Zwarte grupy kwantowe

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematcznych Fizyki
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Konwersatorium Wydziału Matematyki

Warszawa, 27.02.2009

Początek

Definicja

Zwarta grupa kwantowa jest to obiekt $\mathbb{G} = (A, \Delta)$, gdzie

- A jest C^*-algebrą z jedynką,
- $\Delta : A \to A \otimes A$ jest kołącznym morfizmem,

ponadto zbiory

$$\left\{\Delta(a)(\mathbb{1} \otimes b) \middle| a, b \in A\right\} \quad \text{oraz} \quad \left\{(a \otimes \mathbb{1})\Delta(b) \middle| a, b \in A\right\}$$

są liniowo gęste w $A \otimes A$.

Początek

Definicja

Zwarta grupa kwantowa jest to obiekt $\mathbb{G} = (A, \Delta)$, *gdzie*

- A *jest* C^**-algebrą z jedynką,*
- $\Delta : A \to A \otimes A$ *jest kołącznym morfizmem,*

ponadto zbiory

$$\{\Delta(a)(\mathbb{1} \otimes b) \,|\, a, b \in A\} \quad \textit{oraz} \quad \{(a \otimes \mathbb{1})\Delta(b) \,|\, a, b \in A\}$$

są liniowo gęste w $A \otimes A$.

Początek

Definicja

Zwarta grupa kwantowa jest to obiekt $\mathbb{G} = (A, \Delta)$, *gdzie*

- A *jest* C^**-algebrą z jedynką,*
- $\Delta : A \to A \otimes A$ *jest kołącznym morfizmem,*

ponadto zbiory

$$\left\{\Delta(a)(\mathbb{1} \otimes b) \middle| a, b \in A\right\} \quad \text{oraz} \quad \left\{(a \otimes \mathbb{1})\Delta(b) \middle| a, b \in A\right\}$$

są liniowo gęste w $A \otimes A$.

Początek

Definicja

Zwarta grupa kwantowa jest to obiekt $\mathbb{G} = (A, \Delta)$, gdzie

- *A jest C^*-algebrą z jedynką,*
- *$\Delta : A \to A \otimes A$ jest kołącznym morfizmem,*

ponadto zbiory

$$\left\{\Delta(a)(\mathbb{1} \otimes b) \,\middle|\, a, b \in A\right\} \quad \text{oraz} \quad \left\{(a \otimes \mathbb{1})\Delta(b) \,\middle|\, a, b \in A\right\}$$

są liniowo gęste w $A \otimes A$.

Początek

Definicja

Zwarta grupa kwantowa jest to obiekt $\mathbb{G} = (A, \Delta)$, *gdzie*

- A *jest* C^**-algebrą z jedynką,*
- $\Delta : A \to A \otimes A$ *jest kołącznym morfizmem,*

ponadto zbiory

$$\left\{\Delta(a)(\mathbb{1} \otimes b) \,\middle|\, a, b \in A\right\} \quad \textit{oraz} \quad \left\{(a \otimes \mathbb{1})\Delta(b) \,\middle|\, a, b \in A\right\}$$

są liniowo gęste w $A \otimes A$.

Początek

Definicja

Zwarta grupa kwantowa jest to obiekt $\mathbb{G} = (A, \Delta)$*, gdzie*

- A *jest* C^**-algebrą z jedynką,*
- $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ *jest kołącznym morfizmem,*

ponadto zbiory

$$\left\{\Delta(a)(\mathbb{1} \otimes b) \,\middle|\, a, b \in A\right\} \quad \text{oraz} \quad \left\{(a \otimes \mathbb{1})\Delta(b) \,\middle|\, a, b \in A\right\}$$

są liniowo gęste w $A \otimes A$*.*

C^*-algebry

Definicja

Algebrę Banacha A z inwolucją $* : A \ni a \mapsto a^* \in A$ nazywamy C^*-algebrą, jeśli

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

dla wszystkich $a \in A$.

Przykłady:

- $\mathrm{B}(H)$, gdzie H — przestrzeń Hilberta,
- $\mathrm{C}(X)$, gdzie X — przestrzeń zwarta.

C^*-algebry

Definicja

Algebrę Banacha A z inwolucją $* : A \ni a \mapsto a^* \in A$ nazywamy C^*-algebrą, jeśli

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

dla wszystkich $a \in A$.

Przykłady:

- $\mathrm{B}(H)$, gdzie H — przestrzeń Hilberta,
- $\mathrm{C}(X)$, gdzie X — przestrzeń zwarta.

C^*-algebry

Definicja

Algebrę Banacha A z inwolucją $* : A \ni a \mapsto a^* \in A$ nazywamy C^*-algebrą, jeśli

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

dla wszystkich $a \in A$.

Przykłady:

- $\mathrm{B}(H)$, gdzie H — przestrzeń Hilberta,
- $\mathrm{C}(X)$, gdzie X — przestrzeń zwarta.

C^*-algebry

Definicja

Algebrę Banacha A z inwolucją $* : A \ni a \mapsto a^* \in A$ nazywamy C^*-algebrą, jeśli

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

dla wszystkich $a \in A$.

Przykłady:

- $\mathrm{B}(H)$, gdzie H — przestrzeń Hilberta,
- $\mathrm{C}(X)$, gdzie X — przestrzeń zwarta.

C^*-algebry

Definicja

Algebrę Banacha A z inwolucją $* : A \ni a \mapsto a^* \in A$ nazywamy C^*-algebrą, jeśli

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

dla wszystkich $a \in A$.

Przykłady:

- $\mathrm{B}(H)$, gdzie H — przestrzeń Hilberta,
- $\mathrm{C}(X)$, gdzie X — przestrzeń zwarta.

Kołączność

- A — C*-algebra z jedynką,
- $\Delta : A \to A \otimes A$ — $*$-homomorfizm algebr z jedynką.
- Kołączność morfimzu Δ oznacza, że diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Kołączność

- A — C^*-algebra z jedynką,
- $\Delta : A \to A \otimes A$ — $*$-homomorfizm algebr z jedynką.
- Kołączność morfimzu Δ oznacza, że diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Kołączność

- A — C^*-algebra z jedynką,
- $\Delta : A \to A \otimes A$ — $*$-homomorfizm algebr z jedynką.
- Kołączność morfimzu Δ oznacza, że diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Kołączność

- A — C^*-algebra z jedynką,
- $\Delta : A \to A \otimes A$ — $*$-homomorfizm algebr z jedynką.
- Kołączność morfimzu Δ oznacza, że diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:
$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$
dla wszystkich $f \in A$, $s,t \in G$.
- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo
$$ts = t's \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$
- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo
$$st = st' \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$

dla wszystkich $f \in A$, $s, t \in G$.

- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo

$$ts = t's \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo

$$st = st' \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$

dla wszystkich $f \in A$, $s,t \in G$.

- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo

$$ts = t's \implies t = t',$$

- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo

$$st = st' \implies t = t',$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$

dla wszystkich $f \in A$, $s, t \in G$.

- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo

$$ts = t's \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo

$$st = st' \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$

dla wszystkich $f \in A$, $s,t \in G$.

- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo

$$ts = t's \implies t = t',$$

- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo

$$st = st' \implies t = t',$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$

dla wszystkich $f \in A$, $s, t \in G$.

- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo

$$ts = t's \implies t = t',$$

- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo

$$st = st' \implies t = t',$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:
$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$
dla wszystkich $f \in A$, $s, t \in G$.
- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo
$$ts = t's \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$
- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo
$$st = st' \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:
$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$
dla wszystkich $f \in A$, $s,t \in G$.
- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo
$$ts = t's \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$
- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo
$$st = st' \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:
$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$
dla wszystkich $f \in A$, $s, t \in G$.
- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo
$$ts = t's \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$
- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo
$$st = st' \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$

dla wszystkich $f \in A$, $s, t \in G$.

- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo

$$ts = t's \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo

$$st = st' \quad \Longrightarrow \quad t = t',$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy zwarte

- Niech G będzie grupą zwartą.
- $A := \mathrm{C}(G)$ (wtedy $A \otimes A \cong \mathrm{C}(G \times G)$).
- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(f)(s,t) = f(st)$$

dla wszystkich $f \in A$, $s, t \in G$.

- $\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A$, bo

$$ts = t's \quad\Longrightarrow\quad t = t',$$

- $\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A$, bo

$$st = st' \quad\Longrightarrow\quad t = t',$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda zw. gr. kwantowa (A, Δ) taka, że A jest przemienna, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm
$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$
taki, że
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$
dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ ($\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A$).
- Ponadto
$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$
$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := C^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm
$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$
taki, że
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$
dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ ($\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A$).
- Ponadto
$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$
$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm
$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$
taki, że
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$
dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ $(\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A)$.
- Ponadto
$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$
$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm
$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$
taki, że
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$
dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ $(\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A)$.
- Ponadto
$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$
$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$

taki, że

$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ ($\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A$).

- Ponadto

$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$

$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$

taki, że

$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ $(\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A)$.

- Ponadto

$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$

$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm
$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$
taki, że
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$
dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ $(\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A)$.
- Ponadto
$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$
$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm
$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$
taki, że
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$
dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ $(\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A)$.
- Ponadto
$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$
$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm
$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$
taki, że
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$
dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ $(\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A)$.
- Ponadto
$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$
$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc
$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$
jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$

taki, że

$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ $(\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A)$.

- Ponadto

$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$

$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Grupy dwoiste do grup dyskretnych

- Niech Γ będzie grupą dyskretną.
- $A := \mathrm{C}^*(\Gamma)$ (uzupełnienie $\mathbb{C}[\Gamma]$).
- Istnieje dokładnie jeden morfizm

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$$

taki, że

$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$ $(\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma] \subset A)$.

- Ponadto

$$\overline{\Delta(A)(\mathbb{1} \otimes A)} = A \otimes A,$$

$$\overline{(A \otimes \mathbb{1})\Delta(A)} = A \otimes A,$$

a więc

$$\mathbb{G} = (A, \Delta)$$

jest zwartą grupą kwantową.

Każda uniwersalna zw. gr. kw. (A, Δ) taka, że Δ jest koprzemienny, jest tej postaci.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha, \gamma)$

$$\alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1},$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}.$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma.$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha, \gamma)$

$$\alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1},$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}.$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma.$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha, \gamma)$

$$\alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1},$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}.$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma.$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha, \gamma)$

$$\begin{aligned} \alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1}, \\ \gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma, \\ \Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma. \end{aligned}$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1,1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha,\gamma)$

$$\alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1},$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}.$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma.$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1,1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha,\gamma)$

$$\alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1},$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \qquad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}.$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma.$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha, \gamma)$

$$\alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1},$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}.$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma.$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1,1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha,\gamma)$

$$\alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1},$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}.$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma.$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Kwantowa grupa $\mathrm{SU}(2)$

- Niech $q \in [-1,1] \setminus \{0\}$.
- $A := \mathrm{C}^*(\alpha, \gamma)$

$$\alpha\gamma = q\gamma\alpha, \qquad \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = \mathbb{1},$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma^*\gamma = \mathbb{1}.$$

- $\Delta : A \to A \otimes A$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha - q\gamma^* \otimes \gamma,$$
$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \alpha^* \otimes \gamma.$$

- $\mathbb{G}_q = (A, \Delta)$ jest zw. gr. kw.

Zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G}_q$ to słynna grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.

Dla $q = 1$ algebra A jest przemienna i $\mathbb{G}_q = \mathrm{SU}(2)$.

Niezmiennicze całkowanie

- Na każdej zwartej grupie G istnieje jedyna miara probabilistyczna h taka, że

$$\int_G f(st)\,dh(t) = \int_G f(ts)\,dh(t) = \int_G f(t)\,dh(t) \qquad (\heartsuit)$$

  (nazywamy ją miarą Haara).
- Miary na G to funkcjonały ciągłe na $C(G)$.
- Wzór $(\heartsuit)$ możemy przepisać tak:

$$(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(f) = (h \otimes \mathrm{id})\Delta(f) = h(f)\mathbb{1}.$$

Niezmiennicze całkowanie

- Na każdej zwartej grupie G istnieje jedyna miara probabilistyczna h taka, że

$$\int_G f(st)\,dh(t) = \int_G f(ts)\,dh(t) = \int_G f(t)\,dh(t) \qquad (\heartsuit)$$

(nazywamy ją miarą Haara).

- Miary na G to funkcjonały ciągłe na $C(G)$.
- Wzór $(\heartsuit)$ możemy przepisać tak:

$$(\mathrm{id}\otimes h)\Delta(f) = (h\otimes\mathrm{id})\Delta(f) = h(f)\mathbb{1}.$$

Niezmiennicze całkowanie

- Na każdej zwartej grupie G istnieje jedyna miara probabilistyczna h taka, że

$$\int_G f(st)\,dh(t) = \int_G f(ts)\,dh(t) = \int_G f(t)\,dh(t) \qquad (\heartsuit)$$

(nazywamy ją miarą Haara).
- Miary na G to funkcjonały ciągłe na $C(G)$.
- Wzór $(\heartsuit)$ możemy przepisać tak:

$$(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(f) = (h \otimes \mathrm{id})\Delta(f) = h(f)\mathbb{1}.$$

Niezmiennicze całkowanie

- Na każdej zwartej grupie G istnieje jedyna miara probabilistyczna h taka, że

$$\int\limits_G f(st)\,dh(t) = \int\limits_G f(ts)\,dh(t) = \int\limits_G f(t)\,dh(t) \qquad (\heartsuit)$$

  (nazywamy ją miarą Haara).
- Miary na G to funkcjonały ciągłe na $\mathrm{C}(G)$.
- Wzór $(\heartsuit)$ możemy przepisać tak:

$$(\mathrm{id}\otimes h)\Delta(f) = (h\otimes\mathrm{id})\Delta(f) = h(f)\mathbb{1}.$$

Niezmiennicze całkowanie

- Na każdej zwartej grupie G istnieje jedyna miara probabilistyczna h taka, że
$$\int_G f(st)\,dh(t) = \int_G f(ts)\,dh(t) = \int_G f(t)\,dh(t) \qquad (\heartsuit)$$
(nazywamy ją miarą Haara).
- Miary na G to funkcjonały ciągłe na $\mathrm{C}(G)$.
- Wzór $(\heartsuit)$ możemy przepisać tak:
$$(\mathrm{id}\otimes h)\Delta(f) = (h\otimes\mathrm{id})\Delta(f) = h(f)\mathbb{1}.$$

Niezmiennicze całkowanie

- Na każdej zwartej grupie G istnieje jedyna miara probabilistyczna h taka, że

$$\int_G f(st)\,dh(t) = \int_G f(ts)\,dh(t) = \int_G f(t)\,dh(t) \qquad (\heartsuit)$$

  (nazywamy ją miarą Haara).
- Miary na G to funkcjonały ciągłe na $\mathrm{C}(G)$.
- Wzór $(\heartsuit)$ możemy przepisać tak:

$$(\mathrm{id}\otimes h)\Delta(f) = (h\otimes\mathrm{id})\Delta(f) = h(f)\mathbb{1}.$$

Niezmiennicze całkowanie

- Na każdej zwartej grupie G istnieje jedyna miara probabilistyczna h taka, że

$$\int_G f(st)\,dh(t) = \int_G f(ts)\,dh(t) = \int_G f(t)\,dh(t) \qquad (\heartsuit)$$

  (nazywamy ją miarą Haara).
- Miary na G to funkcjonały ciągłe na $\mathrm{C}(G)$.
- Wzór $(\heartsuit)$ możemy przepisać tak:

$$(\mathrm{id}\otimes h)\Delta(f) = (h\otimes \mathrm{id})\Delta(f) = h(f)\mathbb{1}.$$

Niezmiennicze całkowanie

- Na każdej zwartej grupie G istnieje jedyna miara probabilistyczna h taka, że

$$\int_G f(st)\,dh(t) = \int_G f(ts)\,dh(t) = \int_G f(t)\,dh(t) \qquad (\heartsuit)$$

  (nazywamy ją miarą Haara).
- Miary na G to funkcjonały ciągłe na $\mathrm{C}(G)$.
- Wzór $(\heartsuit)$ możemy przepisać tak:

$$(\mathrm{id}\otimes h)\Delta(f) = (h\otimes\mathrm{id})\Delta(f) = h(f)\mathbb{1}.$$

Istnienie miary Haara

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech (A, Δ) będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas istnieje dokładnie jeden stan h *na* A *taki, że*

$$(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a) = (h \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = h(a)\mathbb{1}.$$

dla wszystkich $a \in A$.

---

* Stan na C^*-algebrze A jest to dodatni funkcjonał ω na A taki, że $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Dodatnie funkcjonały $(\omega(a^*a) \geq 0 \ \forall\, a \in A)$ są automatyczne ciągłe.

Istnienie miary Haara

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech (A, Δ) będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas istnieje dokładnie jeden stan h na A taki, że*

$$(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a) = (h \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = h(a)\mathbb{1}.$$

dla wszystkich $a \in A$.

Stan na C-algebrze A jest to dodatni funkcjonał ω na A taki, że $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Dodatnie funkcjonały ($\omega(a^*a) \geq 0 \; \forall \, a \in A$) są automatyczne ciągłe.

Istnienie miary Haara

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech (A, Δ) będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas istnieje dokładnie jeden stan h na A taki, że*

$$(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(a) = (h \otimes \mathrm{id})\Delta(a) = h(a)\mathbb{1}.$$

dla wszystkich $a \in A$.

---

*Stan na C^*-algebrze A jest to dodatni funkcjonał ω na A taki, że $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Dodatnie funkcjonały ($\omega(a^*a) \geq 0\ \forall\, a \in A$) są automatyczne ciągłe.

Miara Haara — przykłady

- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}(G),\Delta\bigr)$ stan h jest całkowaniem względem miary Haara.
- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma),\Delta\bigr)$ stan h jest to jedyny funkcjonał na A rozszerzający

$$\mathbb{C}[\Gamma]\ni\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma\gamma\longmapsto\alpha_e.$$

- Dla $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ niech $\pi:A\to\mathrm{B}\bigl(\ell^2(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z})\bigr)$:

$$\pi(\alpha)e_{n,k}=\sqrt{1-q^{2n}}e_{n-1,k},\qquad\pi(\gamma)e_{n,k}=q^ne_{n,k+1}.$$

Mamy

$$h(a)=(1-q^2)\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}\bigl(e_{n,0}\big|\pi(a)e_{n,0}\bigr)$$

Miara Haara — przykłady

- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}(G),\Delta\bigr)$ stan h jest całkowaniem względem miary Haara.
- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma),\Delta\bigr)$ stan h jest to jedyny funkcjonał na A rozszerzający
$$\mathbb{C}[\Gamma]\ni\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma\gamma\longmapsto\alpha_e.$$
- Dla $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ niech $\pi:A\to\mathrm{B}\bigl(\ell^2(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z})\bigr)$:
$$\pi(\alpha)e_{n,k}=\sqrt{1-q^{2n}}e_{n-1,k},\qquad\pi(\gamma)e_{n,k}=q^ne_{n,k+1}.$$
Mamy
$$h(a)=(1-q^2)\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}\bigl(e_{n,0}\big|\pi(a)e_{n,0}\bigr)$$

Miara Haara — przykłady

- Dla $(A, \Delta) = \big(\mathrm{C}(G), \Delta\big)$ stan h jest całkowaniem względem miary Haara.
- Dla $(A, \Delta) = \big(\mathrm{C}^*(\Gamma), \Delta\big)$ stan h jest to jedyny funkcjonał na A rozszerzający

$$\mathbb{C}[\Gamma] \ni \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma \gamma \longmapsto \alpha_e.$$

- Dla $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ niech $\pi : A \to \mathrm{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z})\big)$:

$$\pi(\alpha)e_{n,k} = \sqrt{1 - q^{2n}}\, e_{n-1,k}, \qquad \pi(\gamma)e_{n,k} = q^n e_{n,k+1}.$$

Mamy

$$h(a) = (1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \big(e_{n,0} \big| \pi(a) e_{n,0}\big)$$

Miara Haara — przykłady

- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}(G),\Delta\bigr)$ stan h jest całkowaniem względem miary Haara.
- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma),\Delta\bigr)$ stan h jest to jedyny funkcjonał na A rozszerzający

$$\mathbb{C}[\Gamma]\ni\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma\gamma\longmapsto\alpha_e.$$

- Dla $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ niech $\pi:A\to\mathrm{B}\bigl(\ell^2(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z})\bigr)$:

$$\pi(\alpha)e_{n,k}=\sqrt{1-q^{2n}}e_{n-1,k},\qquad\pi(\gamma)e_{n,k}=q^ne_{n,k+1}.$$

Mamy

$$h(a)=(1-q^2)\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}\bigl(e_{n,0}\big|\pi(a)e_{n,0}\bigr)$$

Miara Haara — przykłady

- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}(G),\Delta\bigr)$ stan h jest całkowaniem względem miary Haara.
- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma),\Delta\bigr)$ stan h jest to jedyny funkcjonał na A rozszerzający

$$\mathbb{C}[\Gamma]\ni\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma\gamma\longmapsto\alpha_e.$$

- Dla $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ niech $\pi:A\to\mathrm{B}\bigl(\ell^2(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z})\bigr)$:

$$\pi(\alpha)e_{n,k}=\sqrt{1-q^{2n}}e_{n-1,k},\qquad\pi(\gamma)e_{n,k}=q^ne_{n,k+1}.$$

Mamy

$$h(a)=(1-q^2)\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}\bigl(e_{n,0}\big|\pi(a)e_{n,0}\bigr)$$

