

Wykład 1

Obwody prądu stałego i zmiennego

29 lutego 2016

Krzysztof Korona

Wstęp

1. Prąd stały

- 1.1 Podstawowe pojęcia
- 1.2 Prawa Ohma Kirchhoffa
- 1.3 Przykłady prostych obwodów

2. Prąd zmienny

- 2.1 Podstawowe elementy
- 2.2 Obwody RC i RL
- 2.3 Impedancja
- 2.4 Filtry
- 2.5 Obwody rezonansowe

Obwody prądu stałego

Wielkości podstawowe

Ładunek elektryczny mierzymy w kulombach.

1 C = $6,24 \cdot 10^{18}$ ładunków elementarnych e;

$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C;

Ładunek oznaczamy q, Q .

1 mol protonów = 96,5 kC = 1 faradaj.

Natężenie prądu to ładunek przepływający w jednostce czasu.

$$I = q/t$$

Natężenie mierzymy w amperach: 1 A = 1 C/s.

Potencjał elektryczny to energia, jaką w danym miejscu posiada jednostkowy ładunek.

Potencjał mierzymy w woltach: 1 V = 1 J/C.

Napięcie elektryczne to różnica potencjałów. Mierzmy je w woltach.

Napięcie oznaczamy literą U .

Wielkości podstawowe

Napięcie elektryczne to różnica potencjałów, czyli praca potrzebna do przesunięcia jednostkowego ładunku między dwoma punktami obwodu.

$$W = q \cdot U$$

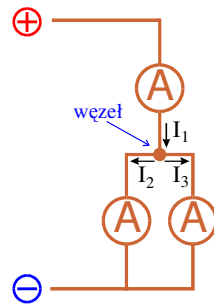
Jeżeli pod wpływem napięcia U płynie prąd I , to przenosi on moc P .

$$P = I \cdot U$$

Moc mierzymy w watach, W. 1 W = 1 A * V = 1 J/s

Zasada zachowania ładunku a przepływ prądu

Ładunek nie znika, ani nie powstaje, zatem ładunek, który dopłynął do węzła, musi z niego wypłynąć.

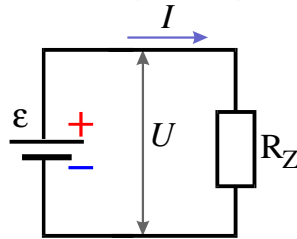


I prawo Kirchhoffa:

Suma natężeń prądów dopływających i odpływających z węzła wynosi zero.

$$\sum_j I_j = 0$$

Obwód elektryczny z zasilaniem



Zewnętrzne napięcie elektryczne, U :

spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu.

Siła elektromotoryczna, $\mathcal{E}$:

energia elektryczna uzyskana przez jednostkowy ładunek na odcinku obwodu zawierającym źródło prądu, a nie zawierającym rezystancji.

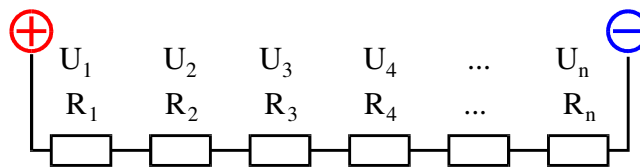
Zasada zachowania energii a rozkład napięć

Energia ładunku w polu zależy od potencjału w danym miejscu, a nie od drogi jaką przebył.

II prawo Kirchhoffa:

Suma napięć na oporach w obwodzie zamkniętym jest równa sumie sił elektromotorycznych.

$$\sum_j U_j = \sum_k \varepsilon_k$$



Prawo Ohma

W przypadku liniowej zależności napięcia od natężenia współczynnik proporcjonalności nazywamy oporem.

$$U = R \cdot I$$

Napięcie jest proporcjonalne do oporu i do natężenia.

Opór mierzymy w omach, $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$.

Odwrotność oporu nazywamy przewodnictwem, oznaczamy S.

Jednostka: simens, $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1} = 1 \text{ A/V}$.

Moc prądu

Moc prądu:

$$P = I \cdot U.$$

Prawo Ohma:

$$I = U/R.$$

Możemy otrzymać inne wyrażenia na moc prądu:

$$P = U^2/R = I^2 R.$$

W przypadku prądu przemiennego:

$$P = U_A^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle_T / R.$$

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle_T = 1/2$$

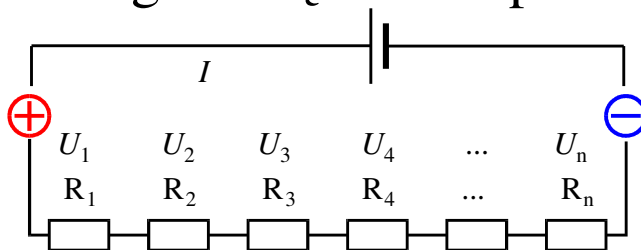
$$P = \frac{U_A^2}{2 \cdot R}$$

Wprowadzamy napięcie skuteczne, $U_S = \frac{U_A}{\sqrt{2}}$, takie że $P = \frac{U_S^2}{R}$

Mierniki podają wartość skuteczną.

