu^2 Q_\mu + Q_\mu U_{2i} + \mu Q_\mu U_i)x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\mu}(U_i - Q_\mu U_{2i} - 2\mu Q_\mu U_i - \mu^2 Q_\mu) + I\right)x \\ (Q_\mu U_{2i} + 2\mu Q_\mu U_i + \mu^2 Q_\mu)x \end{pmatrix} \stackrel{7.8}{=} \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Natomiast wzór

$$(\Delta + \mu I)R_\mu \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix}$$

wyprowadzamy tak samo, uprzednio korzystając ze Stwierdzenia 7.1.8. Q.E.D.

Lemat 7.2.4 *Mamy $R_\mu \text{Graph}(U_i) = D(\Delta)$.*

Dowód: Krok 1: “ $R_\mu \text{Graph}(U_i) \subset D(\Delta)$ ”. Weźmy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Graph}(U_i)$. Wówczas na mocy Lematu 7.2.1 istnieje ciąg $\{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

w produkcie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii. Dzięki $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłości R_μ mamy

$$R_\mu \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dalej patrząc na Lemat 7.2.3 mamy

$$(\Delta + \mu I) R_\mu \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

a więc z domkniętości operatora $(\Delta + \mu I)$

$$\begin{aligned} R_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\in D(\Delta + \mu I) = D(\Delta), \\ (\Delta + \mu I) R_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

W szczególności $R_\mu \text{Graph}(U_i) \subset D(\Delta)$.

Krok 2: “ $R_\mu \text{Graph}(U_i) \supset D(\Delta)$ ”. Niech $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(\Delta)$. Weźmy ciąg $\{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Graph}_\infty$ taki, jak w Stwierdzeniu 7.2.2. Z Lematu 7.2.3 mamy

$$R_\mu (\Delta + \mu I) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.12)$$

przy czym na mocy wzoru (7.9) prawa strona (7.12) dąży w produkcie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologii do $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, a lewa strona (7.12) dąży do $R_\mu (\Delta + \mu I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Zatem

$$R_\mu (\Delta + \mu I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

W szczególności $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R_\mu \text{Graph}(U_i)$ i w konsekwencji $R_\mu \text{Graph}(U_i) \supset D(\Delta)$. Q.E.D.

Biorąc pod uwagę Lemat 7.2.4 oraz wzory (7.8) i (7.13) otrzymujemy następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 7.2.5 *Operator R_μ jest rezolwentą operatora Δ w punkcie $-\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, to znaczy, że*

$$\text{dla każdego } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(\Delta) \text{ mamy } R_\mu (\Delta + \mu I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

oraz

$$\text{dla każdego } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Graph}(U_i) \text{ mamy } R_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(\Delta) \text{ i } (\Delta + \mu I) R_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wniosek 7.2.6 *Niech $(X, \mathcal{F})$ będzie dualną parą przestrzeni Banacha mającą własność Kreina taką, że dualna para przestrzeni Banacha $(\mathcal{F}, X)$ też ma własność Kreina. Niech U będzie $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jednoparametrową grupą izometrii w $B_{\mathcal{F}}(X)$ i niech U_i będzie jej analitycznym generatorem. Oznaczmy przez Δ amplifikację U_i na $\text{Graph}(U_i)$:*

$$\Delta = \begin{pmatrix} U_i & 0 \\ 0 & U_i \end{pmatrix}.$$

Wówczas

$$\text{Sp } \Delta \subset \mathbb{R}_+.$$

Ponadto rezolwenta operatora Δ w punkcie $-\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ dana jest wzorem

$$R(\Delta, -\mu) = R_\mu = \begin{pmatrix} -Q_\mu + \frac{1}{\mu}I & -\frac{1}{\mu}Q_\mu \\ \mu Q_\mu & Q_\mu \end{pmatrix},$$

gdzie operator $Q_\mu \in B_{\mathcal{F}}(X)$ dany jest przez (7.6).

7.3 Wzór Ciorănescu-Zsidó

W pracy [CiZs] Ioana Ciorănescu i László Zsidó udowodnili, że jeśli U jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągłą, jednoparametrową grupą izometrii w $B_{\mathcal{F}}(X)$, to dla każdego $t \in \mathbb{R}$ możemy wyznaczyć U_t używając jedynie analitycznego generatora grupy U . Innymi słowy analityczny generator determinuje grupę. W niniejszym podrozdziale wyprowadzimy ten sam wzór na U_t co Ciorănescu i Zsidó z tą różnicą, że dzięki Wnioskowi 7.2.6 będziemy używali jedynie operatorów ograniczonych.

Poniższy lemat został zainspirowany przez [Ped] Prop. 1.3.8.

Lemat 7.3.1 *Dla każdego $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ i dla każdego $\alpha \in \mathbb{C}$ takiego, że $0 < \text{Re } \alpha < 1$ mamy*

$$t^\alpha = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \mu^{\alpha-1} (t + \mu)^{-1} t d\mu. \quad (7.14)$$

Będziemy starali się wykorzystać wzór (7.14) podstawiając nieco zmodyfikowany operator Δ w miejsce t . Uzyskana w ten sposób “ułamkowa potęga” operatora Δ da nam w granicy $-i\alpha \rightarrow t \in \mathbb{R}$ operator U_t . Konstrukcja ta była już stosowana przez A. V. Balakrishnana w pracy [Bal], ale przy nieco mocniejszych założeniach.

Zauważmy, że przepisując definicję funkcji F_μ w następujący sposób:

$$F_\mu(t) = \frac{1}{\mu} \frac{t \mu^{it} e^{-\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}} = \frac{t \mu^{it-1}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}$$

łatwo otrzymamy tożsamość

$$\mu F_\mu(z) + F_\mu(z - i) = i \frac{\mu^{iz}}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} \quad (7.15)$$

dla z w obszarze holomorficzności F_μ .