Miara Haara — przykłady

- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}(G),\Delta\bigr)$ stan h jest całkowaniem względem miary Haara.
- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma),\Delta\bigr)$ stan h jest to jedyny funkcjonał na A rozszerzający

$$\mathbb{C}[\Gamma]\ni\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma\gamma\longmapsto\alpha_e.$$

- Dla $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ niech $\pi:A\to\mathrm{B}\bigl(\ell^2(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z})\bigr)$:

$$\pi(\alpha)e_{n,k}=\sqrt{1-q^{2n}}e_{n-1,k},\qquad\pi(\gamma)e_{n,k}=q^ne_{n,k+1}.$$

Mamy

$$h(a)=(1-q^2)\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}\left(e_{n,0}\middle|\pi(a)e_{n,0}\right)$$

Miara Haara — przykłady

- Dla $(A, \Delta) = \big(\mathrm{C}(G), \Delta\big)$ stan h jest całkowaniem względem miary Haara.
- Dla $(A, \Delta) = \big(\mathrm{C}^*(\Gamma), \Delta\big)$ stan h jest to jedyny funkcjonał na A rozszerzający
$$\mathbb{C}[\Gamma] \ni \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma \gamma \longmapsto \alpha_e.$$
- Dla $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ niech $\pi : A \to \mathrm{B}\big(\ell^2(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z})\big)$:
$$\pi(\alpha)e_{n,k} = \sqrt{1 - q^{2n}}\, e_{n-1,k}, \qquad \pi(\gamma)e_{n,k} = q^n e_{n,k+1}.$$

Mamy
$$h(a) = (1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \big(e_{n,0} \big| \pi(a) e_{n,0}\big)$$

Miara Haara — przykłady

- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}(G),\Delta\bigr)$ stan h jest całkowaniem względem miary Haara.
- Dla $(A,\Delta)=\bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma),\Delta\bigr)$ stan h jest to jedyny funkcjonał na A rozszerzający

$$\mathbb{C}[\Gamma]\ni\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma\gamma\longmapsto\alpha_e.$$

- Dla $\mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ niech $\pi:A\to\mathrm{B}\bigl(\ell^2(\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z})\bigr)$:

$$\pi(\alpha)e_{n,k}=\sqrt{1-q^{2n}}e_{n-1,k},\qquad\pi(\gamma)e_{n,k}=q^ne_{n,k+1}.$$

Mamy

$$h(a)=(1-q^2)\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n}\left(e_{n,0}\middle|\pi(a)e_{n,0}\right)$$

Reprezentacje I

Najbardziej spektakularny użytek z miary Haara można zrobić w teorii reprezentacji.

Definicja

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Skończenie wymiarową reprezentacją $\mathbb{G}$ nazywamy odwracalną macierz $u \in M_{n\times n}(A) \cong M_{n\times n}(\mathbb{C}) \otimes A$ taką, że

$$\Delta(u_{k,l}) = \sum_{r=1}^{n} u_{k,r} \otimes u_{r,l}$$

gdzie $(u_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ są elementami macierzy u.

Reprezentacje I

Najbardziej spektakularny użytek z miary Haara można zrobić w teorii reprezentacji.

Definicja

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Skończenie wymiarową reprezentacją $\mathbb{G}$ nazywamy odwracalną macierz $u \in M_{n\times n}(A) \cong M_{n\times n}(\mathbb{C}) \otimes A$ taką, że

$$\Delta(u_{k,l}) = \sum_{r=1}^{n} u_{k,r} \otimes u_{r,l}$$

gdzie $(u_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ są elementami macierzy u.

Reprezentacje I

Najbardziej spektakularny użytek z miary Haara można zrobić w teorii reprezentacji.

Definicja

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Skończenie wymiarową reprezentacją $\mathbb{G}$ nazywamy odwracalną macierz $u \in M_{n\times n}(A) \cong M_{n\times n}(\mathbb{C}) \otimes A$ taką, że

$$\Delta(u_{k,l}) = \sum_{r=1}^{n} u_{k,r} \otimes u_{r,l}$$

gdzie $(u_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ są elementami macierzy u.

Reprezentacje I

Najbardziej spektakularny użytek z miary Haara można zrobić w teorii reprezentacji.

Definicja

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Skończenie wymiarową reprezentacją $\mathbb{G}$ nazywamy odwracalną macierz $u \in M_{n\times n}(A) \cong M_{n\times n}(\mathbb{C}) \otimes A$ taką, że

$$\Delta(u_{k,l}) = \sum_{r=1}^{n} u_{k,r} \otimes u_{r,l}$$

gdzie $(u_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ są elementami macierzy u.

Reprezentacje II — przykłady

- Dla $\mathbb{G} = (\mathrm{C}(G), \Delta)$ reprezentacje $\mathbb{G}$ są tym samym co reprezentacje G.
- Dla $\mathbb{G} = (\mathrm{C}^*(\Gamma), \Delta)$ reprezentacje są w bijekcji ze skończenie wymiarowymi reprezentacjami algebry $\mathrm{C}_0(\Gamma)$.
- Dla $\mathbb{G} = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ teoria reprezentacji jest bardzo podobna do teorii reprezentacji grupy $\mathrm{SU}(2)$. Przykład — reprezentacje o spinie $\frac{1}{2}$ i 1:

$$u^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad u^1 = \begin{bmatrix} {\alpha^*}^2 & -(q^2+1)\alpha^*\gamma & -q\gamma^2 \\ \gamma^*\alpha^* & \mathbb{1}-(q^2+1)\gamma^*\gamma & \alpha\gamma \\ -q{\gamma^*}^2 & -(q^2+1)\gamma^*\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Reprezentacje II — przykłady

- Dla $\mathbb{G} = \big(\mathrm{C}(G), \Delta\big)$ reprezentacje $\mathbb{G}$ są tym samym co reprezentacje G.
- Dla $\mathbb{G} = \big(\mathrm{C}^*(\Gamma), \Delta\big)$ reprezentacje są w bijekcji ze skończenie wymiarowymi reprezentacjami algebry $\mathrm{C}_0(\Gamma)$.
- Dla $\mathbb{G} = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ teoria reprezentacji jest bardzo podobna do teorii reprezentacji grupy $\mathrm{SU}(2)$. Przykład — reprezentacje o spinie $\frac{1}{2}$ i 1:

$$u^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad u^1 = \begin{bmatrix} \alpha^{*2} & -(q^2+1)\alpha^*\gamma & -q\gamma^2 \\ \gamma^*\alpha^* & \mathbb{1}-(q^2+1)\gamma^*\gamma & \alpha\gamma \\ -q\gamma^{*2} & -(q^2+1)\gamma^*\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Reprezentacje II — przykłady

- Dla $\mathbb{G} = \big(\mathrm{C}(G), \Delta\big)$ reprezentacje $\mathbb{G}$ są tym samym co reprezentacje G.
- Dla $\mathbb{G} = \big(\mathrm{C}^*(\Gamma), \Delta\big)$ reprezentacje są w bijekcji ze skończenie wymiarowymi reprezentacjami algebry $\mathrm{C}_0(\Gamma)$.
- Dla $\mathbb{G} = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ teoria reprezentacji jest bardzo podobna do teorii reprezentacji grupy $\mathrm{SU}(2)$. Przykład — reprezentacje o spinie $\frac{1}{2}$ i 1:

$$u^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad u^1 = \begin{bmatrix} \alpha^{*2} & -(q^2+1)\alpha^*\gamma & -q\gamma^2 \\ \gamma^*\alpha^* & \mathbb{1}-(q^2+1)\gamma^*\gamma & \alpha\gamma \\ -q\gamma^{*2} & -(q^2+1)\gamma^*\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Reprezentacje II — przykłady

- Dla $\mathbb{G} = \bigl(\mathrm{C}(G), \Delta\bigr)$ reprezentacje $\mathbb{G}$ są tym samym co reprezentacje G.
- Dla $\mathbb{G} = \bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma), \Delta\bigr)$ reprezentacje są w bijekcji ze skończenie wymiarowymi reprezentacjami algebry $\mathrm{C}_0(\Gamma)$.
- Dla $\mathbb{G} = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ teoria reprezentacji jest bardzo podobna do teorii reprezentacji grupy $\mathrm{SU}(2)$. Przykład — reprezentacje o spinie $\frac{1}{2}$ i 1:

$$u^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad u^1 = \begin{bmatrix} \alpha^{*2} & -(q^2+1)\alpha^*\gamma & -q\gamma^2 \\ \gamma^*\alpha^* & \mathbb{1}-(q^2+1)\gamma^*\gamma & \alpha\gamma \\ -q\gamma^{*2} & -(q^2+1)\gamma^*\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Reprezentacje II — przykłady

- Dla $\mathbb{G} = \bigl(\mathrm{C}(G), \Delta\bigr)$ reprezentacje $\mathbb{G}$ są tym samym co reprezentacje G.
- Dla $\mathbb{G} = \bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma), \Delta\bigr)$ reprezentacje są w bijekcji ze skończenie wymiarowymi reprezentacjami algebry $\mathrm{C}_0(\Gamma)$.
- Dla $\mathbb{G} = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ teoria reprezentacji jest bardzo podobna do teorii reprezentacji grupy $\mathrm{SU}(2)$. Przykład — reprezentacje o spinie $\frac{1}{2}$ i 1:

$$u^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad u^1 = \begin{bmatrix} \alpha^{*2} & -(q^2+1)\alpha^*\gamma & -q\gamma^2 \\ \gamma^*\alpha^* & \mathbb{1}-(q^2+1)\gamma^*\gamma & \alpha\gamma \\ -q\gamma^{*2} & -(q^2+1)\gamma^*\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Reprezentacje II — przykłady

- Dla $\mathbb{G} = \bigl(\mathrm{C}(G), \Delta\bigr)$ reprezentacje $\mathbb{G}$ są tym samym co reprezentacje G.
- Dla $\mathbb{G} = \bigl(\mathrm{C}^*(\Gamma), \Delta\bigr)$ reprezentacje są w bijekcji ze skończenie wymiarowymi reprezentacjami algebry $\mathrm{C}_0(\Gamma)$.
- Dla $\mathbb{G} = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$ teoria reprezentacji jest bardzo podobna do teorii reprezentacji grupy $\mathrm{SU}(2)$. Przykład — reprezentacje o spinie $\frac{1}{2}$ i 1:

$$u^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad u^1 = \begin{bmatrix} {\alpha^*}^2 & -(q^2+1)\alpha^*\gamma & -q\gamma^2 \\ \gamma^*\alpha^* & \mathbb{1}-(q^2+1)\gamma^*\gamma & \alpha\gamma \\ -q{\gamma^*}^2 & -(q^2+1)\gamma^*\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

Dygresja — kwantowa grupa $\mathrm{SO}(3)$

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:
$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$
- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy
$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$
jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Dygresja — kwantowa grupa $\mathrm{SO}(3)$

