

Pracownia fizyczna i elektroniczna

Wykład 1.

Obwody prądu stałego i zmiennego

9 marca 2015

Krzysztof Korona

Plan wykładu

Wstęp

1. Prąd stały

- 1.1 Podstawowe pojęcia
- 1.2 Prawa Kirchhoffa
- 1.3 Prawo Ohma $I(U)$
- 1.4 Przykłady prostych obwodów

2. Prąd zmienny

- 2.1 Podstawowe elementy
- 2.2 Oscyloskop i generator
- 2.3 Obwody RC i RL
- 2.4 Filtry
- 2.5 Obwody rezonansowe

Obwody prądu stałego

Wielkości podstawowe

Ładunek elektryczny mierzymy w kulombach.

1 C = $6,24 \cdot 10^{18}$ ładunków elementarnych e;

e = $1,602 \cdot 10^{-19}$ C;

Ładunek oznaczamy q, Q .

Natężenie prądu to ładunek przepływający w jednostce czasu. $I = q/t$

Natężenie mierzymy w amperach: 1 A = 1 C/s.

Potencjał elektryczny to energia, jaką w danym miejscu posiada jednostkowy ładunek.

Potencjał mierzymy w woltach: 1 V = 1 J/C.

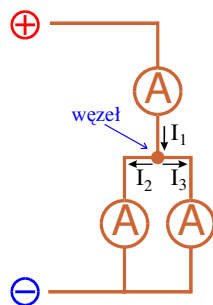
Napięcie elektryczne to różnica potencjałów, oznaczamy literą U .

Jeżeli pod wpływem napięcia U płynie prąd I , to przenosi on moc P .

$$P = I \cdot U$$

Zasada zachowania ładunku a przepływ prądu

Ładunek nie znika, ani nie powstaje, zatem ładunek, który dopłynął do węzła, musi z niego wypłynąć.

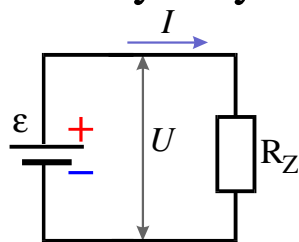


I prawo Kirchhoffa:

Suma natężeń prądów
dopływających i odpływających z
węzła wynosi zero.

$$\sum_j I_j = 0$$

Obwód elektryczny z zasilaniem



Zewnętrzne napięcie elektryczne, U :

spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu.

Siła elektromotoryczna, $\mathcal{E}$:

energia elektryczna uzyskana przez jednostkowy ładunek na odcinku obwodu zawierającym źródło prądu, a nie zawierającym rezystancji.

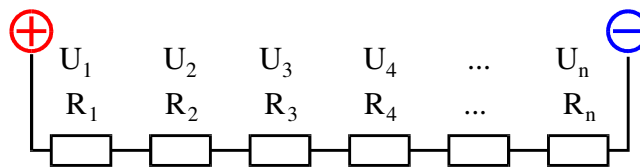
Zasada zachowania energii a rozkład napięć

Energia ładunku w polu zależy od potencjału w danym miejscu, a nie od drogi jaką przebył.

II prawo Kirchhoffa:

Suma napięć na oporach w obwodzie zamkniętym jest równa sumie sił elektromotorycznych.

$$\sum_j U_j = \sum_k \mathcal{E}_k$$



Prawo Ohma

W przypadku liniowej zależności napięcia od natężenia współczynnik proporcjonalności nazywamy oporem.

$$U = R \cdot I$$

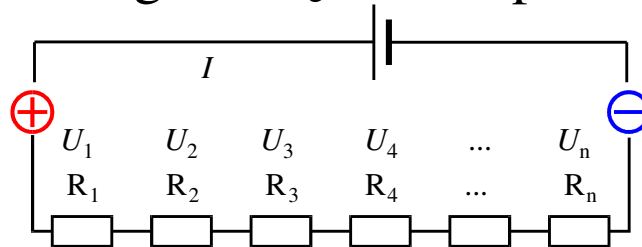
Napięcie jest proporcjonalne do oporu i do natężenia.

Opór mierzymy w omach, $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$.

Odwrotność oporu nazywamy przewodnictwem, oznaczamy S.

Jednostka: simens, $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1} = 1 \text{ A/V}$.