$$\sqrt{2} = 1,414; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707;$$

Szeregowe łączenie oporników



$$U_S = \sum_{k=1}^n U_k$$

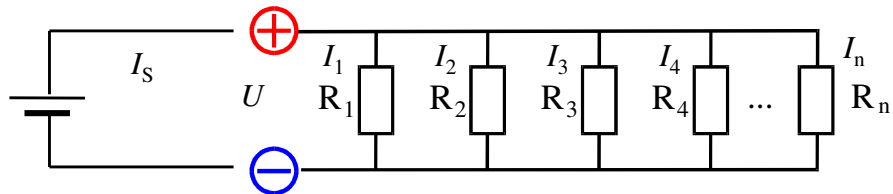
$$I = \text{const}$$

$$\frac{U_S}{I} = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{I}$$

$$R_S = \sum_{k=1}^n R_k$$

Przy połączeniu szeregowym, opory sumują się.

Równoległe łączenie oporników



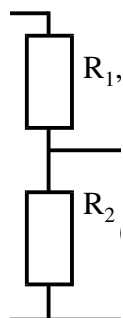
$$I_S = \sum_{k=1}^n I_k$$

$$U = \text{const} \quad \frac{I_S}{U} = \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{U}$$

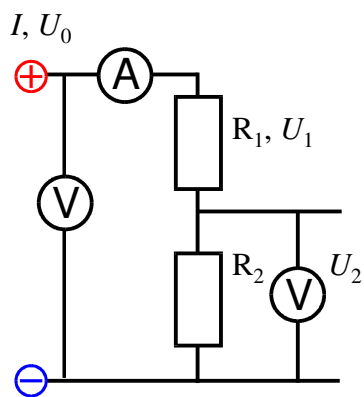
$$\frac{1}{R_S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

Przy połączeniu równoległym, sumują się przewodnictwa, $1/R$.

Przykłady obwodów - dzielnik napięcia



Przykłady obwodów - dzielnik napięcia



Całkowity opór obwodu

$$R_S = R_1 + R_2$$

Natężenie prądu płynącego przez obwód:

$$I = U_0 / (R_1 + R_2)$$

Zakładamy, że do wyjścia nie płynie prąd.

Napięcie na wyjściu:

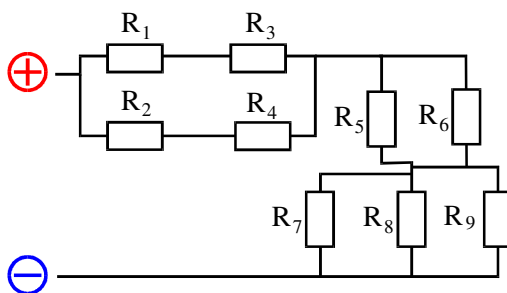
$$U_2 = R_2 \cdot I$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

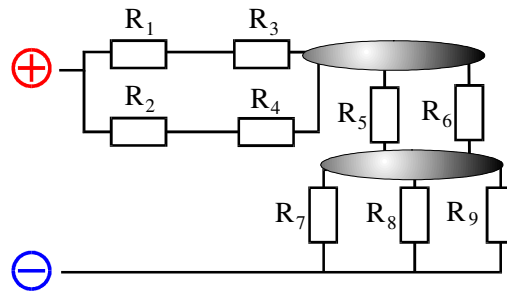
Liczenie oporu całkowitego

Zadanie:

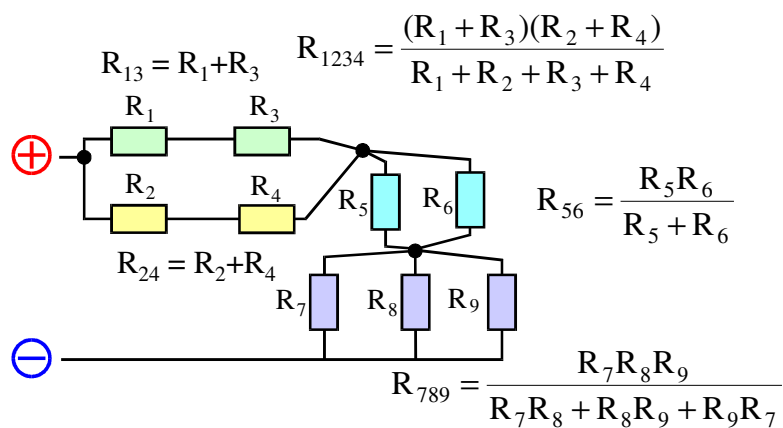
Obliczyć opór całkowity poniższego obwodu:



Liczenie oporu - wskazywanie węzłów



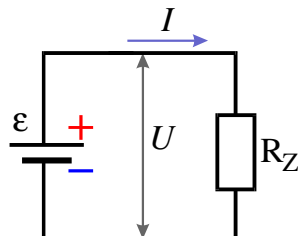
Liczenie oporu - sumowanie



$$R_S = R_{1234} + R_{56} + R_{789}$$

$$R_S = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} + \frac{R_7 R_8 R_9}{R_7 R_8 + R_8 R_9 + R_9 R_7}$$

Obwód elektryczny z zasilaniem



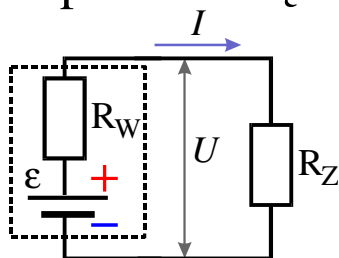
Zewnętrzne napięcie elektryczne, U :

spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu.