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:
$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$
- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy
$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$
jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Dygresja — kwantowa grupa $\mathrm{SO}(3)$

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:

$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$

- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy

$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$

jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Dygresja — kwantowa grupa $\mathrm{SO}(3)$

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:

$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$

- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy

$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$

jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Dygresja — kwantowa grupa SO(3)

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:

$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$

- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy

$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$

jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Dygresja — kwantowa grupa $\mathrm{SO}(3)$

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:
$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$
- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy
$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$
jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Dygresja — kwantowa grupa SO(3)

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:

$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$

- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy

$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$

jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Dygresja — kwantowa grupa $\mathrm{SO}(3)$

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:
$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$
- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy
$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$
jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Dygresja — kwantowa grupa SO(3)

- Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta) = \mathrm{S}_q\mathrm{U}(2)$.
- Niech $B \subset A$ będzie podalgebrą generowaną przez elementy macierzowe reprezentacji o spinie 1:

$$B = \mathrm{C}^*(\alpha\gamma, \alpha^2, \gamma^2) \subset A.$$

- Mamy $\Delta(B) \subset B \otimes B$.
- Niech $\Delta_B = \Delta\big|_B$.
- Wtedy

$$\widetilde{\mathbb{G}} = (B, \Delta_B)$$

jest zwartą grupą kwantową. Jest to grupa $\mathrm{S}_q\mathrm{O}(3)$.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T\otimes\mathbb{1})u = v(T\otimes\mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T \otimes \mathbb{1})u = v(T \otimes \mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T \otimes \mathbb{1})u = v(T \otimes \mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T\otimes\mathbb{1})u=v(T\otimes\mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T\otimes\mathbb{1})u=v(T\otimes\mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T\otimes\mathbb{1})u=v(T\otimes\mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T\otimes\mathbb{1})u=v(T\otimes\mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T\otimes\mathbb{1})u=v(T\otimes\mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T \otimes \mathbb{1})u = v(T \otimes \mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T \otimes \mathbb{1})u = v(T \otimes \mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T\otimes\mathbb{1})u=v(T\otimes\mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T \otimes \mathbb{1})u = v(T \otimes \mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje III

- Operacje na reprezentacjach:
  - suma prosta,
  - iloczyn tensorowy,
  - reprezentacja kontragredientna,
  - ...
- Pojęcia teorii reprezentacji:
  - operatory splatające, $(T\otimes\mathbb{1})u=v(T\otimes\mathbb{1})$
  - reprezentacje nieprzywiedlne,
  - równoważność reprezentacji,
  - ...
- Można rozważać też reprezentacje nieskończenie wymiarowe.

Reprezentacje i algebry Hopfa

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas

1. *każda reprezentacja jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych,*
2. *każda reprezentacja nieprzywiedlna jest skończenie wymiarowa,*
3. *każda reprezentacja jest unitaryzowalna,*
4. *elementy macierzowe reprezentacji nieprzywiedlnych rozpinają zbiór gęsty $\mathcal{A} \subset A$,*
5. *$\mathcal{A}$ jest $*$-algebrą Hopfa.*

Reprezentacje i algebry Hopfa

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas

1. *każda reprezentacja jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych,*
2. *każda reprezentacja nieprzywiedlna jest skończenie wymiarowa,*
3. *każda reprezentacja jest unitaryzowalna,*
4. *elementy macierzowe reprezentacji nieprzywiedlnych rozpinają zbiór gęsty $\mathcal{A} \subset A$,*
5. *$\mathcal{A}$ jest $*$-algebrą Hopfa.*

Reprezentacje i algebry Hopfa

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas

1. *każda reprezentacja jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych,*
2. *każda reprezentacja nieprzywiedlna jest skończenie wymiarowa,*
3. *każda reprezentacja jest unitaryzowalna,*
4. *elementy macierzowe reprezentacji nieprzywiedlnych rozpinają zbiór gęsty $\mathcal{A} \subset A$,*
5. *$\mathcal{A}$ jest $*$-algebrą Hopfa.*

Reprezentacje i algebry Hopfa

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas

1. *każda reprezentacja jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych,*
2. *każda reprezentacja nieprzywiedlna jest skończenie wymiarowa,*
3. *każda reprezentacja jest unitaryzowalna,*
4. *elementy macierzowe reprezentacji nieprzywiedlnych rozpinają zbiór gęsty $\mathcal{A} \subset A$,*
5. *$\mathcal{A}$ jest $*$-algebrą Hopfa.*

Reprezentacje i algebry Hopfa

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas

1. *każda reprezentacja jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych,*
2. *każda reprezentacja nieprzywiedlna jest skończenie wymiarowa,*
3. *każda reprezentacja jest unitaryzowalna,*
4. *elementy macierzowe reprezentacji nieprzywiedlnych rozpinają zbiór gęsty $\mathcal{A} \subset A$,*
5. *$\mathcal{A}$ jest $*$-algebrą Hopfa.*

Reprezentacje i algebry Hopfa

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas

1. *każda reprezentacja jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych,*
2. *każda reprezentacja nieprzywiedlna jest skończenie wymiarowa,*
3. *każda reprezentacja jest unitaryzowalna,*
4. *elementy macierzowe reprezentacji nieprzywiedlnych rozpinają zbiór gęsty $\mathcal{A} \subset A$,*
5. *$\mathcal{A}$ jest $*$-algebrą Hopfa.*

Reprezentacje i algebry Hopfa

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

Niech $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas

1. *każda reprezentacja jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych,*
2. *każda reprezentacja nieprzywiedlna jest skończenie wymiarowa,*
3. *każda reprezentacja jest unitaryzowalna,*
4. *elementy macierzowe reprezentacji nieprzywiedlnych rozpinają zbiór gęsty $\mathcal{A} \subset A$,*
5. *$\mathcal{A}$ jest $*$-algebrą Hopfa.*

O reprezentacji kontragredientnej

- Niech u będzie reprezentacją unitarną $\mathbb{G}$.
- Niech κ będzie koodwrotnością algebry Hopfa $\mathcal{A}$.
- Reprezentacja kontragredientna u^{c} do u jest to reprezentacja o elementach macierzowych

$$[u^{c}]_{k,l} = \kappa(u_{l,k}).$$

- Istnieje dodatnia odwracalna macierz F taka, że

$$u^{c\,c} = (F \otimes \mathbb{1})u(F^{-1} \otimes \mathbb{1})$$

(wynika to z unitaryzwalności każdej reprezentacji).

O reprezentacji kontragredientnej

- Niech u będzie reprezentacją unitarną $\mathbb{G}$.
- Niech κ będzie koodwrotnością algebry Hopfa $\mathcal{A}$.
- Reprezentacja kontragredientna u^c do u jest to reprezentacja o elementach macierzowych

$$[u^c]_{k,l} = \kappa(u_{l,k}).$$

- Istnieje dodatnia odwracalna macierz F taka, że

$$u^{c\,c} = (F \otimes \mathbb{1})u(F^{-1} \otimes \mathbb{1})$$

(wynika to z unitaryzwalności każdej reprezentacji).

O reprezentacji kontragredientnej

- Niech u będzie reprezentacją unitarną $\mathbb{G}$.
- Niech κ będzie koodwrotnością algebry Hopfa $\mathcal{A}$.
- Reprezentacja kontragredientna u^c do u jest to reprezentacja o elementach macierzowych

$$[u^c]_{k,l} = \kappa(u_{l,k}).$$

- Istnieje dodatnia odwracalna macierz F taka, że

$$u^{cc} = (F \otimes \mathbb{1})u(F^{-1} \otimes \mathbb{1})$$

(wynika to z unitaryzwalności każdej reprezentacji).

O reprezentacji kontragredientnej

- Niech u będzie reprezentacją unitarną $\mathbb{G}$.
- Niech κ będzie koodwrotnością algebry Hopfa $\mathcal{A}$.
- Reprezentacja kontragredientna u^c do u jest to reprezentacja o elementach macierzowych
$$[u^c]_{k,l} = \kappa(u_{l,k}).$$
- Istnieje dodatnia odwracalna macierz F taka, że
$$u^{cc} = (F \otimes \mathbb{1})u(F^{-1} \otimes \mathbb{1})$$
(wynika to z unitaryzwalności każdej reprezentacji).

O reprezentacji kontragredientnej

- Niech u będzie reprezentacją unitarną $\mathbb{G}$.
- Niech κ będzie koodwrotnością algebry Hopfa $\mathcal{A}$.
- Reprezentacja kontragredientna u^{c} do u jest to reprezentacja o elementach macierzowych

$$[u^{c}]_{k,l} = \kappa(u_{l,k}).$$

- Istnieje dodatnia odwracalna macierz F taka, że

$$u^{c\,c} = (F \otimes \mathbb{1})u(F^{-1} \otimes \mathbb{1})$$

(wynika to z unitaryzwalności każdej reprezentacji).

O reprezentacji kontragredientnej

- Niech u będzie reprezentacją unitarną $\mathbb{G}$.
- Niech κ będzie koodwrotnością algebry Hopfa $\mathcal{A}$.
- Reprezentacja kontragredientna u^{c} do u jest to reprezentacja o elementach macierzowych

$$[u^{c}]_{k,l} = \kappa(u_{l,k}).$$

- Istnieje dodatnia odwracalna macierz F taka, że

$$u^{c\,c} = (F \otimes \mathbb{1})u(F^{-1} \otimes \mathbb{1})$$

(wynika to z unitaryzwalności każdej reprezentacji).

O reprezentacji kontragredientnej

- Niech u będzie reprezentacją unitarną $\mathbb{G}$.
- Niech κ będzie koodwrotnością algebry Hopfa $\mathcal{A}$.
- Reprezentacja kontragredientna u^{c} do u jest to reprezentacja o elementach macierzowych
$$[u^{\mathrm{c}}]_{k,l} = \kappa(u_{l,k}).$$
- Istnieje dodatnia odwracalna macierz F taka, że
$$u^{\mathrm{c\,c}} = (F \otimes \mathbb{1})u(F^{-1} \otimes \mathbb{1})$$
(wynika to z unitaryzwalności każdej reprezentacji).