Szeregowe łączenie oporników



$$U_S = \sum_{k=1}^n U_k$$

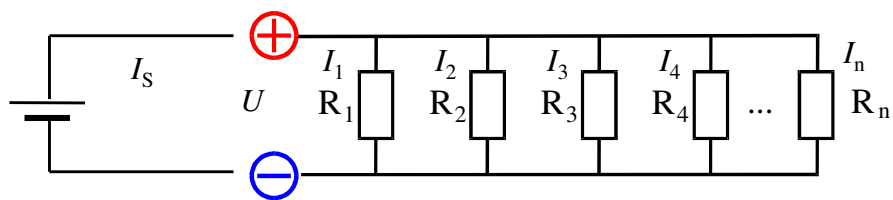
$$I = \text{const}$$

$$\frac{U_S}{I} = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{I}$$

$$R_S = \sum_{k=1}^n R_k$$

Przy połączeniu szeregowym, opory sumują się.

Równoległe łączenie oporników



$$I_S = \sum_{k=1}^n I_k$$

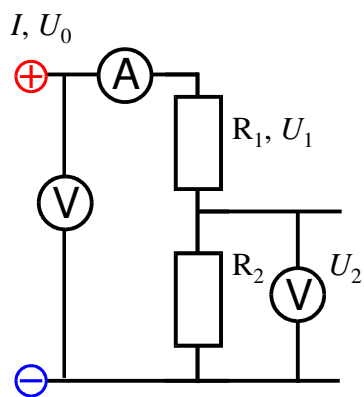
$$U = \text{const}$$

$$\frac{I_S}{U} = \sum_{k=1}^n \frac{I_k}{U}$$

$$\frac{1}{R_S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

Przy połączeniu równoległym, sumują się przewodnictwa, $1/R$.

Przykłady obwodów - dzielnik napięcia



Całkowity opór obwodu

$$R_S = R_1 + R_2$$

Natężenie prądu płynącego przez obwód:

$$I = U_0 / (R_1 + R_2)$$

Zakładamy, że do wyjścia nie płynie prąd.

Napięcie na wyjściu:

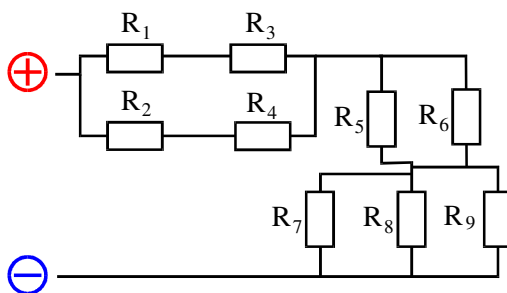
$$U_2 = R_2 \cdot I$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

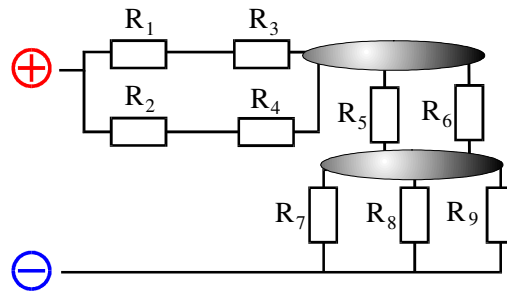
Liczenie oporu całkowitego

Zadanie:

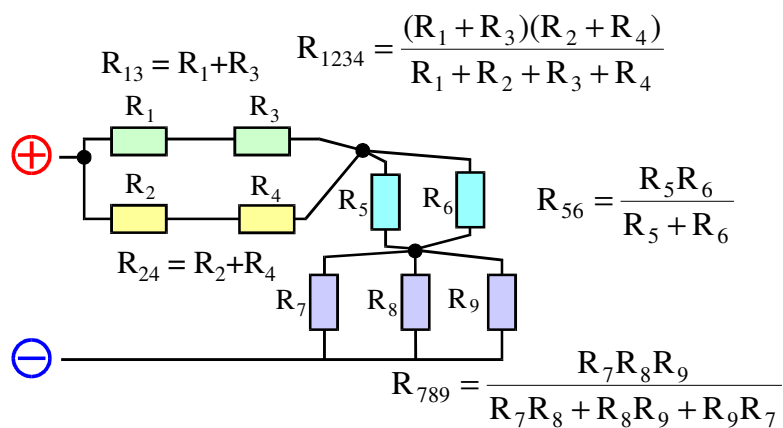
Obliczyć opór całkowity poniższego obwodu:



Liczenie oporu - wskazywanie węzłów



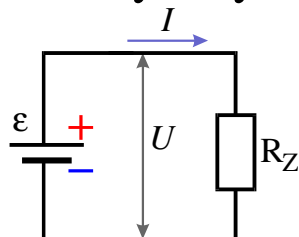
Liczenie oporu - sumowanie



$$R_S = R_{1234} + R_{56} + R_{789}$$

$$R_S = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} + \frac{R_7 R_8 R_9}{R_7 R_8 + R_8 R_9 + R_9 R_7}$$

Obwód elektryczny z zasilaniem



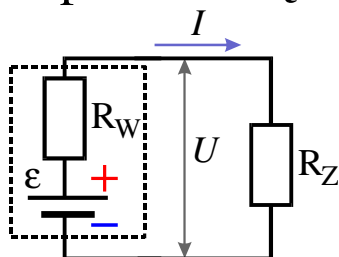
Zewnętrzne napięcie elektryczne, U :

spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu.