Niech $\text{Pr}_1 : X \times X \rightarrow X$ będzie kanoniczną projekcją na pierwszą współrzędną. Weźmy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix} \in D(\Delta)$. Zajmiemy się wyrażeniem

$$\text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Pr}_1 R_\mu \Delta \begin{pmatrix} x \\ U_i x \end{pmatrix} = \mu Q_\mu x + Q_\mu U_i x.$$

Pamiętając, że dla każdego zespolonego z takiego, że $0 \leq \text{Im } z < 1$ mamy

$$\lim_{\substack{|t| \rightarrow \infty \\ t \in \mathbb{R}}} F_\mu(z + t) = 0$$

obliczamy

$$\left. \begin{aligned} \mu Q_\mu x + Q_\mu U_i x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu F_\mu(t) U_t x dt + \int_{-\infty}^{+\infty} F_\mu(t) U_{t+i} x dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu F_\mu(t) U_{t+i} x dt + \int_{i-\infty}^{i+\infty} F_\mu(\tau - i) U_\tau x d\tau \\ &= \int_{ir-\infty}^{ir+\infty} \mu F_\mu(z) U_z x dz + \int_{ir-\infty}^{ir+\infty} F_\mu(z - i) U_z x dz \\ &= \int_{ir-\infty}^{ir+\infty} (\mu F_\mu(z) + F_\mu(z - 1)) U_z x dz \stackrel{7.15}{=} \int_{ir-\infty}^{ir+\infty} \frac{i\mu^{iz} U_z x}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\mu^{i(t+ir)} U_{t+ir} x}{e^{\pi(t+ir)} - e^{-\pi(t+ir)}} dt = \mu^{-r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\mu^{it} U_t U_{ir} x}{e^{\pi(t+ir)} - e^{-\pi(t+ir)}} dt, \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

gdzie r jest dowolną liczbą z przedziału $]0, 1[$. Ponieważ $U_{ir} x \in X$, norma całki po prawej stronie (7.16) jest skończona dla każdego r , a więc dla każdego $r \in]0, 1[$ istnieje dodatnia stała C_r taka, że

$$\| \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| = \| \mu Q_\mu x + Q_\mu U_i x \| \leq \mu^{-r} C_r. \quad (7.17)$$

Rodzina oszacowań (7.17) zapewnia nam zbieżność całki Bochnera (patrz [Yos] Sect. V.5)

$$\int_0^{+\infty} \mu^{\alpha-1} \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d\mu, \quad (7.18)$$

gdzie α jest dowolną liczbą zespoloną taką, że $0 < \text{Re } \alpha < 1$. Istotnie: aby uzyskać zbieżność całki (7.18) w ∞ stosujemy (7.17) z $r > \text{Re } \alpha$, natomiast zbieżność (7.18) w 0 dostajemy z oszacowania (7.17) z $r < \text{Re } \alpha$. Tym samym wykazaliśmy, że operator liniowy

$$D(\Delta) \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \mu^{\alpha-1} \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d\mu \in X$$

jest dobrze zdefiniowany. Używając podstawienia $v = -iz$ możemy (7.16) przepisać tak:

$$\begin{aligned} \mu Q_\mu x + Q_\mu U_i x &= \int_{r+i\infty}^{r-i\infty} \frac{i\mu^{-v} U_{iv} x}{e^{i\pi v} - e^{-i\pi v}} i dv = - \int_{r+i\infty}^{r-i\infty} \frac{\mu^{-v} U_{iv} x}{e^{i\pi v} - e^{-i\pi v}} dv \\ &= \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{\mu^{-v} U_{iv} x}{e^{i\pi v} - e^{-i\pi v}} dv = \frac{1}{2i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{\mu^{-v} U_{iv} x}{\sin \pi v} dv. \end{aligned}$$

Teraz biorąc $\phi \in \mathcal{F}$ mamy

$$\begin{aligned}
\langle \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right), \phi \rangle &= \langle \mu Q_\mu x + Q_\mu U_i x, \phi \rangle \\
&= \frac{1}{2i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{\mu^{-v} \langle U_{iv} x, \phi \rangle}{\sin \pi v} dv \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi v} \mu^{-v} \langle U_{iv} x, \phi \rangle dv \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \mu^{-v} \left(\frac{\pi}{\sin \pi v} \langle U_{iv} x, \phi \rangle \right) dv
\end{aligned}$$

czyli odwzorowanie

$$\mathbb{R}_+ \ni \mu \longmapsto \langle \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right), \phi \rangle \in \mathbb{C} \quad (7.19)$$

jest odwrotną transformatą Mellina funkcji

$$\{z : 0 < \text{Re } z < 1\} \ni v \longmapsto \frac{\pi}{\sin \pi v} \langle U_{iv} x, \phi \rangle \in \mathbb{C}, \quad (7.20)$$

a ponadto na mocy [Doe] Kap. 6, §8, Satz 3 (7.20) jest transformatą Mellina (7.19) i w konsekwencji

$$\langle U_{iv} x, \phi \rangle = \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{+\infty} \mu^{v-1} \langle \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right), \phi \rangle d\mu$$

dla dowolnego $\phi \in \mathcal{F}$. Stąd

$$U_{iv} x = \frac{\sin \pi v}{\pi} \int_0^{+\infty} \mu^{v-1} \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) d\mu$$

dla każdego v takiego, że $0 < \text{Re } v < 1$. W szczególności dla $z \in \text{Int } D_1$

$$U_z x = \frac{\sin -i\pi z}{\pi} \int_0^{+\infty} \mu^{-iz-1} \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) d\mu$$

dla wszystkich $x \in \text{Pr}_1 D(\Delta) = D(U_{2i})$, a ponadto

$$U_t x = \lim_{\substack{\text{Im } z > 0 \\ z \rightarrow t}} \frac{\sin -i\pi z}{\pi} \int_0^{+\infty} \mu^{-iz-1} \text{Pr}_1(\Delta + \mu I)^{-1} \Delta \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) d\mu. \quad (7.21)$$