Twierdzenie Petera-Weyla-Woronowicza

Twierdzenie

- *Niech* $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *będzie układem unitarnych reprezentantów wszystkich klas reprezentacji nieprzywiedlnych* $\mathbb{G}$.
- *Niech* d_α *będzie wymiarem reprezentacji* u^α.
- *Niech* $F_\alpha \in M_{d_\alpha\times d_\alpha}(\mathbb{C})_+$ *będzie taka, że*

$$(u^\alpha)^{\mathrm{c\,c}} = (F_\alpha\otimes\mathbb{1})u^\alpha(F_\alpha^{-1}\otimes\mathbb{1}),\quad \operatorname{Tr}F_\alpha = \operatorname{Tr}F_\alpha^{-1}.$$

Wówczas elementy macierzowe reprezentacji $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *spełniają*

$$\left(u^\beta_{k,l}\,\middle|\,u^\alpha_{m,n}\right)_{L^2(\mathbb{G})} = h({u^\beta_{k,l}}^* u^\alpha_{m,n}) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{[F_\alpha^{-1}]_{m,k}\delta_{l,n}}{\operatorname{Tr}F_\alpha^{-1}}.$$

Twierdzenie Petera-Weyla-Woronowicza

Twierdzenie

- *Niech $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ będzie układem unitarnych reprezentantów wszystkich klas reprezentacji nieprzywiedlnych $\mathbb{G}$.*
- *Niech d_α będzie wymiarem reprezentacji u^α.*
- *Niech $F_\alpha \in M_{d_\alpha\times d_\alpha}(\mathbb{C})_+$ będzie taka, że*

$$(u^\alpha)^{cc} = (F_\alpha\otimes\mathbb{1})u^\alpha(F_\alpha^{-1}\otimes\mathbb{1}),\quad \operatorname{Tr}F_\alpha = \operatorname{Tr}F_\alpha^{-1}.$$

Wówczas elementy macierzowe reprezentacji $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ spełniają

$$\left(u^\beta_{k,l} \,\middle|\, u^\alpha_{m,n} \right)_{L^2(\mathbb{G})} = h(u^{\beta\,*}_{k,l}\, u^\alpha_{m,n}) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{[F_\alpha^{-1}]_{m,k}\delta_{l,n}}{\operatorname{Tr}F_\alpha^{-1}}.$$

Twierdzenie Petera-Weyla-Woronowicza

Twierdzenie

- *Niech* $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *będzie układem unitarnych reprezentantów wszystkich klas reprezentacji nieprzywiedlnych* $\mathbb{G}$.
- *Niech* d_α *będzie wymiarem reprezentacji* u^α.
- *Niech* $F_\alpha \in M_{d_\alpha\times d_\alpha}(\mathbb{C})_+$ *będzie taka, że*

$$(u^\alpha)^{cc} = (F_\alpha\otimes\mathbb{1})u^\alpha(F_\alpha^{-1}\otimes\mathbb{1}), \qquad \operatorname{Tr} F_\alpha = \operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}.$$

Wówczas elementy macierzowe reprezentacji $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *spełniają*

$$\left(u^\beta_{k,l}\,\middle|\,u^\alpha_{m,n}\right)_{L^2(\mathbb{G})} = h({u^\beta_{k,l}}^* u^\alpha_{m,n}) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{[F_\alpha^{-1}]_{m,k}\delta_{l,n}}{\operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}}.$$

Twierdzenie Petera-Weyla-Woronowicza

Twierdzenie

- *Niech* $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *będzie układem unitarnych reprezentantów wszystkich klas reprezentacji nieprzywiedlnych* $\mathbb{G}$.
- *Niech* d_α *będzie wymiarem reprezentacji* u^α.
- *Niech* $F_\alpha \in M_{d_\alpha\times d_\alpha}(\mathbb{C})_+$ *będzie taka, że*

$$(u^\alpha)^{\mathrm{c\,c}} = (F_\alpha \otimes \mathbb{1})u^\alpha(F_\alpha^{-1}\otimes \mathbb{1}), \quad \operatorname{Tr} F_\alpha = \operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}.$$

Wówczas elementy macierzowe reprezentacji $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *spełniają*

$$\left(u^\beta_{k,l}\,\middle|\,u^\alpha_{m,n}\right)_{L^2(\mathbb{G})} = h\left({u^\beta_{k,l}}^* u^\alpha_{m,n}\right) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{[F_\alpha^{-1}]_{m,k}\delta_{l,n}}{\operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}}.$$

Twierdzenie Petera-Weyla-Woronowicza

Twierdzenie

- *Niech* $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *będzie układem unitarnych reprezentantów wszystkich klas reprezentacji nieprzywiedlnych* $\mathbb{G}$.
- *Niech* d_α *będzie wymiarem reprezentacji* u^α.
- *Niech* $F_\alpha \in M_{d_\alpha\times d_\alpha}(\mathbb{C})_+$ *będzie taka, że*

$$(u^\alpha)^{\mathrm{cc}} = (F_\alpha \otimes \mathbb{1})u^\alpha(F_\alpha^{-1}\otimes \mathbb{1}), \quad \operatorname{Tr} F_\alpha = \operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}.$$

Wówczas elementy macierzowe reprezentacji $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *spełniają*

$$\left(u^\beta_{k,l}\,\middle|\,u^\alpha_{m,n}\right)_{L^2(\mathbb{G})} = h({u^\beta_{k,l}}^* u^\alpha_{m,n}) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{[F_\alpha^{-1}]_{m,k}\delta_{l,n}}{\operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}}.$$

Twierdzenie Petera-Weyla-Woronowicza

Twierdzenie

- *Niech* $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *będzie układem unitarnych reprezentantów wszystkich klas reprezentacji nieprzywiedlnych* $\mathbb{G}$.
- *Niech* d_α *będzie wymiarem reprezentacji* u^α.
- *Niech* $F_\alpha \in M_{d_\alpha\times d_\alpha}(\mathbb{C})_+$ *będzie taka, że*

$$(u^\alpha)^{cc} = (F_\alpha\otimes\mathbb{1})u^\alpha(F_\alpha^{-1}\otimes\mathbb{1}),\quad \operatorname{Tr}F_\alpha = \operatorname{Tr}F_\alpha^{-1}.$$

Wówczas elementy macierzowe reprezentacji $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *spełniają*

$$\left(u^\beta_{k,l}\,\middle|\,u^\alpha_{m,n}\right)_{L^2(\mathbb{G})} = h\left({u^\beta_{k,l}}^* u^\alpha_{m,n}\right) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{[F_\alpha^{-1}]_{m,k}\delta_{l,n}}{\operatorname{Tr}F_\alpha^{-1}}.$$

Twierdzenie Petera-Weyla-Woronowicza

Twierdzenie

- *Niech* $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *będzie układem unitarnych reprezentantów wszystkich klas reprezentacji nieprzywiedlnych* $\mathbb{G}$.
- *Niech* d_α *będzie wymiarem reprezentacji* u^α.
- *Niech* $F_\alpha \in M_{d_\alpha\times d_\alpha}(\mathbb{C})_+$ *będzie taka, że*

$$(u^\alpha)^{cc} = (F_\alpha\otimes\mathbb{1})u^\alpha(F_\alpha^{-1}\otimes\mathbb{1}), \quad \operatorname{Tr} F_\alpha = \operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}.$$

Wówczas elementy macierzowe reprezentacji $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *spełniają*

$$\left(u^\beta_{k,l}\,\middle|\,u^\alpha_{m,n}\right)_{L^2(\mathbb{G})} = h({u^\beta_{k,l}}^* u^\alpha_{m,n}) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{[F_\alpha^{-1}]_{m,k}\delta_{l,n}}{\operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}}.$$

Twierdzenie Petera-Weyla-Woronowicza

Twierdzenie

- *Niech* $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *będzie układem unitarnych reprezentantów wszystkich klas reprezentacji nieprzywiedlnych* $\mathbb{G}$.
- *Niech* d_α *będzie wymiarem reprezentacji* u^α.
- *Niech* $F_\alpha \in M_{d_\alpha\times d_\alpha}(\mathbb{C})_+$ *będzie taka, że*

$$(u^\alpha)^{\mathrm{c\,c}} = (F_\alpha \otimes \mathbb{1})u^\alpha(F_\alpha^{-1}\otimes\mathbb{1}), \quad \operatorname{Tr} F_\alpha = \operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}.$$

Wówczas elementy macierzowe reprezentacji $(u^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}}$ *spełniają*

$$\left(u^\beta_{k,l}\middle|u^\alpha_{m,n}\right)_{L^2(\mathbb{G})} = h(u^\beta_{k,l}{}^* u^\alpha_{m,n}) = \delta_{\alpha,\beta}\frac{[F_\alpha^{-1}]_{m,k}\delta_{l,n}}{\operatorname{Tr} F_\alpha^{-1}}.$$

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

∃! rodzina $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ funkcjonałów multyplikatywnych na $\mathcal{A}$ taka, że

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\, a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita*,
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1} * f_{z_2} = (f_{z_1} \otimes f_{z_2}) \circ \Delta$
4. $f_z(\kappa(a)) = f_{-z}(a)$, $\quad f_{\bar{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)}$ $\quad \forall\, a, z$,
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ *rodzina* $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ *funkcjonałów multyplikatywnych na* $\mathcal{A}$ *taka, że*

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\, a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita*,
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1}*f_{z_2}=(f_{z_1}\otimes f_{z_2})\circ\Delta$
4. $f_z\big(\kappa(a)\big) = f_{-z}(a)$, $\quad f_{\bar{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\, a, z$,
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ *rodzina* $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ *funkcjonałów multyplikatywnych na* $\mathcal{A}$ *taka, że*

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\ a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita*,
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1} * f_{z_2} = (f_{z_1} \otimes f_{z_2}) \circ \Delta$
4. $f_z(\kappa(a)) = f_{-z}(a)$, $\quad f_{\overline{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\ a, z$,
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ *rodzina* $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ *funkcjonałów multyplikatywnych na* $\mathcal{A}$ *taka, że*

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\ a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita*,
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1}*f_{z_2}=(f_{z_1}\otimes f_{z_2})\circ\Delta$
4. $f_z\bigl(\kappa(a)\bigr) = f_{-z}(a), \quad f_{\bar{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\ a, z$,
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\bigl(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\bigr)$,
7. …

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ *rodzina* $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ *funkcjonałów multyplikatywnych na* $\mathcal{A}$ *taka, że*

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\ a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita*,
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1} * f_{z_2} = (f_{z_1} \otimes f_{z_2})\circ\Delta$
4. $f_z(\kappa(a)) = f_{-z}(a), \quad f_{\bar{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\ a, z$,
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ *rodzina* $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ *funkcjonałów multyplikatywnych na* $\mathcal{A}$ *taka, że*

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\ a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita*,
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1} * f_{z_2} = (f_{z_1} \otimes f_{z_2}) \circ \Delta$
4. $f_z(\kappa(a)) = f_{-z}(a), \quad f_{\bar{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\ a, z$,
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ rodzina $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ funkcjonałów multyplikatywnych na $\mathcal{A}$ taka, że

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 *— kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\ a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita,*
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1} * f_{z_2} = (f_{z_1} \otimes f_{z_2}) \circ \Delta$
4. $f_z\big(\kappa(a)\big) = f_{-z}(a), \quad f_{\bar{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\ a, z,$
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ *rodzina* $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ *funkcjonałów multyplikatywnych na* $\mathcal{A}$ *taka, że*

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\ a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita,*
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1}*f_{z_2}=(f_{z_1}\otimes f_{z_2})\circ\Delta$
4. $f_z\big(\kappa(a)\big) = f_{-z}(a)$, $\quad f_{\bar{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\ a, z$,
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ *rodzina* $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ *funkcjonałów multyplikatywnych na* $\mathcal{A}$ *taka, że*

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\, a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita,*
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $\quad f_{z_1} * f_{z_2} = (f_{z_1} \otimes f_{z_2})\circ\Delta$
4. $f_z\big(\kappa(a)\big) = f_{-z}(a), \quad f_{\bar{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\, a, z,$
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Funkjonały modularne

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

$\exists!$ *rodzina* $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ *funkcjonałów multyplikatywnych na* $\mathcal{A}$ *taka, że*

1. $f_z(\mathbb{1}) = 1$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$, f_0 — *kojedynka* $\mathcal{A}$,
2. $\forall\ a \in \mathcal{A}$ *funkcja* $\mathbb{C} \ni z \mapsto f_z(a) \in \mathbb{C}$ *jest całkowita,*
3. $f_{z_1} * f_{z_2} = f_{z_1+z_2}$, $f_{z_1}*f_{z_2}=(f_{z_1}\otimes f_{z_2})\circ\Delta$
4. $f_z\big(\kappa(a)\big) = f_{-z}(a)$, $\quad f_{\overline{z}}(a^*) = \overline{f_{-z}(a)} \quad \forall\ a, z$,
5. $\kappa^2(a) = (f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_{-1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)$,
6. $h(ab) = h\big(b(f_1 \otimes \mathrm{id} \otimes f_1)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a)\big)$,
7. ...