Siła elektromotoryczna, ε :

energia elektryczna uzyskana przez jednostkowy ładunek na odcinku obwodu zawierającym źródło prądu, a nie zawierającym rezystancji.

Opór wewnętrzny

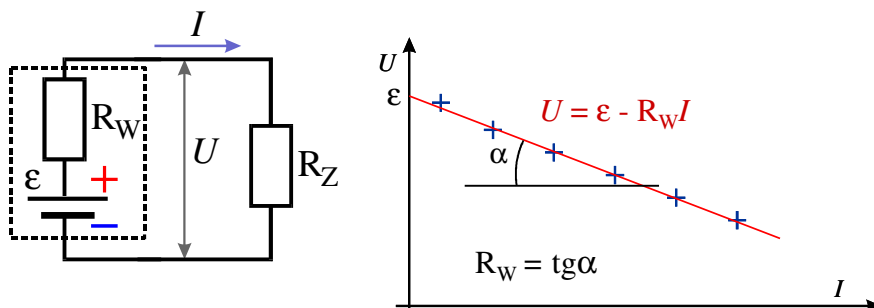


Rzeczywiste źródła napięcia zmieniają dostarczane napięcie w zależności od podawanego prądu. Możemy takie źródło przedstawić w postaci obwodu zastępczego złożonego z idealnego źródła o sile elektromotorycznej ε i z oporu wewnętrznego R_W .

Napięcie na zewnątrz takiego źródła będzie wynosiło:

$$U = \varepsilon - R_W I$$

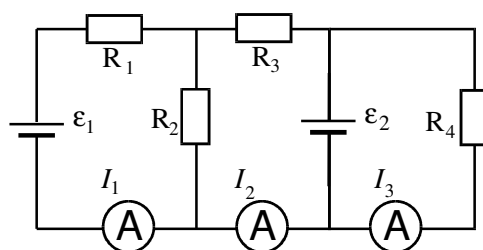
Pomiar oporu wewnętrznego



Układ złożony z wielu oczek

Zadanie:

Wyznaczyć prądy płynące w poniższym obwodzie:

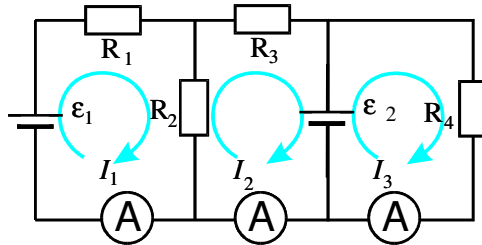


II prawo Kirchhoffa
W obwodzie zamkniętym:
 $\sum_j U_j = \sum_k \epsilon_k$

Układ złożony z wielu oczek

Zadanie:

Wyznaczyć prądy płynące w poniższym obwodzie:



Pierwsze oczko: $\varepsilon_1 = I_1(R_1 + R_2) - I_2 R_2$

Drugie oczko: $-\varepsilon_2 = -I_1 R_2 + I_2(R_2 + R_3)$

Trzecie oczko: $\varepsilon_2 = I_3 R_4$

Układ złożony z wielu oczek

Zadanie:

Wyznaczyć prądy płynące w poniższym obwodzie:

Pierwsze oczko $\cdot (R_2 + R_3)$: $\varepsilon_1 \cdot (R_2 + R_3) = I_1(R_1 + R_2) \cdot (R_2 + R_3) - I_2 R_2 \cdot (R_2 + R_3)$

Drugie oczko $\cdot R_2$: $-\varepsilon_2 \cdot R_2 = -I_1 R_2 \cdot R_2 + I_2(R_2 + R_3) \cdot R_2$

Trzecie oczko: $\varepsilon_2 = I_3 R_4$

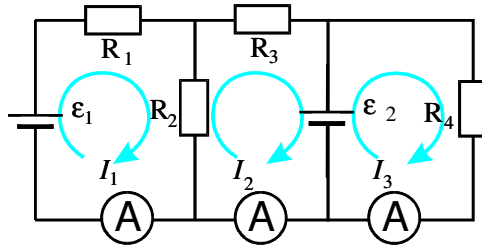
$$\varepsilon_1 \cdot (R_2 + R_3) - \varepsilon_2 \cdot R_2 = I_1(R_1 + R_2) \cdot (R_2 + R_3) - I_1 R_2 \cdot R_2$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2 R_2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) + R_2^2}$$