Siła elektromotoryczna, ε :

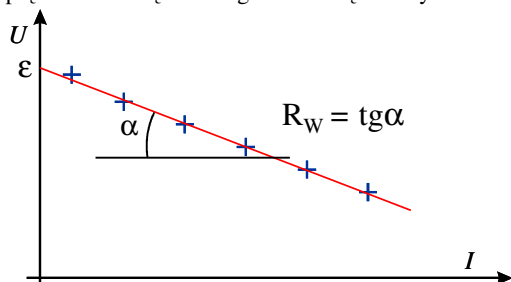
energia elektryczna uzyskana przez jednostkowy ładunek na odcinku obwodu zawierającym źródło prądu, a nie zawierającym rezystancji.

Opór wewnętrzny



Rzeczywiste źródła napięcia musimy przedstawić w postaci obwodu zastępczego złożonego z idealnego źródła o sile elektromotorycznej ε i z oporu wewnętrznego R_W . Napięcie na zewnątrz takiego źródła będzie wynosiło:

$$U = \varepsilon - R_W I$$

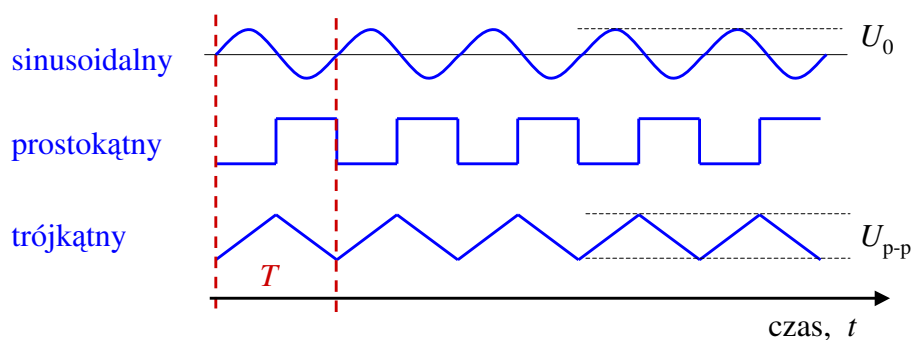


Obwody prądu zmiennego

Prąd zmienny jest najważniejszą formą zastosowań elektryczności. Dzięki niemu funkcjonuje większość urządzeń w naszych domach.

Temat jest dość trudny i do pełnego zrozumienia wymaga dobrej znajomości trygonometrii, rachunku różniczkowego i liczb zespolonych. Na tym kursie zajmiemy się jedynie najprostszymi przykładami z tej tematyki takimi jak: obwód RC i RLC czy filtry.

Przebiegi zmiennoprądowe



T - okres zmienności

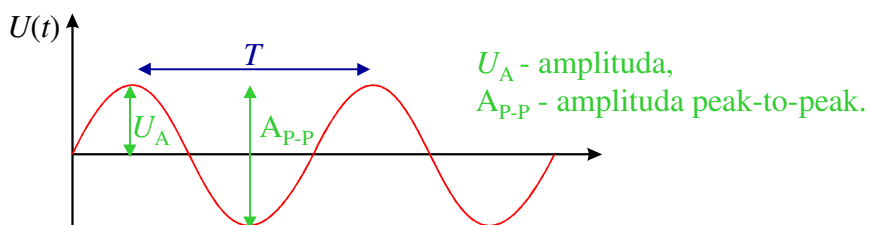
$f = \frac{1}{T}$ - częstotliwość

U_0 - amplituda napięcia

U_{p-p} - napięcie międzyszczytowe "peak to peak",
dla przebiegów symetrycznych $U_{p-p} = 2 * U_0$

Prąd przemienny

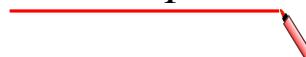
$$U = U_A \sin(\omega \cdot t)$$



Okres, T , podajemy w sekundach.

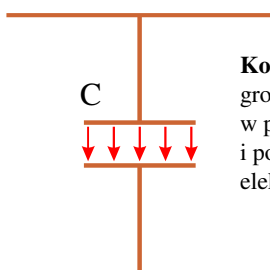
Częstość, $f = 1/T$, podajemy w hercach, $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$.

Częstość (kołową): $\omega = \frac{2\pi}{T}$, podajemy w s^{-1} .

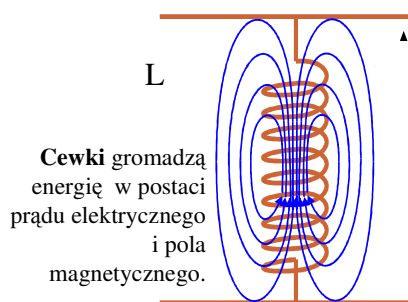


Kondensator i cewka

W obwodach elektrycznych występują dwa rodzaje elementów, które mogą gromadzić energię.