Równanie (7.21) wyznacza całkowicie operator U_t , gdyż na mocy Twierdzenia 7.1.10 zbiór $D(U_{2i})$ jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -gęsty w X . Wzór (7.21) nosi nazwę wzoru Ciorănescu-Zsidó. Po raz pierwszy pojawił się on (w nieco innej formie) w pracy [CiZs] (Th. 4.2).

W przypadku gdy grupa U jest mocno ciągła (co na przykład ma miejsce gdy U jest $\sigma(X, \mathcal{F})$ -ciągła i $\mathcal{F} = X^*$) możemy wszystkie wyniki rozdziału 7 przepisać zastępując $\sigma(X, \mathcal{F})$ -topologię topologią normową (patrz Uwaga 7.1.11).

Należy również wspomnieć, że dzięki wynikom zawartym w pracy [Z2] teoria analitycznych generatorów jednoparametrowych grup izometrii przestrzeni Banacha znalazła zastosowanie w teorii grup kwantowych (patrz [SLW3], [SLW4]).

8 Analityczny generator grupy automorfizmów modularnych

8.1 Funkcjonały normalne

W dowodzie Twierdzenia 4.1.3 wspomnieliśmy, że każdy w-ciągły funkcjonal dodatni jest normalny. Okazuje się, że jest zachodzi również twierdzenie odwrotne, mianowicie jeśli ϕ jest dodatnim funkcjonalem na algebrze von Neumanna $M \subset B(H)$, to mamy

$$\left(\begin{array}{c} \phi \text{ jest} \\ \text{normalny} \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \phi \text{ jest} \\ \text{w-ciągły} \end{array} \right) \quad (8.1)$$

(patrz np. [Sak] Th. 1.13.2). Dalej można udowodnić, że każdy w-ciągły funkcjonal na M jest kombinacją liniową czterech w-ciągłych funkcjonali dodatnich (patrz [Sak] Th. 1.14.3), a więc uzasadnione jest nazywanie wszystkich elementów M_* funkcjonalami normalnymi. Korzystając ze wzoru (8.1) widzimy, że dla wszystkich $\phi \in M_*$ mamy

$$\phi \left(\sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(a_\lambda), \quad (8.2)$$

gdzie $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset M_+$ jest dowolnym wzrastającym, normowo ograniczonym ciągiem uogólnionym. Ponadto równość (8.2) może służyć jako równoważna charakteryzacja elementów M_* (patrz [Ped] Sect. 3.6.1).

Nietrudno udowodnić, że odwzorowania $a \mapsto a^*$, $a \mapsto ab$ i $a \mapsto ba$ dla $a, b \in M$ są w-ciągłe, a korzystając z tego możemy wprowadzić na M_* strukturę $*$ -bimodułu nad M . W części 3.4 wprowadziliśmy operację sprzęgania funkcjonali:

$$\begin{aligned} M_* \ni \psi &\longmapsto \psi^* \in M_*, \\ \psi^*(a) &= \overline{\psi(a^*)}, \quad a \in M. \end{aligned}$$

Mnożenie funkcjonali normalnych przez elementy M definiujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (a\psi)(c) &= \psi(ca), & a, c \in M, \\ (\psi b)(c) &= \psi(bc), & b, c \in M. \end{aligned}$$

dla $\psi \in M_*$. Łatwo się przekonać, że M_* staje się ze zdefiniowanymi wyżej działaniami $*$ -bimodułem nad M czyli, że dla $a, b \in M$ i $\phi, \psi \in M_*$ mamy

$$\begin{aligned} a(\phi + \psi) &= a\phi + a\psi, \\ (a + b)\psi &= a\psi + b\psi, \\ (ab)\psi &= a(b\psi), \\ (a\psi)^* &= \psi^* a^*, \\ I\phi &= \phi. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Dzięki wzorowi (8.3) mamy oczywiście analogiczne wzory dla mnożenia funkcjonałów z prawej strony przez elementy algebry M .

Niech ϕ będzie funkcjonałem normalnym, dodatnim na M . Zbiór

$$N_\phi = \{a \in M : \phi(a^*a) = 0\}$$

jest w-domkniętym lewym ideałem w M , a więc na mocy [StZs] Cor. 3.21 istnieje rzut $p \in M$ taki, że $N_\phi = Mp$. Rzut $s(\phi) = I - p$ nazywamy *nośnikiem funkcjonału* ϕ . Mamy

$$s(\phi)\phi = \phi s(\phi) = \phi.$$

Okazuje się, że p jest największym (w sensie relacji “ $\leq$ ”) rzutem spośród wszystkich takich rzutów q , że $\phi(q) = 0$ (patrz [Sak] Sect. 1.14). Dla dowolnego elementu $\psi \in M_*$ definiujemy następujące obiekty:

$$\begin{aligned} L_\psi &= \{a \in M : a\psi = 0\}, \\ R_\psi &= \{a \in M : \psi a = 0\}. \end{aligned}$$

L_ψ i R_ψ są w-domkniętymi podzbiórmi M , a ponadto L_ψ jest lewym, a R_ψ prawym ideałem w M . Istnieją zatem rzuty $p_L, p_R \in M$ takie, że

$$\begin{aligned} L_\psi &= Mp_L, \\ R_\psi &= p_RM. \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku funkcjonałów dodatnich p_L i p_R są największymi rzutami w M spośród takich rzutów q , że odpowiednio $q\psi = 0$ i $\psi q = 0$. Dalej definiujemy *lewy nośnik funkcjonału* ψ jako $l(\psi) = I - p_L$ i *prawy nośnik funkcjonału* ψ jako $r(\psi) = I - p_R$. Oczywiście zachodzą wzory

$$\begin{aligned} l(\psi)\psi &= \psi, \\ \psi r(\psi) &= \psi. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ze wzoru (8.3) wynika, że $l(\psi) = r(\psi^*)$.