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta* $*$*-podalgebra Hopfa w* A*,*
- $(f_z)_{z \in \mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na* $\mathcal{A}$*.*

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$*,*
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\, a, b \in A$*,*
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$*,*
4. ...

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta* $*$*-podalgebra Hopfa w* A*,*
- $(f_z)_{z \in \mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na* $\mathcal{A}$*.*

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$*,*
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\, a, b \in A$*,*
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$*,*
4. ...

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta* $*$*-podalgebra Hopfa w* A,
- $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na* $\mathcal{A}$.

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$,
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\, a, b \in A$,
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$,
4. …

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta* $*$*-podalgebra Hopfa w* A*,*
- $(f_z)_{z \in \mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na* $\mathcal{A}$*.*

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$*,*
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\, a, b \in A$*,*
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$*,*
4. …

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta* $*$*-podalgebra Hopfa w* A*,*
- $(f_z)_{z \in \mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na* $\mathcal{A}$*.*

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$*,*
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\, a, b \in A$*,*
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$*,*
4. $\ldots$

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta $*$-podalgebra Hopfa w A,*
- $(f_z)_{z \in \mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na $\mathcal{A}$.*

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$,
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\, a, b \in A$,
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$,
4. …

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta $*$-podalgebra Hopfa w A,*
- $(f_z)_{z \in \mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na $\mathcal{A}$.*

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$,
2. h *jest śladem*, *tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\, a, b \in A$,
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$,
4. …

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta $*$-podalgebra Hopfa w A,*
- $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na $\mathcal{A}$.*

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$,
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\, a, b \in A$,
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$,
4. …

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta* $*$*-podalgebra Hopfa w* A,
- $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na* $\mathcal{A}$.

Następujące warunki są równoważne:

1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$,
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\ a, b \in A$,
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$,
4. ...

Efekty kwantowe

Twierdzenie (S.L. Woronowicz)

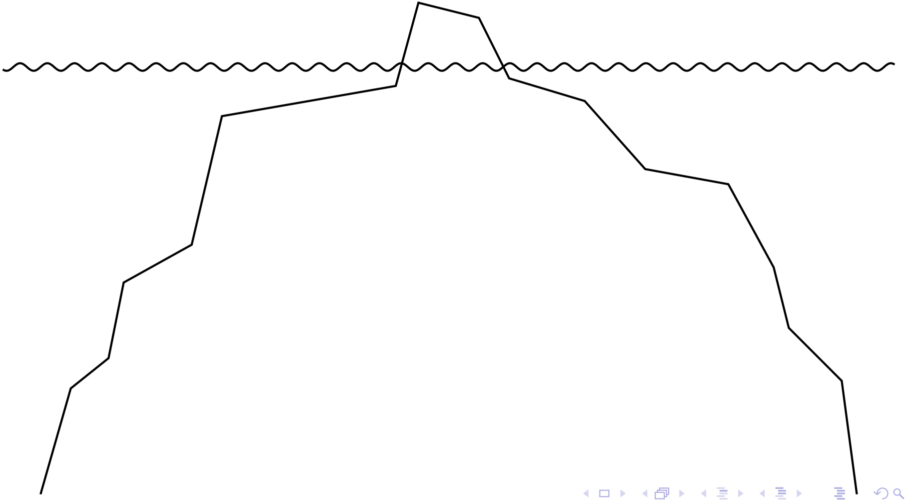
- $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ — *zwarta grupa kwantowa,*
- $\mathcal{A}$ — *gęsta* $*$*-podalgebra Hopfa w* A,
- $(f_z)_{z \in \mathbb{C}}$ — *rodzina funkcjonałów modularnych na* $\mathcal{A}$.

Następujące warunki są równoważne:

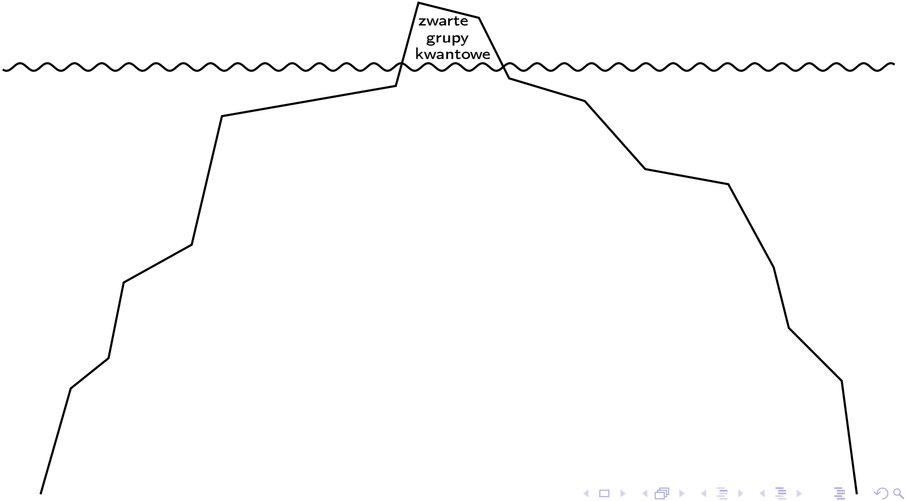
1. $f_z = f_0$ *dla wszystkich* $z \in \mathbb{C}$,
2. h *jest śladem, tzn.* $h(ab) = h(ba) \quad \forall\ a, b \in A$,
3. $\kappa^2 = \mathrm{id}$,
4. ...