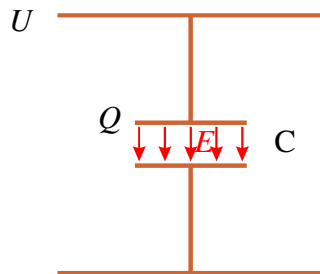


Kondensatory
 gromadzą energię
 w postaci ładunku
 i pola
 elektrycznego.



Cewki gromadzą
 energię w postaci
 prądu elektrycznego
 i pola
 magnetycznego.

Pojemność



Pojemność kondensatora to ładunek jaki może zgromadzić przy jednostkowym napięciu.

$$C = \frac{Q}{U}$$

Jednostką pojemności jest farad, [F].

Ładunek na kondensatorze:

$$Q = C \cdot U.$$

Natężenie prądu to ładunek przepływający w jednostkowym czasie:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Prąd w obwodzie z kondensatorem będzie równy:

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

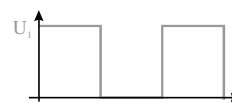
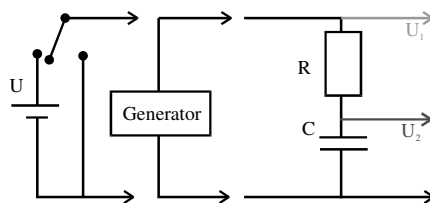
Napięcie na kondensatorze będzie całką z prądu dopływającego do kondensatora:

$$U(t) = C^{-1} \int I(t) dt$$

Kondensator całkuje

Napięcie na kondensatorze będzie całką z prądu dopływającego do kondensatora:

$$U(t) = C^{-1} \int I(t) dt$$



$$I = \frac{U_1 - U_2}{R}$$

$$\frac{dU_2}{dt} = A - \frac{1}{RC} U_2;$$

$$A = \frac{U_1}{RC} = \text{const}$$

Rozładowywanie ($U_1 = 0$):

$$U(t) = U(0) \exp(-t/RC)$$

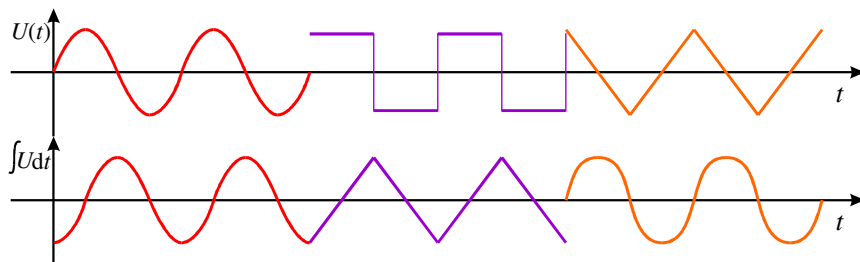
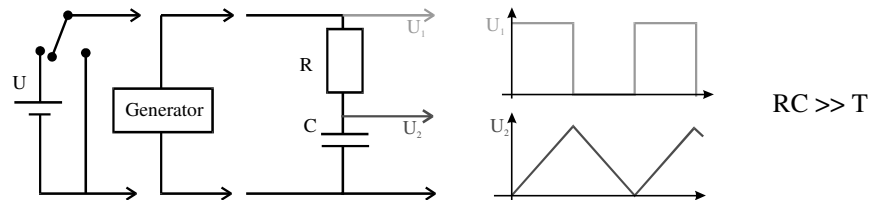
Ładowanie napięciem U_1 :

$$U(t) = U_1 (1 - \exp(-t/RC))$$

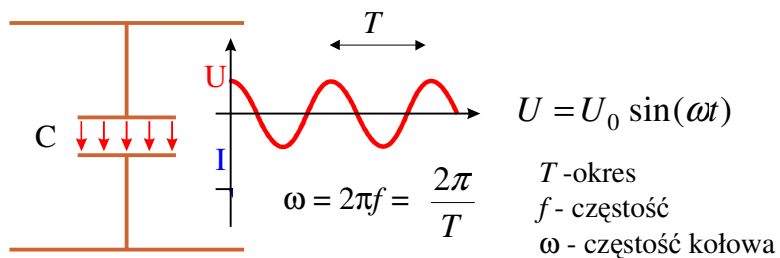
Kondensator całkuje

Napięcie na kondensatorze będzie całka z prądu dopływającego do kondensatora:

$$U(t) = C^{-1} \int I(t) dt$$



Prąd przemienny i kondensator



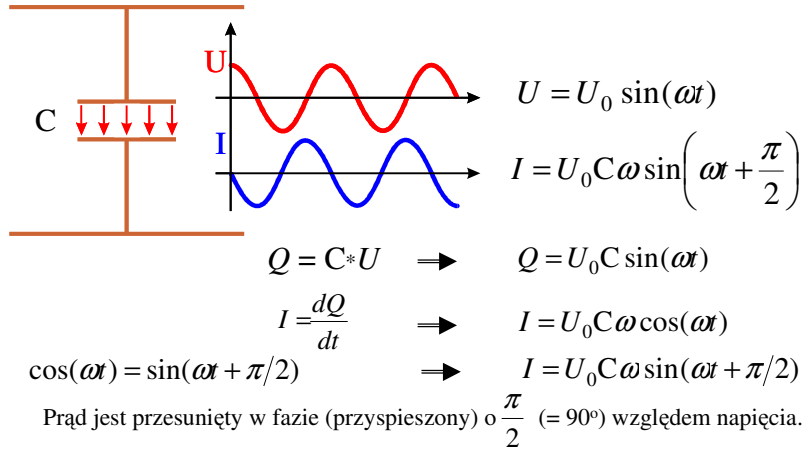
$$Q = C \cdot U \Rightarrow Q = U_0 C \sin(\omega t)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = U_0 C \omega \cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2) \Rightarrow I = U_0 C \omega \sin(\omega t + \pi/2)$$

20:50:50

Prąd przemienny i kondensator



20:50:50

Indukcja elektromagnetyczna

Na podstawie prawa Ampera, przepływ prądu, I , indukuje w cewce pole:

$$B = \alpha I$$

α - współczynnik.