Stwierdzenie 8.1.1 *Niech $\psi \in M_*$ będzie funkcjonałem dodatnim. Wówczas*

$$l(\psi) = r(\psi) = s(\psi).$$

Dowód: Wystarczy wykazać, że $l(\psi) = s(\psi)$ czyli, że

$$p_L = I - l(\psi) = I - s(\psi) = p.$$

Mamy

$$\psi(p_L) = (p_L\psi)(I) = 0,$$

a więc $p_L \leq p$, a z drugiej strony

$$|(p\psi)(a)|^2 = |\psi(ap)|^2 \leq \psi(a^*a)\psi(p) = 0$$

dla wszystkich $a \in M$, a więc $p \leq p_L$.

Q.E.D.

Lewe i prawe nośniki można również definiować dla operatorów. Niech $a \in M$. oznaczmy przez $n(a)$ rzut na $\ker a$. Dalej zdefiniujemy *prawy nośnik operatora a* jako $r(a) = I - n(a)$, natomiast *lewy nośnik operatora a* zdefiniujemy jako rzut na $\overline{aH}$ i oznaczmy przez $l(a)$. Ponieważ $n(a) = \chi(|a| = 0)$, a $l(a) = r(a^*)$ widzimy, że

$$n(a), l(a), r(a) \in M.$$

W 1958 roku Shôichirô Sakai udowodnił następujące, ważne twierdzenie pozwalające sprowadzić wiele zagadnień dotyczących funkcyjałów normalnych do badania funkcyjałów normalnych, dodatnich:

Twierdzenie 8.1.2 ([Sak] Th. 1.14.4) *Niech ψ będzie funkcyjałem normalnym na algebrze von Neumanna M . Wówczas istnieje dokładnie jedna para (v, ϕ) złożona z częściowej izometrii (patrz [AkGl] §41) i funkcyjału normalnego, dodatniego taka, że*

$$\begin{aligned}\psi &= v\phi, \\ v^*v &= s(\phi).\end{aligned}$$

Przez analogię do twierdzenia o rozkładzie biegunowym dla operatorów domkniętych Twierdzenie 8.1.2 nazywamy twierdzeniem o rozkładzie biegunowym dla funkcyjałów normalnych. Parę (v, ϕ) taką, że $\psi = v\phi$ i $v^*v = s(\phi)$ nazywamy odpowiednio fazą i wartością bezwzględną funkcyjału ψ . Używamy również oznaczenia $\phi = |\psi|$.

Niech ψ będzie funkcyjałem normalnym na M i niech $\psi = v|\psi|$ będzie jego rozkładem biegunowym. Wówczas na mocy [Dix2] Ch. 4 Prop. 6 mamy $\psi^* = v^*|\psi^*|$. Udowodnimy teraz kilka łatwych lematów.

Lemat 8.1.3 *Niech ϕ będzie wiernym funkcyjałem normalnym, dodatnim na M i niech $a \in M$. Wówczas*

$$(a\phi = 0) \iff (a = 0).$$

Dowód: “ $\Rightarrow$ ”. Jeśli $a\phi = 0$, to $\phi(a^*a) = (a\phi)(a^*) = 0$, co na mocy wierności ϕ implikuje $a = 0$. Q.E.D.

Lemat 8.1.4 *Niech a będzie odwracalnym elementem M i niech ϕ będzie wiernym funkcyjałem normalnym, dodatnim na M . Niech*

$$a\phi = u|a\phi| \tag{8.4}$$

będzie rozkładem biegunowym $a\phi$. Wówczas u jest operatorem unitarnym.

Dowód: Pomnóżmy obie strony (8.4) z lewej strony przez $(I - uu^*)$. Ponieważ u jest częściową izometrią, mamy $uu^*u = u$, a więc

$$(I - uu^*)a\phi = 0$$

i na mocy Lematu 8.1.3

$$(I - uu^*)a = 0. \tag{8.5}$$

Mnożąc obie strony (8.5) z prawej przez a^{-1} otrzymujemy

$$uu^* = I. \quad (8.6)$$

Teraz mnożąc obie strony równania

$$(a\phi)^* = \phi a^* = u^*|\phi a^*|$$

z prawej przez a^{*-1} , a z lewej przez $(I - u^*u)$ i pamiętając o tym, że $u^*uu^* = u^*$ otrzymujemy

$$(I - u^*u)\phi = 0$$

i korzystając ponownie z Lematu 8.1.3 dostajemy

$$u^*u = I,$$

co w zestawieniu z (8.6) daje tezę.

Q.E.D.

Stwierdzenie 8.1.5 *Niech ϕ będzie normalnym funkcjonałem dodatnim, wiernym na M . Wówczas*

$$l(a\phi) = l(a)$$

Dowód: Wiemy, że $l(a\phi) = I - p_L$, gdzie p_L jest największym rzutem takim, że $p_L a \phi = 0$. Z Lematu 8.1.3 widzimy zatem, że p_L jest największym takim rzutem, że $p_L a = 0$ czyli, że $a^* p_L = 0$. Stąd $p_L = n(a^*)$ i otrzymujemy

$$l(a\phi) = I - p_L = I - n(a^*) = r(a^*) = l(a).$$

Q.E.D.