Góra lodowa

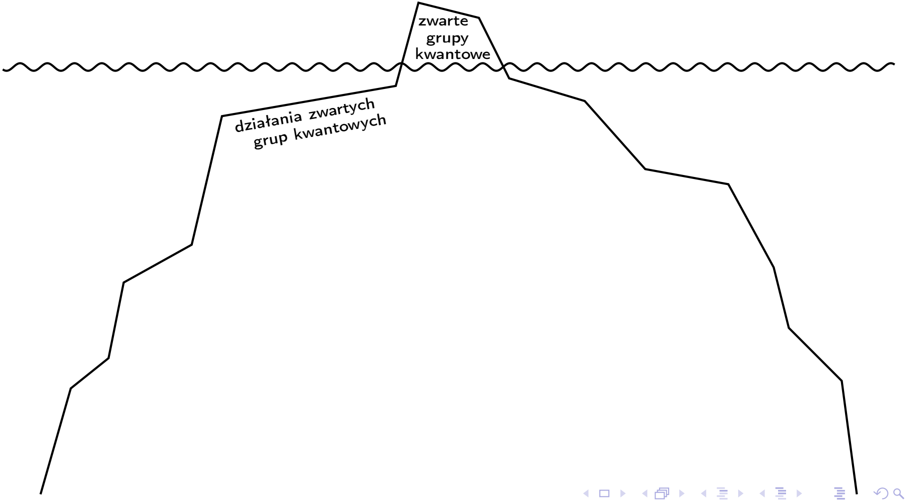
Góra lodowa



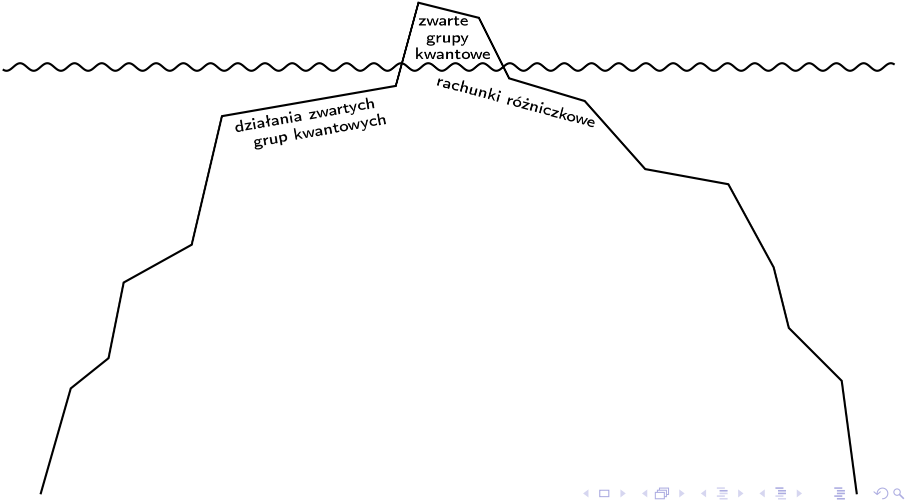
Góra lodowa



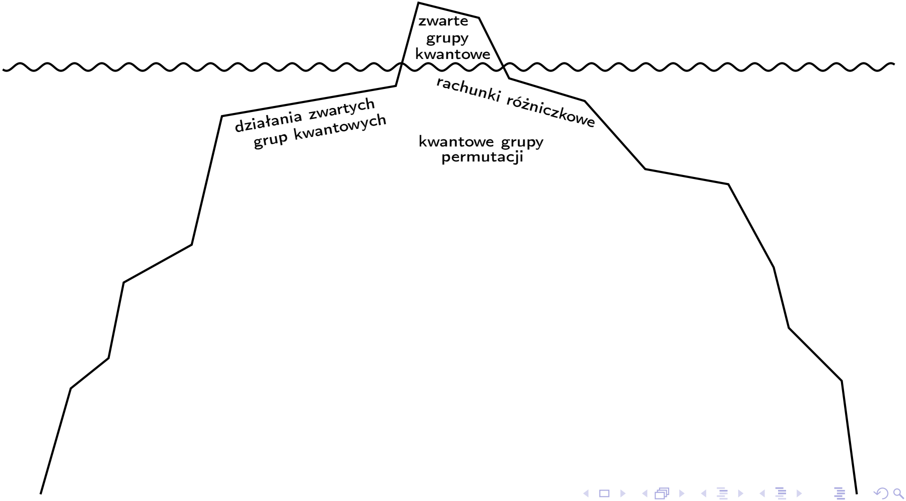
Góra lodowa


zwarte
grupy
kwantowe
działania zwartych
grup kwantowych

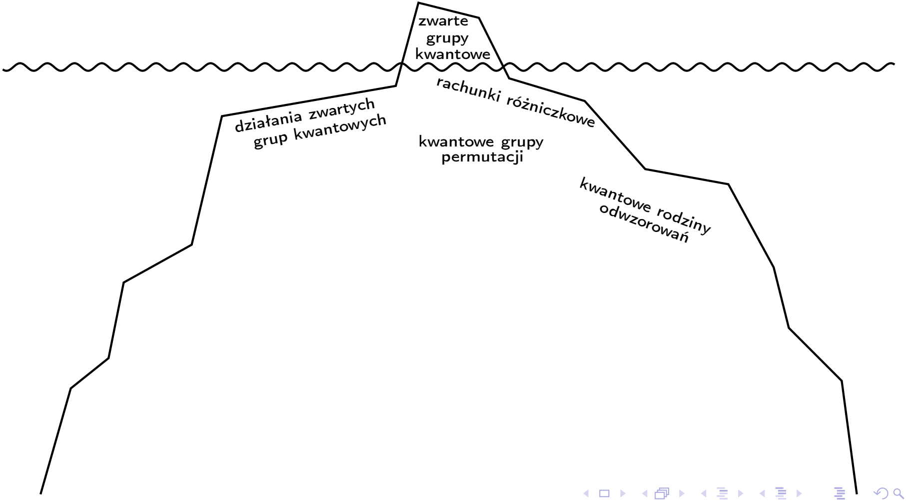
Góra lodowa


zwarte
grupy
kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych
grup kwantowych

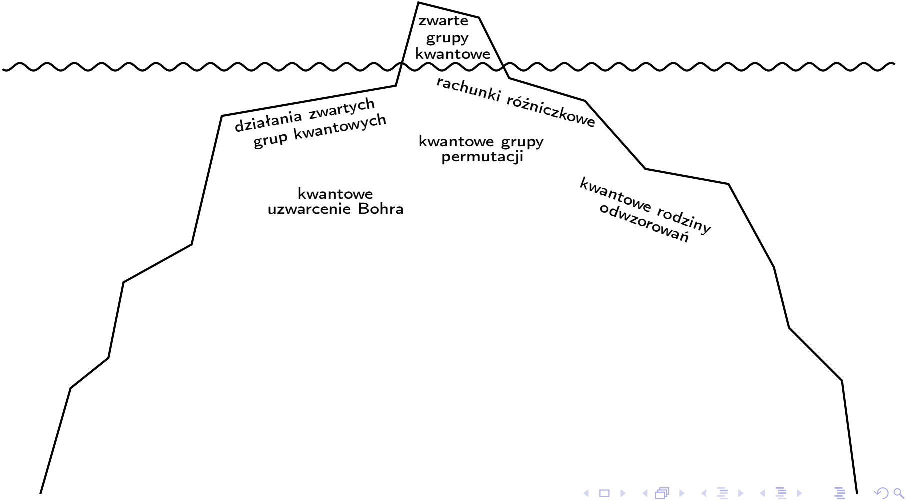
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji

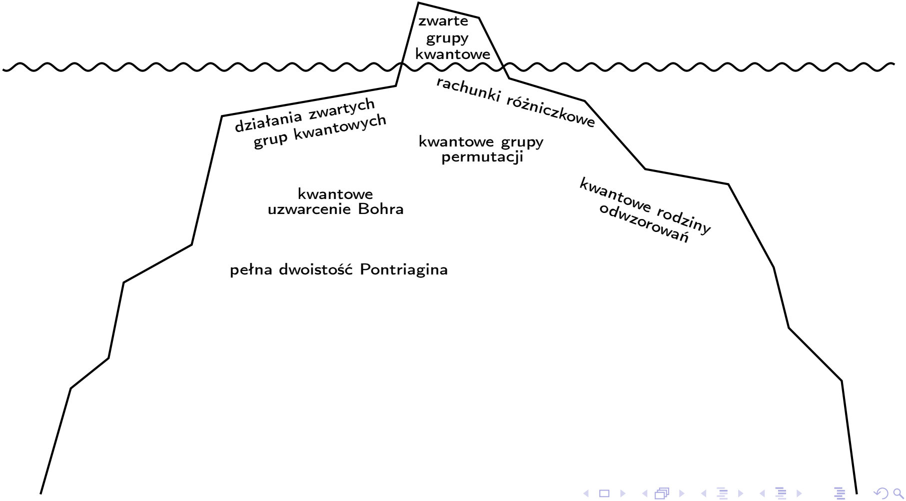
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
działania zwartych grup kwantowych
rachunki różniczkowe
kwantowe grupy permutacji
kwantowe rodziny odwzorowań

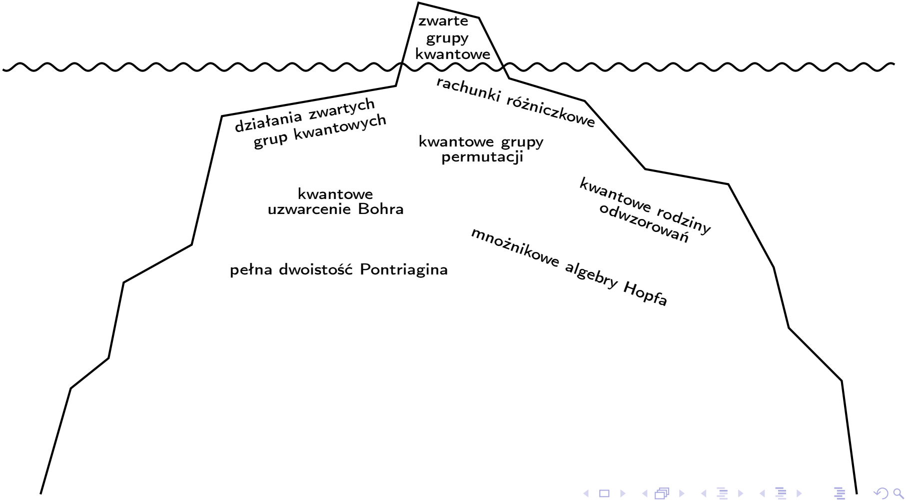
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań

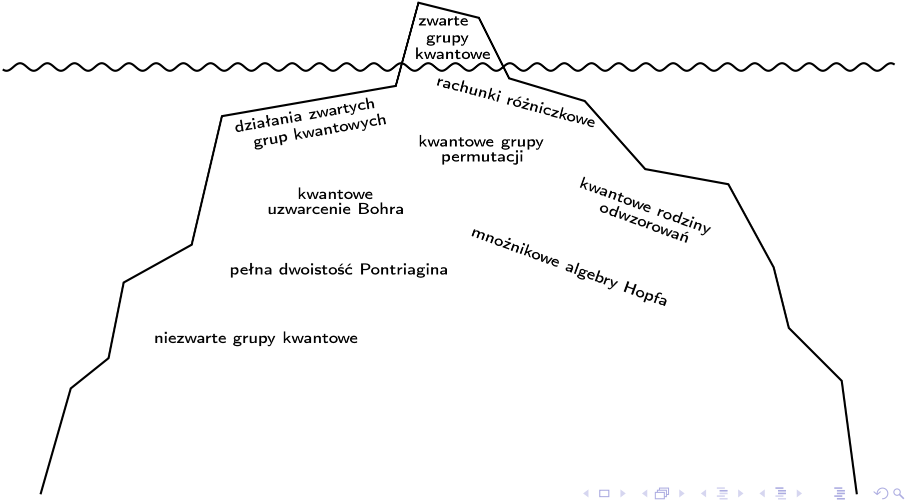
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
pełna dwoistość Pontriagina

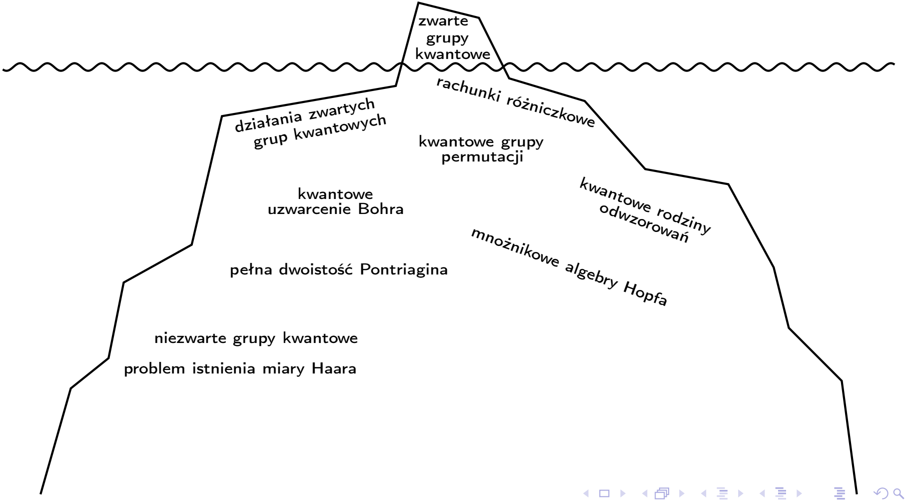
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina

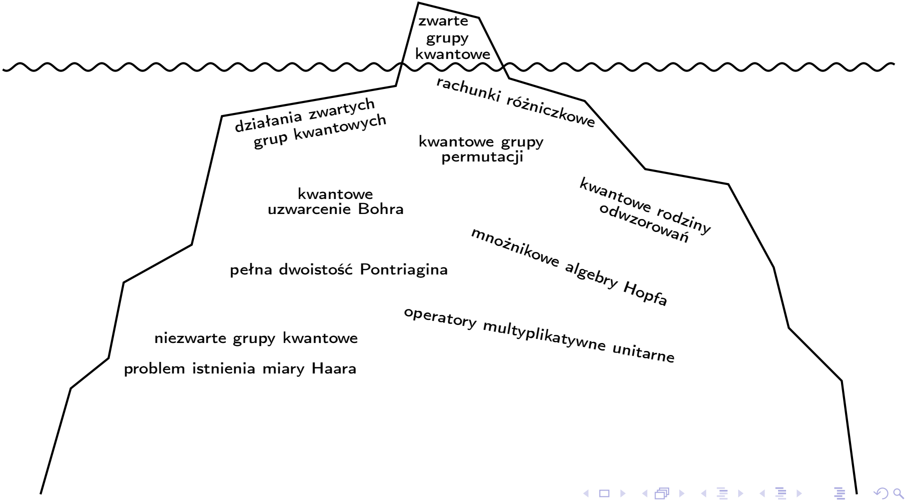
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina
niezwarte grupy kwantowe