Układ złożony z wielu oczek

Zadanie:

Wyznaczyć prądy płynące w poniższym obwodzie:



$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2 R_2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) + R_2^2}$$

$$I_2 = \frac{-\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) + R_2^2}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2}{R_4}$$

15 min

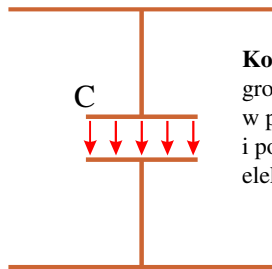
Obwody prądu zmiennego

Prąd zmienny jest najważniejszą formą zastosowań elektryczności. Dzięki niemu funkcjonuje większość urządzeń w naszych domach.

Temat jest dość trudny i do pełnego zrozumienia wymaga dobrej znajomości trygonometrii, rachunku różniczkowego i liczb zespolonych. Na tym kursie zajmiemy się jedynie najprostszymi przykładami z tej tematyki takimi jak: obwód RC i RLC czy filtry.

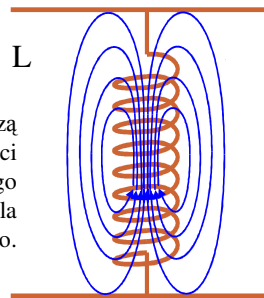
Kondensator i cewka

W obwodach elektrycznych występują dwa rodzaje elementów, które mogą gromadzić energię.



Kondensatory gromadzą energię w postaci ładunku i pola elektrycznego.

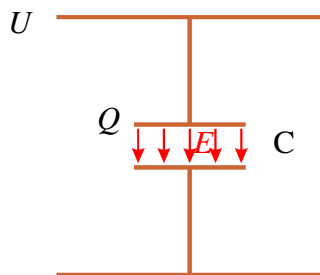
$$E_C = \frac{CU^2}{2}$$



Cewki gromadzą energię w postaci prądu elektrycznego i pola magnetycznego.

$$E_L = \frac{LI^2}{2}$$

Pojemność



Pojemność kondensatora to ładunek jaki może zgromadzić przy jednostkowym napięciu.

$$C = \frac{Q}{U}$$

Jednostką pojemności jest farad, [F].

Ładunek na kondensatorze:

$$Q = C \cdot U.$$

Natężenie prądu to ładunek przepływający w jednostkowym czasie:

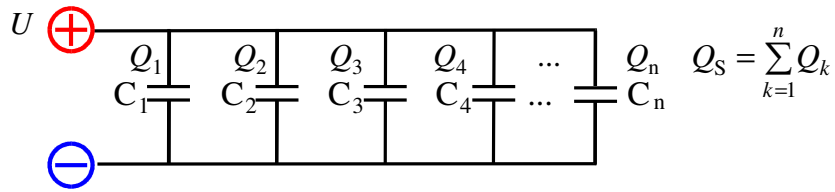
$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Prąd w obwodzie z kondensatorem będzie równy: $I = C \frac{dU}{dt}$

Napięcie na kondensatorze będzie całką z prądu dopływającego do kondensatora:

$$U(t) = C^{-1} \int I(t) dt$$

Łączenie kondensatorów



$$U = \text{const} \quad \frac{Q_S}{U} = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{U}$$

$$C_S = \sum_{k=1}^n C_k$$

Przy połączeniu równoległym, pojemności sumują się.

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

Przy połączeniu szeregowym, sumują się odwrotności pojemności.

Indukcja elektromagnetyczna

Prawo indukcji Faradaya:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$\mathcal{E}$ - siła elektromotoryczna,

Φ - strumień pola magnetycznego, $\Phi = B \cdot S$

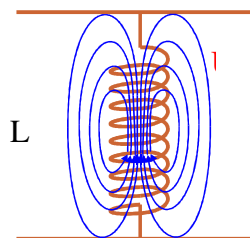
Na podstawie prawa Ampera, przepływ prądu indukuje pole:

$$B = \alpha I$$

α - współczynnik.

W przypadku cewki można się spodziewać, że powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją.