8.2 Pewien podzbiór $M \times M$

Niech ϕ będzie wiernym stanem normalnym na algebrze von Neumanna M . Będziemy rozważać zbiór

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M \times M : a\phi = \phi b \right\}.$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{Pr}_1 G, \\ \mathcal{B} &= \text{Pr}_2 G. \end{aligned}$$

Z Lematu 8.1.3 wynika natychmiast następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 8.2.1 *G jest wykresem w-domkniętego odwzorowania liniowego $M \rightarrow M$ o zerowym jądrze. Mamy $D(\sigma) = \mathcal{A}$ oraz $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.*

Z faktu, że M_* jest $*$ -bimodulem nad M wynika również

Stwierdzenie 8.2.2 $\mathcal{A}$ jest podalgebrą w M zawierającą centrum $Z(M)$ i dla $a, b \in \mathcal{A}$ mamy

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b).$$

Ponadto dla każdego $a \in \mathcal{A}$ mamy $\sigma(a)^* \in \mathcal{A}$

$$\sigma(\sigma(a)^*) = a^*.$$

W szczególności $\mathcal{A}$ jest algebrą z inwolucją daną przez

$$\mathcal{A} \ni a \longmapsto a^\# = \sigma(a)^* \in \mathcal{A}.$$

Wniosek 8.2.3 Mamy $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$. W szczególności $\mathcal{B}$ także jest algebrą z inwolucją daną przez $\mathcal{B} \ni b \mapsto b^\sharp = ((b^*)^\#)^* \in \mathcal{B}$.

Lemat 8.2.4 Niech $a \in \mathcal{A}$ i niech a będzie odwracalny w M . Niech $\sigma(a)$ również będzie odwracalny w M . Wówczas $a^{-1} \in \mathcal{A}$ oraz $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$.

Dowód: Pomnóżmy obie strony równania

$$a\phi = \phi\sigma(a)$$

z lewej strony przez a^{-1} , a z prawej przez $\sigma(a)^{-1}$. Otrzymujemy

$$a^{-1}\phi = \phi\sigma(a)^{-1}$$

czyli $a^{-1} \in \mathcal{A}$ i $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$.

Q.E.D.

Wprowadźmy oznaczenie V na zbiór elementów dodatnich w $*$ -algebrze $\mathcal{A}$:

$$V = \{a^\#a : a \in \mathcal{A}\}.$$

Z tożsamości polaryzacyjnej

$$a^\#b = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k (b - i^k a)^\# (b - i^k a)$$

łatwo wnioskujemy, że

$$\mathcal{A} = \text{span } V.$$

Przyjmijmy, również oznaczenie

$$W = \{a \in M : a\phi \geq 0\}.$$

Ponieważ funkcjonały dodatnie są samosprężone, mamy $W \subset \mathcal{A}$ oraz $\sigma(a) = a^*$ dla każdego $a \in W$.

Stwierdzenie 8.2.5 Mamy $V \subset W$. Ponadto dla każdego $a \in \mathcal{A}$ mamy

$$\begin{aligned} a^\#Va &\subset V, \\ a^\#Wa &\subset W. \end{aligned}$$

Dowód: Niech $a = b^\# b$ dla pewnego $b \in \mathcal{A}$. Mamy

$$a\phi = b^\# b\phi = \sigma(b)^* b\phi = \sigma(b)^* \phi \sigma(b) \geq 0$$

jako, że $\phi \geq 0$. Druga część tezy wynika z prostych algebraicznych własności V i z faktu, że jeśli $a\phi \geq 0$, to

$$b^\# a b\phi = \sigma(b)^* a\phi \sigma(b) \geq 0.$$

Q.E.D.

Zauważmy, że W jest stożkiem w $\mathcal{A}$ o tej własności, że $W \cap (-W) = \{0\}$. Ponadto jako, że $V \subset W$ mamy $\mathcal{A} = \text{span } W$.

Stwierdzenie 8.2.6 *Niech a będzie odwracalnym elementem M . Wówczas istnieje operator unitarny $u \in M$ taki, że*

$$u^* a, (u^* a)^{-1} \in W. \quad (8.7)$$

Dowód: Niech

$$a\phi = u|a\phi| \quad (8.8)$$

będzie rozkładem biegunowym $a\phi$. Na mocy Lematu 8.1.4 u jest unitarny. Mnożąc obie strony (8.8) z lewej przez u^* widzimy, że

$$u^* a \in \mathcal{A}, \quad \sigma(u^* a) = a^* u.$$

Ponadto $u^* a\phi = |a\phi| \geq 0$, więc $u^* a \in W$. Ponieważ $u^* a$ oraz $a^* u$ są odwracalne w M , na mocy Lematu 8.2.4 mamy $(u^* a)^{-1} \in \mathcal{A}$. Zauważmy, że jeśli b jest takim elementem odwracalnym, że $b\phi \geq 0$, to $b\phi = (b\phi)^* = \phi b^* \geq 0$ i

$$b^{-1}\phi = b^{-1}\phi b^*(b^*)^{-1} = b^{-1}\phi b^*(b^{-1})^* \geq 0.$$

Tak więc postawiając $b = u^* a$ otrzymujemy (8.7).

Q.E.D.