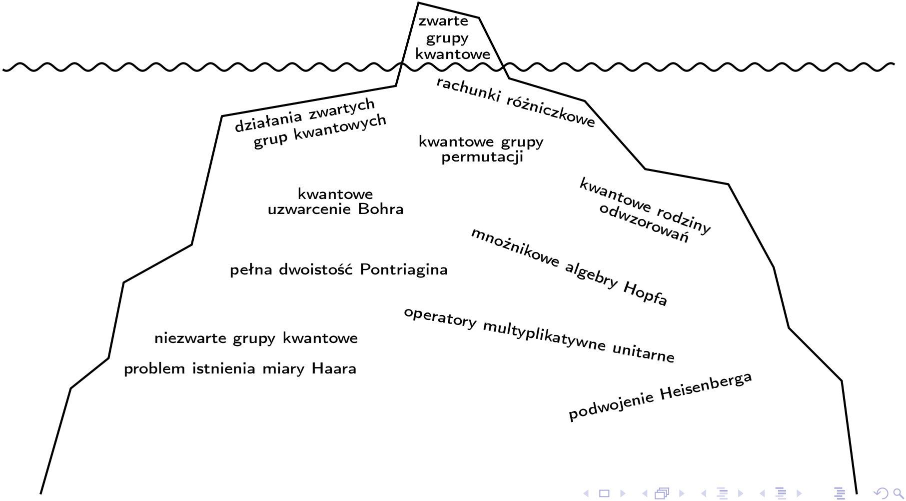
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina
niezwarte grupy kwantowe
problem istnienia miary Haara

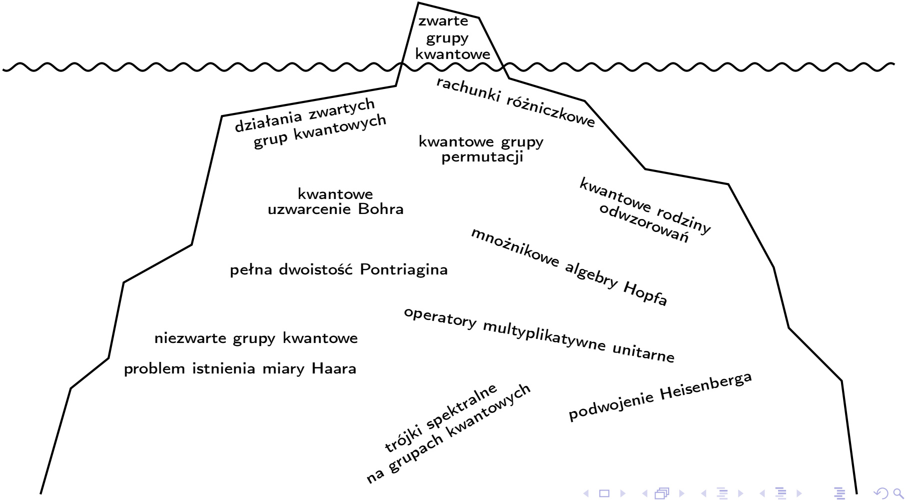
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina
operatory multyplikatywne unitarne
niezwarte grupy kwantowe
problem istnienia miary Haara

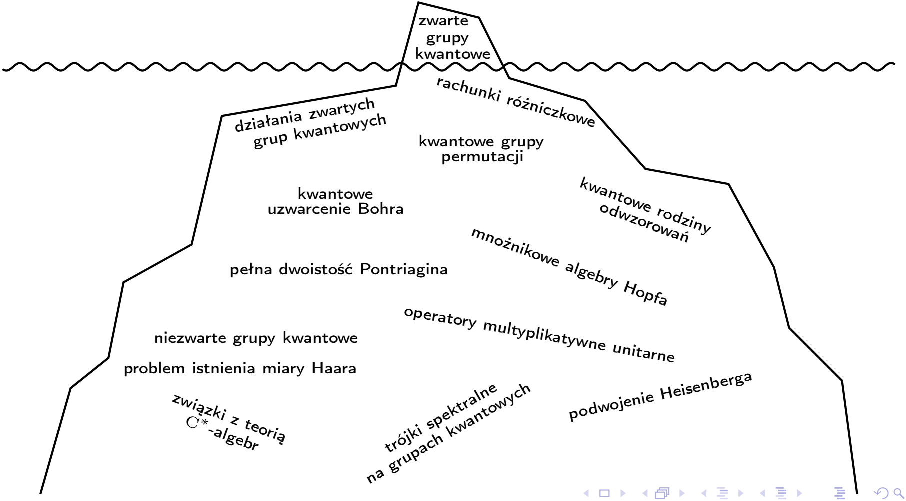
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina
operatory multyplikatywne unitarne
niezwarte grupy kwantowe
problem istnienia miary Haara
podwojenie Heisenberga

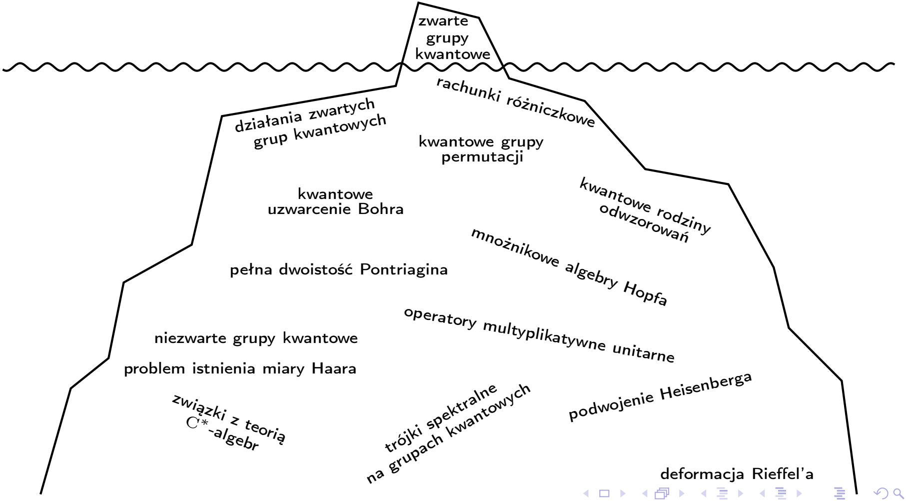
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina
operatory multyplikatywne unitarne
niezwarte grupy kwantowe
problem istnienia miary Haara
trójki spektralne na grupach kwantowych
podwojenie Heisenberga

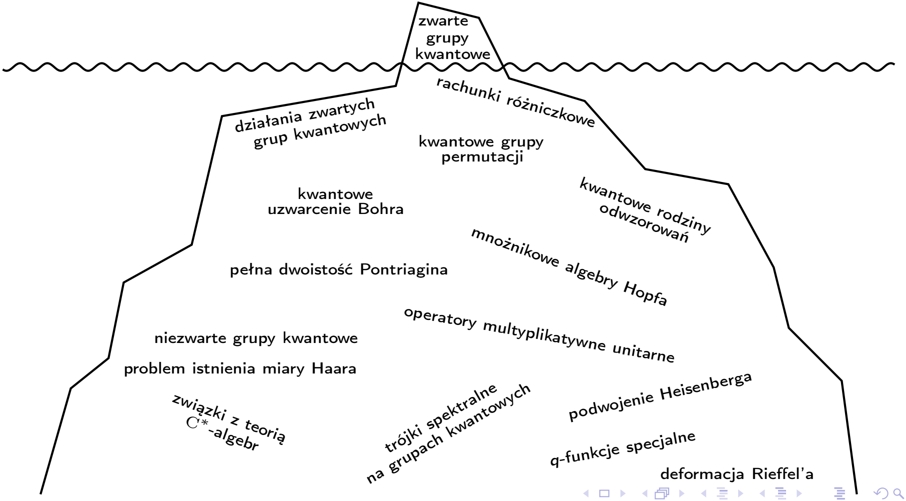
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina
operatory multyplikatywne unitarne
niezwarte grupy kwantowe
problem istnienia miary Haara
podwojenie Heisenberga
związki z teorią C^*-algebr
trójki spektralne na grupach kwantowych

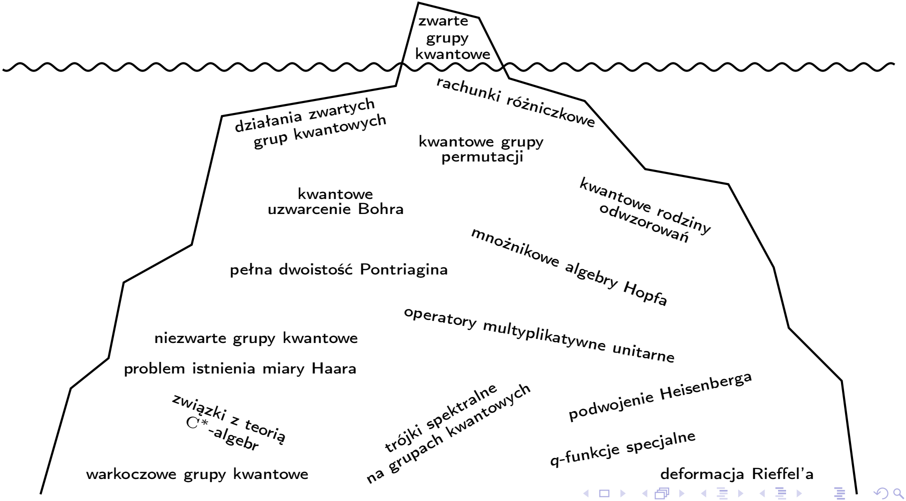
Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina
operatory multyplikatywne unitarne
niezwarte grupy kwantowe
problem istnienia miary Haara
podwojenie Heisenberga
związki z teorią C^*-algebr
trójki spektralne na grupach kwantowych
deformacja Rieffel'a

Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
pełna dwoistość Pontriagina
mnożnikowe algebry Hopfa
operatory multyplikatywne unitarne
niezwarte grupy kwantowe
problem istnienia miary Haara
związki z teorią C^*-algebr
trójki spektralne na grupach kwantowych
podwojenie Heisenberga
q-funkcje specjalne
deformacja Rieffel'a

Góra lodowa


zwarte grupy kwantowe
rachunki różniczkowe
działania zwartych grup kwantowych
kwantowe grupy permutacji
kwantowe uzwarcenie Bohra
kwantowe rodziny odwzorowań
mnożnikowe algebry Hopfa
pełna dwoistość Pontriagina
operatory multyplikatywne unitarne
niezwarte grupy kwantowe
problem istnienia miary Haara
związki z teorią C^*-algebr
trójki spektralne na grupach kwantowych
podwojenie Heisenberga
q-funkcje specjalne
warkoczowe grupy kwantowe
deformacja Rieffel'a