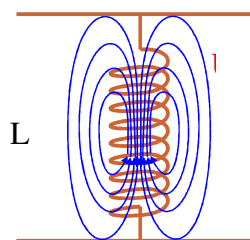
Prawo indukcji Faradaya: $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$

$\mathcal{E}$ - siła elektromotoryczna,

Φ - strumień pola magnetycznego, $\Phi = B \cdot S$.

W przypadku cewki można się spodziewać, że powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją.

Cewka



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi = B \cdot S$$

$$B = \alpha I$$

Można się spodziewać, że w przypadku cewki powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją:

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt}$$

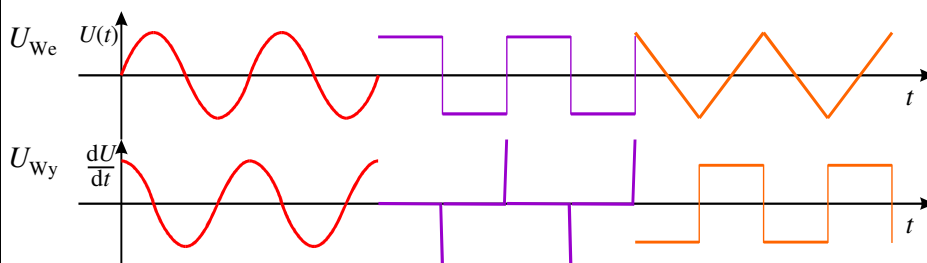
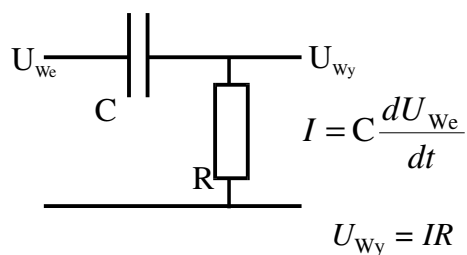
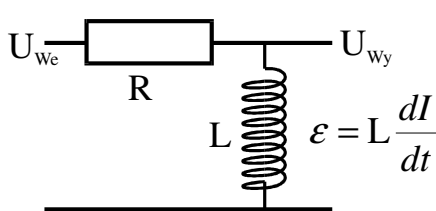
Współczynnik L nazywamy **indukcyjnością cewki**.

Indukcyjność mierzymy w henrach H, $1 \text{ H} = \text{Vs/A}$

Energia zgromadzona w cewce, przez którą płynie prąd o natężeniu I :

$$E_L = \frac{LI^2}{2}$$

Różniczkowanie przebiegu trójkątnego



Liczby zespolone

$$z = x + iy$$

$$x + iy = Ae^{i\alpha}$$

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$|z| = A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

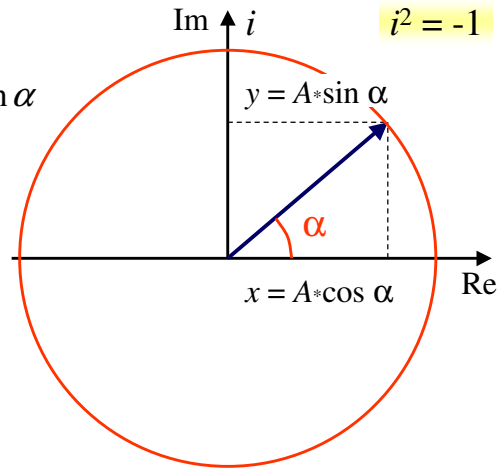
$$\alpha = \arctg(y/x)$$

$$\operatorname{Re}(z) = A \cos \alpha$$

$$\operatorname{Im}(z) = A \sin \alpha$$

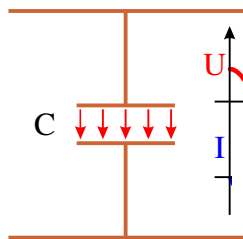
$$w = a - ib \quad |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$w = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad |w| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Prąd przemienny i liczby zespolone

$$\sin(\omega t) = \operatorname{Im}(e^{i\omega t})$$



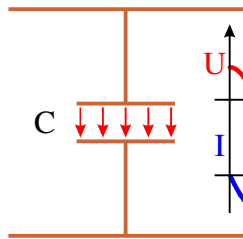
$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$Q = C \cdot U \Rightarrow Q = U_0 C e^{i\omega t}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = U_0 C i \omega e^{i\omega t}$$