Metoda konstrukcji elementów $W \subset \mathcal{A}$ użyta w dowodzie Stwierdzenia 8.2.6 nie wymaga aby a był operatorem odwracalnym. Istotnie: niech a będzie dowolnym elementem M . Niech

$$a\phi = v|a\phi| \quad (8.9)$$

będzie rozkładem biegunowym $a\phi$. Wówczas mnożąc obie strony (8.9) z lewej przez v^* otrzymujemy

$$v^* a\phi = v^* v|a\phi| = s(|a\phi|)|a\phi| = |a\phi| \geq 0.$$

Oznacza to, że dla dowolnego $a \in M$ znajdziemy częściową izometrię v taką, że $v^* a \in W \subset \mathcal{A}$. Do tego zauważmy, że mnożąc obie strony (8.9) z lewej przez $(I - vv^*)$ otrzymujemy

$$(a - vv^* a)\phi = (v - vv^* v)\phi = 0,$$

a więc na mocy Lematu 8.1.3

$$a = vv^* a. \quad (8.10)$$

W szczególności oznaczając $a_W = v^* a$ mamy

$$a = v a_W,$$

gdzie a_W jest elementem ze stożka W .

Twierdzenie 8.2.7 *Niech a będzie dowolnym elementem M . Wówczas istnieje dokładnie jedna para (v, a_W) złożona z częściowej izometrii i elementu stożka W taka, że*

$$\left. \begin{aligned} a &= v a_W, \\ v^* v &= l(a_W), \\ v v^* &= l(a). \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Dowód: Udowodniliśmy już, że każdy element $a \in M$ ma przedstawienie postaci

$$a = v a_W,$$

gdzie $a_W = v^* a \in W$, a v jest częściową izometrią występującą w rozkładzie biegunowym

$$a\phi = v|a\phi|.$$

Ze Stwierdzeń 8.1.1 i 8.1.5 wiemy, że

$$v^* v = s(|a\phi|) = l(|a\phi|) = l(v^* a\phi) = l(v^* a) = l(a_W).$$

Tak jak już wspomnieliśmy w części 8.1 [Dix2] Ch. 4, Prop. 6 mówi nam, że jeśli v jest fazą w rozkładzie biegunowym pewnego $\psi \in M_*$, to fazą w rozkładzie biegunowym ψ^* jest v^* . Tak więc

$$v v^* = s(|(a\phi)^*|) = s(|\phi a^*|)$$

Równanie (8.10) oznacza, że $v v^* \geq l(a)$, ale z drugiej strony wiemy, że

$$v v^* = s(|\phi a^*|) = I - p,$$

gdzie p jest największym rzutem spośród wszystkich takich rzutów q , że

$$|\phi a^*|(q) = 0.$$

Ponieważ mamy

$$\phi a^* = v^* |\phi a^*|,$$

to oczywiście

$$|\phi a^*| = v \phi a^*.$$

Policzmy teraz

$$|\phi a^*|(n(a^*)) = (v \phi a^*)(n(a^*)) = \phi(a^* n(a^*) v) = 0,$$

a zatem $n(a^*) \leq p$. Oznacza to, że

$$l(a) = r(a^*) = I - n(a^*) \geq I - p = v v^*,$$

a więc $l(a) = v v^*$.

Dla dowodu jednoznaczności rozkładu (8.11) załóżmy, że $a \in M$ ma przedstawienie

$$a = \tilde{v} \tilde{a}_W, \quad (8.12)$$

takie, że $\widetilde{a_W} \in W$ oraz

$$\begin{aligned}\widetilde{v}^* \widetilde{v} &= l(\widetilde{a_W}), \\ \widetilde{v} \widetilde{v}^* &= l(a).\end{aligned}$$

Mnożąc obie strony (8.12) z lewej przez $\widetilde{v}^*$ otrzymujemy

$$\widetilde{v}^* a = \widetilde{a_W} \in W.$$

Stąd

$$\psi = \widetilde{v}^* a \phi = \widetilde{a_W} \phi \geq 0,$$

a ponieważ $\widetilde{v} \widetilde{v}^* = l(a)$, to pomnożenie obu stron równania

$$\psi = \widetilde{v}^* a \phi$$

z lewej przez $\widetilde{v}$ daje

$$a \phi = \widetilde{v} \psi, \tag{8.13}$$

przy czym $\psi \geq 0$, a ze Stwierdzeń 8.1.5 i 8.1.1 wynika, że

$$\widetilde{v}^* \widetilde{v} = l(\widetilde{a_W}) = l(\widetilde{v}^* a) = l(\widetilde{v}^* a \phi) = s(\widetilde{v}^* a \phi) = s(\psi)$$

czyli (8.13) jest rozkładem biegunowym funkcjonału $a \phi$. Z jednoznaczności rozkładu biegunowego dla funkcjonałów normalnych wynika, że $\widetilde{v} = v$ i w konsekwencji $\widetilde{a_W} = \widetilde{v}^* a = v^* a = a_W$. Q.E.D.

Przez analogię z twierdzeniem o rozkładzie biegunowym dla operatorów, rozkład (8.11) nazywamy *uogólnionym rozkładem biegunowym* (por. [SLW1] Sect. 3).

Zauważmy, że operacja “*” pozwala traktować równoważnie nie tylko algebry $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ (patrz Stwierdzenie 8.2.2 i Wniosek 8.2.3), ale również ich bardziej skomplikowaną strukturę. W szczególności

$$\begin{aligned}V^* &= \{\sigma(b^*)b : b \in \mathcal{B}\}, \\ W^* &= \{b \in M : \phi b \geq 0\}.\end{aligned}$$

Możemy łatwo zdualizować Stwierdzenie 8.2.5 jak i Twierdzenie 8.2.7, które przyjmuje następującą postać:

Twierdzenie 8.2.8 *Niech a będzie dowolnym elementem M . Wówczas istnieje dokładnie jedna para (u, a_W^*) złożona z częściowej izometrii i elementu stożka $W^* \subset \mathcal{B}$ taka, że*

$$\begin{aligned}a &= a_W^* u, \\ u u^* &= r(a_W^*), \\ u^* u &= r(a).\end{aligned}$$

Twierdzenie 8.2.7 mówi, że stożek W ma dużo elementów, a można nawet wykazać, że istnieje bijekcja $M_+ \leftrightarrow W$ zachowująca normę. Udowodnimy stwierdzenie nakładające pewne więzy na “rozmiar” W .

