Zadania z OTW
Kolokwium poprawkowe

Na 4-wymiarowej rozmaitości M dany jest tensor metryczny

$$g = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\left(d\chi^2 + \sinh^2\chi\, d\phi^2\right) \tag{1}$$

gdzie funkcje (t, r, χ, ϕ) tworzą układ współrzędnych tam, gdzie

$$f(r) \neq 0 \neq \sinh\chi. \tag{2}$$

Wybrać ko-reper

$$e^1 = \sqrt{|f|}dt,\ e^2 = \frac{dr}{\sqrt{|f|}},\ e^3 = rd\chi,\ e^4 = r\sinh\chi\, d\phi \tag{3}$$

i:

(i) Obliczyć 1-formę koneksji $\Gamma^i{}_j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ zakładając jej beztorsyjność oraz metryczność.

(ii) Obliczyć 2-formę krzywizny $\mathcal{R}^i{}_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}e^k \wedge e^l$.

(iii) Obliczyć tensor Ricciego R_{ij}

$$R_{ij} := R^k{}_{ikj}. \tag{4}$$

(iv) Znaleźć wszystkie funkcje f, dla których

$$R_{ij} = \Lambda\, g_{ij} \tag{5}$$

gdzie Λ jest dowolną funkcją (wyjaśnić, że Λ musi być stała).

(v) Dla funkcji f z podpunktu (iv) obliczyć skalar

$$R_{ijkl}R^{ijkl} \tag{6}$$

i ustalić jego punkty osobliwe.

(vi) Dla funkcji f z podpunktu (iv) przedyskutować rozwiązania równania

$$f(r) = 0. \tag{7}$$

(vi) obliczyć przyspieszenie obserwatora, którego linią świata jest linia całkowa pola Killinga ∂_t (czyli „spoczywającego") dla funkcji f z podpunktu (iv). Znaleźć wartości r, dla których linia jest geodezyjna i te, dla których długość wektora przyspieszenia dąży do $\pm\infty$.

Wskazówka. Przyspieszenie a obserwatora spoczywającego na linii całkowej pola Killinga ξ tensora metrycznego g (czyli pola wektorowego takiego, że $\mathcal{L}_\xi g = 0$) dane jest wzorem

$$a_i = \frac{\nabla_i \left(\xi^j \xi_j\right)}{2\xi^k \xi_k} \tag{8}$$