Prąd przemienny i liczby zespolone

$$\sin(\omega t) = \text{Im}(e^{i\omega t})$$



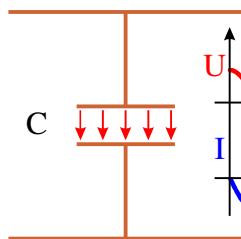
$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$I = U_0 i \omega C e^{i\omega t}$$

$$Q = C \cdot U \Rightarrow Q = U_0 C e^{i\omega t}$$

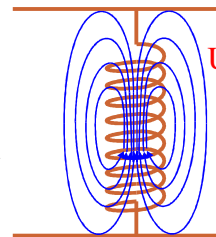
$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = U_0 C i \omega e^{i\omega t}$$

Impedancja



$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$I = i \omega C \cdot U_0 e^{i\omega t}$$



Prawo Ohma:

Napięcie jest proporcjonalne do natężenia : $U = Z \cdot I$

Impedancja kondensatora:

$$Z = \frac{1}{i \omega C}$$

$$Z = i \omega L$$

Zawada czyli wartość bezwzględna impedancji:

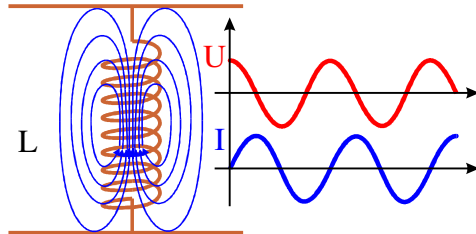
$$|Z| = \frac{1}{\omega C}$$

$$|Z| = \omega L$$

20:50:50

Cewka - impedancja

$$\frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$



$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

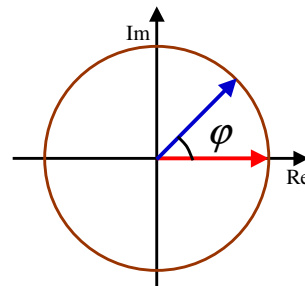
$$I = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{U_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

Impedancja: $Z = i\omega L$

Zawada: $Z = \omega L$

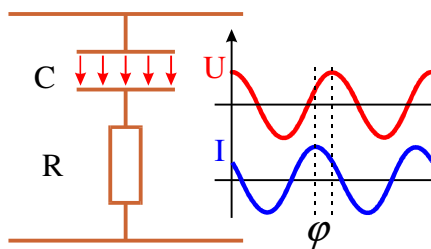
Faza impedancji cewki: $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Natężenie spóźnia się względem napięcia.



Przesunięcie fazowe w obwodzie RC

Impedancja opornika wynosi R.



$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

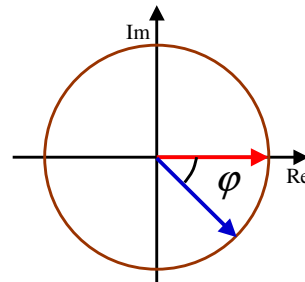
$$I = I_{\text{Re}} e^{-i\varphi} e^{i\omega t} = I_{\text{Re}} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Impedancja: $Z = \frac{1}{i\omega C} + R$

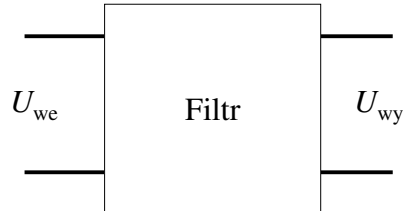
Zawada: $Z = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}$

Faza: $\text{tg}(\varphi) = -\frac{1}{\omega CR}$

Napięcie spóźnia się względem natężenia.



Filtry



Charakterystyki

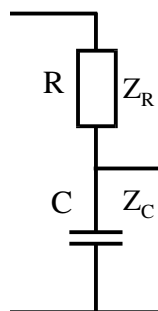
Napięciowa: **transmitancja** filtru to stosunek amplitud napięcia na wyjściu i wejściu.

$$T(\omega) = \frac{|U_{wy}|}{|U_{we}|}$$

Fazowa: przesunięcie fazy napięcia na wyjściu.

$$\varphi(\omega)$$

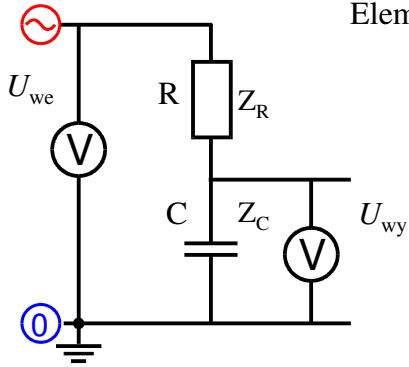
Obwód RC jako filtr



Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

$$U_{wy} = U_{we} \frac{Z_C}{Z_S}$$
$$Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$
$$Z_S = \frac{1}{i\omega C} + R$$