Lemat 8.2.9 Niech A będzie C^* -algebrą i niech $a \in A$. Wówczas istnieją elementy dodatnie $a_1^+, a_1^-, a_2^+, a_2^- \in A$ takie, że

$$a = a_1^+ - a_1^- + i(a_2^+ - a_2^-) \quad (8.14)$$

oraz

$$a_k^+ a_k^- = a_k^- a_k^+ = 0 \quad (8.15)$$

dla $k = 1, 2$.

Dowód: Połóżmy

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2}(a + a^*), \\ h_2 &= \frac{1}{2i}(a - a^*). \end{aligned}$$

Wówczas h_1 i h_2 są samosprężone i

$$a = h_1 + ih_2.$$

Teraz dla $k = 1, 2$ niech

$$a_k^+ = f_+(h_k), \quad a_k^- = f_-(h_k),$$

gdzie $f_+(t) = \max\{t, 0\}$, a $f_-(t) = -\min\{t, 0\}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Z łatwością sprawdzamy, że zachodzą związki (8.14) i (8.15). Q.E.D.

Stwierdzenie 8.2.10 Stożek dualny do W

$$W^\circ = \{\psi \in M_* : \psi(a) \geq 0 \text{ dla wszystkich } a \in W\}$$

rozdziela punkty M .

Dowód: Wystarczy udowodnić, że dla każdego niezerowego $a \in M$ istnieje funkcjonal $\psi \in W^\circ$ taki, że $\psi(a) \neq 0$. Zauważmy, że dla dowolnego $b \in M_+$ mamy $\phi b \in W^\circ$. Weźmy zatem dowolny niezerowy element $a \in M$. Na mocy Lematu 8.2.9 możemy zapisać

$$a^* = a_1^+ - a_1^- + i(a_2^+ - a_2^-),$$

gdzie $a_k^\pm \in M_+$. Jeśli $(\phi b)(a) = 0$ dla wszystkich $b \in M_+$, to w szczególności $(\phi a_k^\pm)(a) = 0$ dla $k = 1, 2$. Stąd

$$\phi(a^*a) = (\phi a_1^+)(a) - (\phi a_1^-)(a) + i((\phi a_2^+)(a) - (\phi a_2^-)(a)) = 0$$

i na mocy wierności ϕ mamy $a = 0$, co stoi w sprzeczności z wyborem a . Q.E.D.

Stwierdzenia 8.2.2, 8.2.5, 8.2.6 i 8.2.10 mówią, że algebra z inwolucją $\mathcal{A}$ i zawarty w niej stożek W spełniają założenia głównego twierdzenia ogłoszonego w pracy [Z2]. Twierdzenie to gwarantuje nam istnienie jednoparametrowej, w-ciągłej grupy σ_t *-automorfizmów algebry M takiej, że

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= D(\sigma_i), \\ W &= \{\sigma_i(a)^*a : a \in D(\sigma_i)\}, \end{aligned}$$

gdzie σ_i jest analitycznym generatorem grupy σ_t . Nietrudno udowodnić ([Z2]), że dla dowolnej jednoparametrowej grupy $*$ -automorfizmów algebry von Neumanna dziedziną jej analitycznego generatora jest algebra, a sam analityczny generator jest odwzorowaniem mnożącym. Widzimy stąd, że operacja “ $*$ ” i operator σ_i pokrywają się na zbiorze W . Ponieważ dla wszystkich $a \in W$ jest $\sigma(a) = a^*$, mamy

$$\sigma(a) = \sigma_i(a), \quad a \in W,$$

zatem skoro $\mathcal{A} = \text{span } W$, to $\sigma = \sigma_i$. Oznacza to, że dla dowolnych elementów $a \in D(\sigma_i)$, $b \in M$ mamy

$$\phi(ba) = (a\phi)(b) = (\phi\sigma(a))(b) = (\phi\sigma_i(a))(b) = \phi(\sigma_i(a)b),$$

a stąd już łatwo wynika, że para (ϕ, σ_t) spełnia warunek KMS. Teraz na mocy Twierdzenia 4.3.5 mamy $\sigma_t = \sigma_t^\phi$, tj. grupa σ_t jest grupą automorfizmów modularnych algebry M wyznaczoną przez stan ϕ .

Należy wspomnieć jednak, że dowód twierdzenia ogłoszonego w pracy [Z2] nie został jeszcze nigdzie opublikowany. Naturalną drogą do uzyskania tego wyniku wydaje się być wykorzystanie wzoru (7.21). Niestety autorowi nie udało się udowodnić zacytowanego wyżej twierdzenia. Poważne trudności napotykamy już przy próbie wykazania, że operator σ jest w-gęsto zdefiniowany.

9 Podziękowania

Autor pragnąłby wyrazić podziękowania profesorowi S. L. Woronowiczowi za nieocenioną pomoc w doborze tematu pracy i w jej przygotowaniu. Chciałby także podziękować profesorowi László Zsidó za udostępnienie wielu materiałów i poświęcenie czasu na kilkukrotne konsultacje oraz profesorom Kazimierzowi Napiórkowskiemu, Wiesławowi Puszowi, Przemysławowi Wojtaszczykowi i Janowi Derezińskiemu za liczne dyskusje i uwagi.

