Multyplikatywne unitarne operatory w teorii grup kwantowych

Piotr Mikołaj Sołtan

14 Grudnia 2001

TEORIA GRUP

GRUPY KWANTOWE

NIEPRZEMIENNA GEOMETRIA

Teoria grup = Teoria lokalnie zwartych grup topologicznych (np. grupy Liego)

NIEPRZEMIENNA GEOMETRIA

Przestrzeń lokalnie zwarta X	$\Longleftrightarrow$	Algebra funkcji ciągłych znikających w ∞ $A = C_\infty(X)$

- A jest przemienna: $fg = gf$, $\forall f, g \in A$,
- A ma normę $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$,
- mnożenie funkcji jest ciągłe: $\|fg\| \le \|f\| \|g\|$,
- $(A, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha,
- A ma inwolucję $f \longmapsto f^*$, $f^*(x) = \overline{f(x)}$,
- A jest C^*-algebrą: $\|f^* f\| = \|f\|^2$.

GRUPY KWANTOWE

przestrzeń G	C^*-algebra A
mnożenie $\mu\colon G \times G \longrightarrow G$ $\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$	komnożenie $\Delta\colon A \longrightarrow A \otimes A$ $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$
odwrotność $g \longmapsto g^{-1}$	koodwrotność $\kappa\colon A \longrightarrow A$
$\vdots$	$\vdots$

Co się robi z grupami kwantowymi?

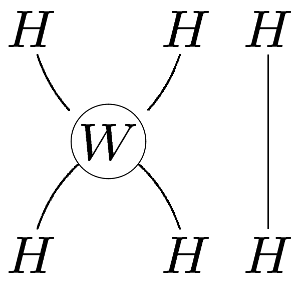
$\star$	miara Haara	dodatni funkcjonał h na A
$\star$	struktura różniczkowa	bimoduł form Ω oraz $d\colon A \longrightarrow \Omega$
$\star$	działania grup kwantowych	kodziałania $B \longrightarrow A \otimes B$
$\star$	teoria reprezentacji	koreprezentacje $u \in M(\mathcal{K}(H) \otimes A)$

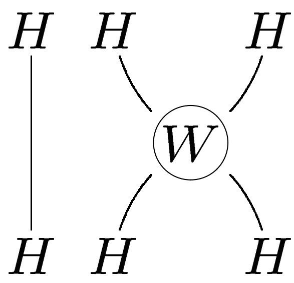
Definicja: Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $W \in B(H \otimes H)$ operatorem unitarnym.

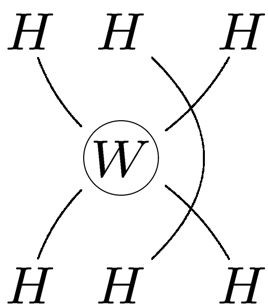
W jest **multyplikatywny**, jeśli

$$W_{23}W_{12} = W_{12}W_{13}W_{23},$$

gdzie

$W_{12} \quad =$ 

$W_{23} \quad =$ 

$W_{13} \quad =$ 

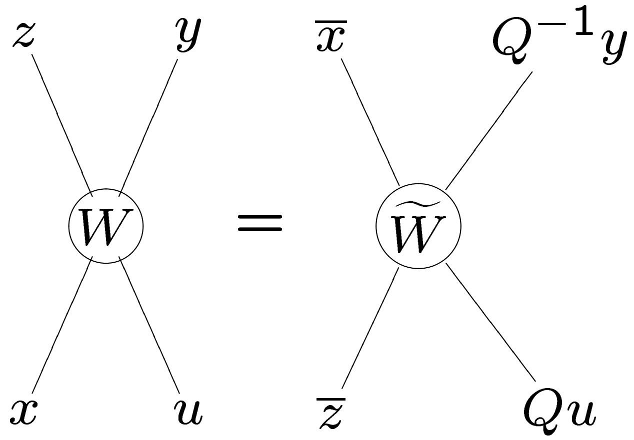
Definicja: Niech $W \in B(H \otimes H)$ będzie multyplikatywnym operatorem unitarnym.

W jest **poręczny**, jeśli istnieje dodatni samosprzężony operator $Q\colon H \longrightarrow H$ i operator unitarny $\widetilde{W} \in B(\overline{H} \otimes H)$ takie, że

$$W(Q \otimes Q)W^* = Q \otimes Q,$$

$$(x \otimes u|W|z \otimes y) = \left(\overline{z} \otimes Qu\middle|\widetilde{W}\middle|\overline{x} \otimes Q^{-1}y\right)$$

dla wszystkich $x, z \in H$, $u \in D(Q)$ i $y \in D(Q^{-1})$.



Operator Kaca-Takesakiego jest poręczny.

Twierdzenie: Niech $W \in B(H \otimes H)$ będzie <u>poręcznym</u> multyplikatywnym operatorem unitarnym. Wówczas

1. zbiory

$$A = \{(\omega \otimes \mathrm{id})(W) : \omega \in B(H)_*\}^{-\|\cdot\|},$$

$$\hat{A} = \{(\mathrm{id} \otimes \omega)(W^*) : \omega \in B(H)_*\}^{-\|\cdot\|}$$

   są C^*-algebrami,

2. $W \in M(\hat{A} \otimes A)$,

3. istnieje dokładnie jeden kołączny morfizm $\Delta\colon A \longrightarrow A \otimes A$ taki, ze

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(W) = W_{12}W_{13}.$$

   ponadto

$$\Delta(a) = W(a \otimes I)W^*$$

   dla wszystkich $a \in A$,

4. istnieje jedyny gęsto określony i domknięty operator $\kappa \colon A \longrightarrow A$ taki, że

$$\kappa((\omega \otimes \mathrm{id})(W)) = (\omega \otimes \mathrm{id})(W^*).$$

I dużo, dużo więcej ;-).