Obwód RC jako filtr



Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

$$U_{wy} = U_{we} \frac{Z_C}{Z_S}$$

$$Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

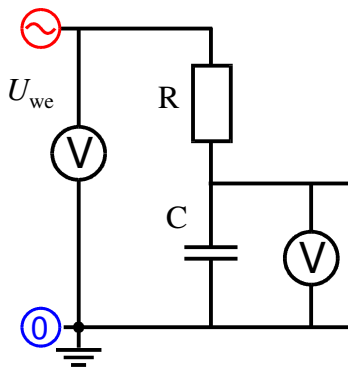
$$Z_S = \frac{1}{i\omega C} + R$$

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

Transmitancja: $T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$

Faza: $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega CR)$

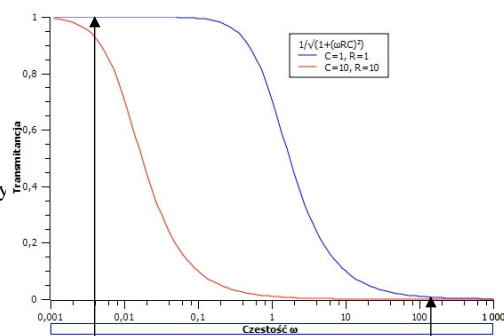
Obwód RC jako filtr dolnoprzepustowy



$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega CR)$$

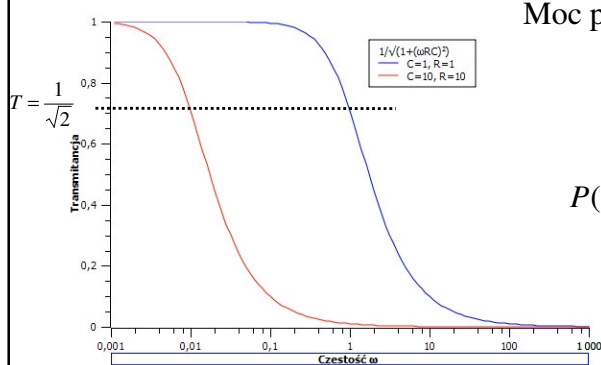
$$\tau = RC$$



Transmitancja = 1,
te częstotliwości są
przepuszczane.

Transmitancja = 0,
te częstotliwości są
zatrzymywane.

Częstość graniczna



Moc przepuszczana przez filtr:

$$P = \frac{U_{wyj}^2}{2R_Z}$$

$$P(\omega) = \frac{U_{wej}^2}{2R_Z(1 + \omega^2 R^2 C^2)}$$

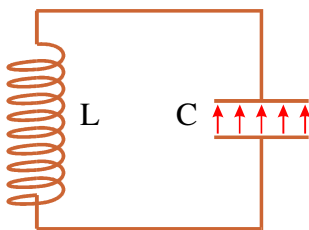
Częstość graniczna, ω_G , to taka, dla której przepuszczana jest połowa mocy.

$$U(\omega_G) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dla filtra RC, dolnoprzepustowego, $\omega RC = 1$:

$$\omega_G = 1/RC, \quad f_G = \frac{2\pi}{RC}$$

Obwód LC, impedancja



$$Z_S = Z_L + Z_C$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}$$

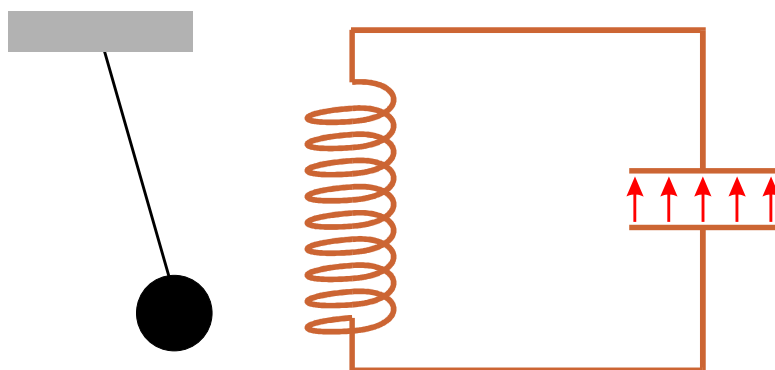
$$Z_L = i\omega L$$

$$Z_S(\omega) = i \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}$$

Gdy $\omega^2 = 1/LC$, to $Z_S = 0$.

Zerowy opór sugeruje, że prąd może płynąć bez napięcia.

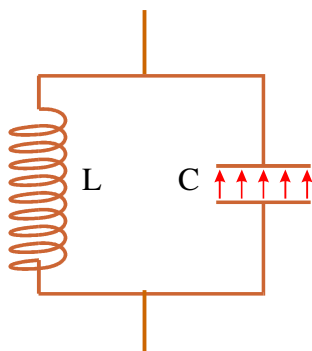
Obwód drgający, LC



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Obwód LC, oscylator



Kondensator $I = C \frac{dU}{dt}$

Cewka: $U = -\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$

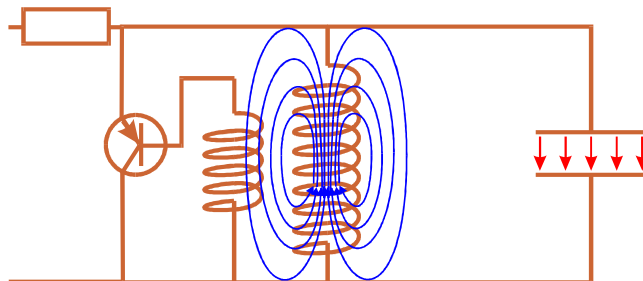
$$\frac{d^2U}{dt^2} = -\frac{1}{LC}U$$

Otrzymujemy zatem równanie oscylatora harmonicznego o częstotliwości rezonansowej:

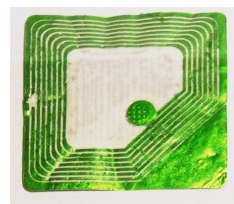
$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

L: $H = Vs/A$
 C: $F = V/C = V/As$
 LC: $Vs/A * V/As = s^2$

Zastosowanie obwodów LC

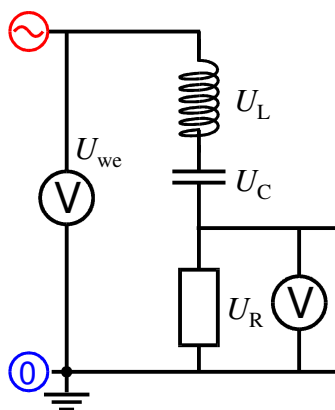


Nadajnik fal elektromagnetycznych



Znacznik w sklepie

Obwód RLC



II prawo Kirchhoffa :

$$U_{we}(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t)$$

$$U_{we}(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

$$U_R(t) = RI(t)$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

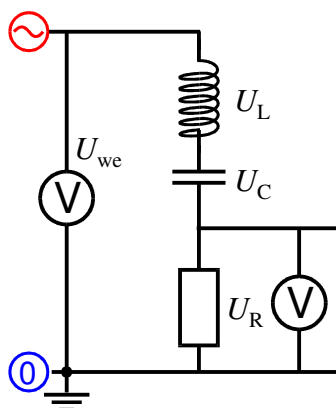
$$U_{we}(t) = U_R(t) + \frac{L}{R} \frac{dU_R(t)}{dt} + \frac{\int U_R(t) dt}{RC}$$

$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$U_R = U_{R0} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow U_0 = U_{R0} + \frac{i\omega L U_{R0}}{R} + \frac{U_{R0}}{i\omega RC}$$

Obwód RLC



$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t}$$

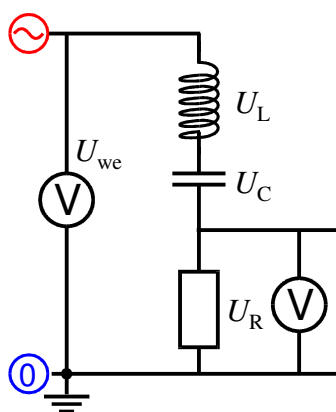
$$U_R = U_{R0} e^{i\omega t}$$

II prawo Kirchhoffa :

$$U_0 = U_{R0} + \frac{i\omega L U_{R0}}{R} + \frac{U_{R0}}{i\omega RC}$$

$$U_{R0} = \frac{U_0}{1 + \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega RC}}$$

Obwód RLC



$$U_{we} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$U_R = U_{R0} e^{i\omega t}$$

II prawo Kirchhoffa :

$$U_0 = U_{R0} + \frac{i\omega L U_{R0}}{R} + \frac{U_{R0}}{i\omega RC}$$

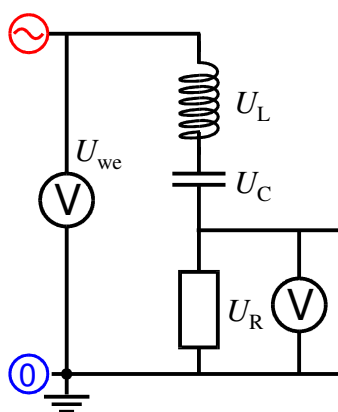
$$U_R(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

$$U_L(t) = \frac{-U_0 e^{i\omega t} \cdot \omega^2 LC}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

Obwód RLC



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$U_R(t) = U_0 e^{i\omega t} = U_{We}(t)$$

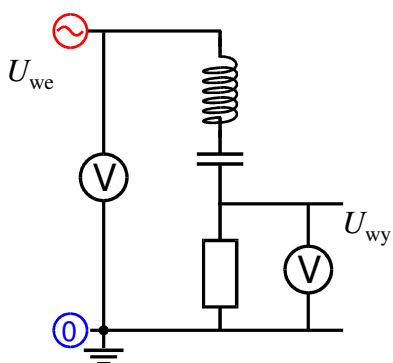
$$U_L(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega L}{R} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega CR} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = -U_L$$

$$U_{We} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$U_R = U_{R0} e^{i\omega t}$$

Obwód RLC jako filtr



$$U_{wy}(t) = \frac{U_{We}(t) \cdot i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$\frac{U_{wy}}{U_{We}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}$$

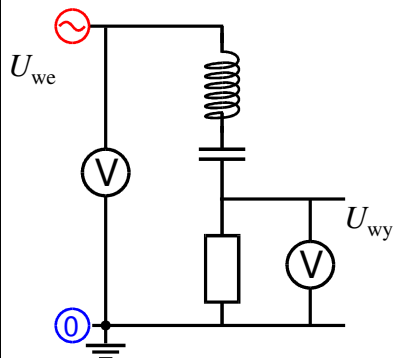
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T(0) = 0$$

$$T(\omega_0) = 1 \quad \text{filtr środkowo-przepustowy}$$

$$T(\infty) = 0$$

Filtr RLC



$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