Literatura

- [AkGl] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman: Theory of linear operators in Hilbert space; Pitman Publishing, Boston, London, Melbourne 1981.
- [Arv] W. Arveson: On groups of automorphisms of operator algebras; J. Funct. Analysis 15 (1974), pp. 217-243.
- [Bal] A. V. Balakrishnan: Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them; Pac. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.
- [Bra] O. Bratelli, D. Robinson: Operator algebras and Quantum statistical mechanics; Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1979.
- [CiZs] I. Ciorănescu, L. Zsidó: Analytic generators for one-parameter groups; Tohoku Math. J. 28 (1976) pp. 327-362.
- [Con] A. Connes: The Tomita-Takesaki theory and classification of type-III factors; Proc. Int. School Phys. "Enrico Fermi" 1973, Ital. Phys. Soc. Publ. Bologna 1976.
- [VD1] A. Van Daele: The Tomita-Takesaki theory for von Neumann algebras with a separating and cyclic vector; Proc. Int. School Phys. "Enrico Fermi" 1973, Ital. Phys. Soc. Publ. Bologna 1976.
- [VD2] A. Van Daele: A new approach to the Tomita-Takesaki theory of generalized Hilbert algebras; J. Funct. Analysis 15 (1974) pp. 378-393.
- [VD3] A. Van Daele: On the spectrum of the analytic generator; Math. Scand. 37 (1975) pp. 307-318.
- [VD4] A. Van Daele: Celebration of Tomita's theorem; Proc. Symp. Pure Math. vol. 38 (1982) part 2, pp. 381-383.
- [Dix1] J. Dixmier: Formes lineaires sur un anneau d'opérateurs; Bull. Soc. Math. France 81 (1953) pp. 439-441.
- [Dix2] J. Dixmier: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien; Gauthier-Villars, Paris 1969.
- [Doe] G. Doetsch: Theorie und adwendung der Laplace-Transformation; Dover Publications, New Yok 1943.
- [DuSc] N. Dunford, J. Schwartz: Linear operators, Part I, II; Interscience Publishers, New York 1958.
- [ElZs] G. A. Elliot, L. Zsidó: Almost uniformly continuous automorphism groups of operator algebras; J. Operator Theroy 8 (1982), pp. 227-277.

- [HaHW] R. Haag, N. Hugenholtz, M. Winnik: On the equilibrium states in quantum statistical mechanics; *Comm. Math. Phys.* 5 (1967), pp. 215-236.
- [Haa] U. Haagerup: Normal weights on W^* -algebras; *J. Funct. Analysis* 19 (1975) pp. 302-317.
- [Herm] R. Herman; Faithful Normal States on a von Neumann algebra; *Proc. Int. School Phys. "Enrico Fermi" 1973*, Ital. Phys. Soc. Publ. Bologna 1976.
- [Hug] N. M. Hugenholtz: Equilibrium states in quantum statistical mechanics; *Proc. Int. School Phys. "Enrico Fermi" 1973*, Ital. Phys. Soc. Publ. Bologna 1976.
- [Mau1] K. Maurin: *Methods of Hilbert spaces*; PWN Warszawa 1967.
- [Mau2] K. Maurin: *Analiza, część III*; PWN Warszawa 1991.
- [Ped] G. K. Pedersen: C^* -algebras and their automorphism groups; Academic Press, London, New York, San Francisco 1979.
- [Rob] D. W. Robinson: C^* -algebras and quantum statistical mechanics; *Proc. Int. School Phys. "Enrico Fermi" 1973*, Ital. Phys. Soc. Publ. Bologna 1976.
- [Rud] W. Rudin: *Functional Analysis*, second edition; McGraw-Hill 1991.
- [Sak] S. Sakai: C^* -algebras and W^* -algebras; Springer, New York 1971.
- [Scha] H. H. Schaefer: *Topological vector spaces*; The Macmillan Company, New York 1966.
- [Stra] Ș. Strătilă: *Modular theory in operator algebras*; Abacus Press, Tunbridge Wells, 1981.
- [StZs] Ș. Strătilă, L. Zsidó: *Lectures on von Neumann algebras*; Abacus Press, Tunbridge Wells, 1979.
- [Tak] M. Takesaki: Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications; *Springer Lecture Notes in Math.* no 128 (1970).
- [SLW1] S. L. Woronowicz: On the purification of factor states; *Commun. Math. Phys.* 28 (1972), pp. 221-235.
- [SLW2] S. L. Woronowicz: Operator systems and their application to the Tomita-Takesaki theory; *J. Operator Theory* 2 (1979), pp. 169-209.
- [SLW3] S. L. Woronowicz: From multiplicative unitaries to quantum groups; *Int. J. Math.* vol. 7 no 1 (1996), pp. 127-149.
- [SLW4] S. L. Woronowicz: Compact quantum groups; *Symetries Quantiques; Quantum Symmetries*, Elsevier Science Publishers 1998.
- [SLW5] S. L. Woronowicz: Extended $SU(1, 1)$ quantum group. Hilbert space level; w przygotowaniu.

- [SLW6] S. L. Woronowicz: Operatory nieograniczone w przestrzeni Hilberta; Notatki do wykładu *Elementy Matematyki Współczesnej* w semestrze zimowym roku akademickiego 1997/98 (nie opublikowane).
- [SLW7] S. L. Woronowicz: Nie opublikowane notatki.
- [Yos] K. Yosida: Functional analysis; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1971.
- [Z1] L. Zsidó: Spectral and ergodic properties of the analytic generator; J. Approx. Theory 20 (1977), pp. 77-138.
- [Z2] L. Zsidó: the characterization of the analytic generator of $*$ -automorphism groups; Proc. Symp. Pure Math. vol. 38 (1982) part 2, pp. 381-383.