Na przykład istnieje dokładnie jeden antyautomorfizm R C^*-algebry A i dokładnie jedna jednoparametrowa grupa $(\tau_t)_{t\in\mathbb{R}}$ automorfizmów A takie, że

$$\kappa = R \circ \tau_{\frac{i}{2}},$$

gdzie $\tau_{\frac{i}{2}}$ jest przedłużeniem analitycznym grupy (τ_t) do punktu $\frac{i}{2}$. Ponadto

$$\tau_t(a) = Q^{2it} a Q^{-2it}$$

dla wszystkich $a \in A$.

Zamieniając W na (również poręczny) **dualny** operator multyplikatywny unitarny $\widehat{W} = \Sigma W^* \Sigma$ otrzymujemy to samo twierdzenie z zamienionymi algebrami A i $\widehat{A}$.

$\Gamma = \langle q, q^{it} : t \in \mathbb{R} \rangle$ jest grupą przemienną z miarą Haara

$$\int_{\Gamma} f(\gamma)\, d\gamma = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^k q^{it})\, dt.$$

Funkcje specjalne:

$$\mathbb{F}_q(\gamma) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 + \overline{q}^{2k}\overline{\gamma}}{1 + q^{2k}\gamma}$$

$$\chi(q^n q^{it}, q^{n'} q^{it'}) = \exp\left(i \,\mathrm{Im} \left(\frac{(n+it)(n'+it')}{\rho} \right) \right)$$

(pamiętamy, że $q = \exp\left(\rho^{-1}\right)$).

Definiujemy (nieograniczone) operatory na $H = L^2(\Gamma)$:

$$(bf)(\gamma) = \gamma f(\gamma),$$

oraz

$$a = \int_{\Gamma} \gamma \, dE(\gamma).$$

$E =$ pewna miara spektralna na Γ.

Niech

$$W = \mathbb{F}_q(b^{-1}a \otimes b)\chi(b^{-1} \otimes I, I \otimes a).$$

W jest multyplikatywnym unitarnym na $H \otimes H$, ale

$$\boxed{W \text{ nie jest poręczny}}$$

$\widetilde{W} =$ skomplikowany wzór.

$Q = |a|$, $\widehat{Q} = |b|$.

Definicja: Niech $W \in B(H \otimes H)$ będzie multyplikatywnym operatorem unitarnym.

W jest **modularny**, jeśli istnieją dwa dodatnie samosprzężone operatory $Q, \widehat{Q}\colon H \longrightarrow H$ i operator unitarny $\widetilde{W} \in B(\overline{H} \otimes H)$ takie, że

$$W(Q \otimes \widehat{Q})W^* = Q \otimes \widehat{Q},$$

$$(x \otimes u|W|z \otimes y) = \left(\overline{z} \otimes Qu\middle|\widetilde{W}\middle|\overline{x} \otimes Q^{-1}y\right)$$

dla wszystkich $x, z \in H$, $u \in D(Q)$ i $y \in D(Q^{-1})$.

Każdy poręczny operator multyplikatywny unitarny jest modularny, ale nie na odwrót.

Twierdzenie: Niech $W \in B(H \otimes H)$ będzie modularnym multyplikatywnym operatorem unitarnym. Wówczas

1. zbiory
$$A = \{(\omega \otimes \mathrm{id})(W) : \omega \in B(H)_*\}^{-\|\cdot\|},$$
$$\widehat{A} = \{(\mathrm{id} \otimes \omega)(W^*) : \omega \in B(H)_*\}^{-\|\cdot\|}$$
są C^*-algebrami,

2. $W \in M(\widehat{A} \otimes A)$,

3. istnieje dokładnie jeden kołączny morfizm $\Delta\colon A \longrightarrow A \otimes A$ taki, ze
$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(W) = W_{12}W_{13}.$$
ponadto
$$\Delta(a) = W(a \otimes I)W^*$$
dla wszystkich $a \in A$,

4. istnieje jedyny gęsto określony i domknięty operator $\kappa\colon A \longrightarrow A$ taki, że

$$\kappa((\omega \otimes \mathrm{id})(W)) = (\omega \otimes \mathrm{id})(W^*).$$

Reszta twierdzenia sformułowanego wcześniej dla poręcznych multyplikatywnych unitarnych też jest prawdziwa. Dualny multyplikatywny unitarny $\widehat{W} = \Sigma W^* \Sigma$ także jest modularny i zamieniając W na $\widehat{W}$ otrzymujemy takie samo twierdzenie z zamienionymi algebrami A i $\widehat{A}$.

Okazuje się, że

$$\widehat{\tau}_t(b) = \widehat{Q}^{2it} b \widehat{Q}^{-2it}$$

dla wszystkich $b \in \widehat{A}$.