Cewka



$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi = B \cdot S$$

$$B = \alpha I$$

Można się spodziewać, że w przypadku cewki powstanie siła elektromotoryczna wywołana samoindukcją:

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt}$$

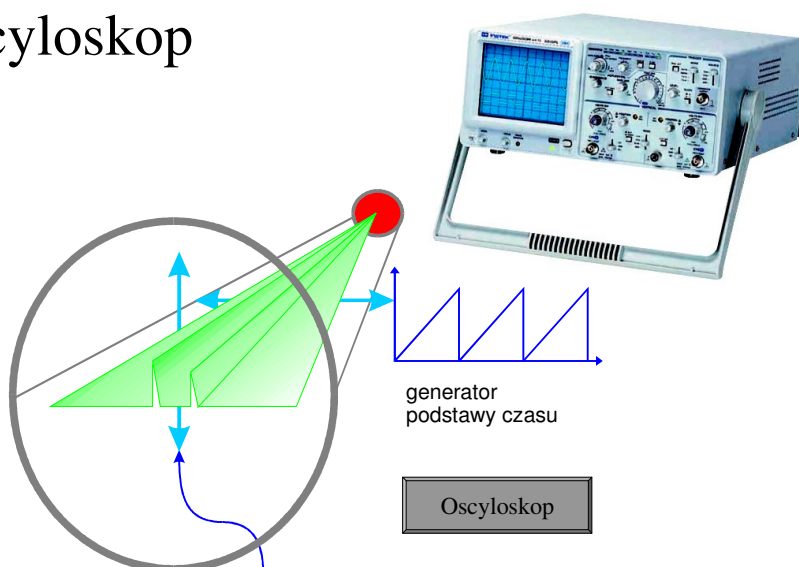
Współczynnik L nazywamy **indukcyjnością cewki**.

Indukcyjność mierzymy w henrach H, $1 \text{ H} = \text{Vs/A}$

Energia zgromadzona w cewce, przez którą płynie prąd o natężeniu I :

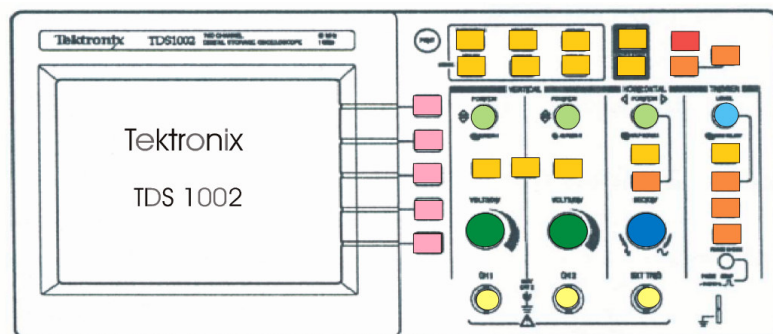
$$E_L = \frac{LI^2}{2}$$

Oscyloskop



Na ekranie oscyloskopu oś pozioma staje się osią czasu.

Na stronie PE dostępna jest skrócona instrukcja obsługi TDS 1002:
<http://pe.fuw.edu.pl/pliki/Tektronix TDS210.pdf>



Legenda :

- Wejścia pomiarowe i wyzwalania
- Ustawianie Czulości kanału w osi Y
- Ustawianie Podstawy Czasu kanałów
- Ustawianie pozycji przebiegu na ekranie
- Poziom Wyzwalania Podstawy Czasu
- Menu Narzędziowe Stałe
- Modyfikacje wybranego Menu
- Bezpośrednie ustawianie parametrów
- Pomiar z autodopasowaniem

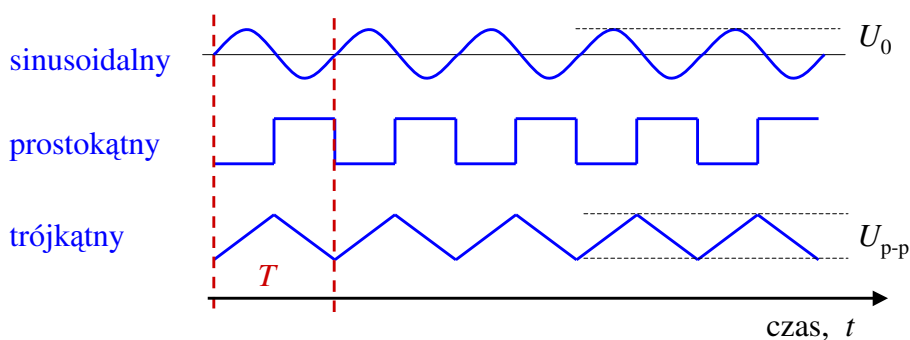
Blok Kanału I

Blok Kanału II

Blok Podstawy Czasu

Blok Wyzwalania
Podstawy Czasu

Przebiegi zmiennoprądowe



T - okres zmienności

$$f = \frac{1}{T} \text{ - częstotliwość}$$

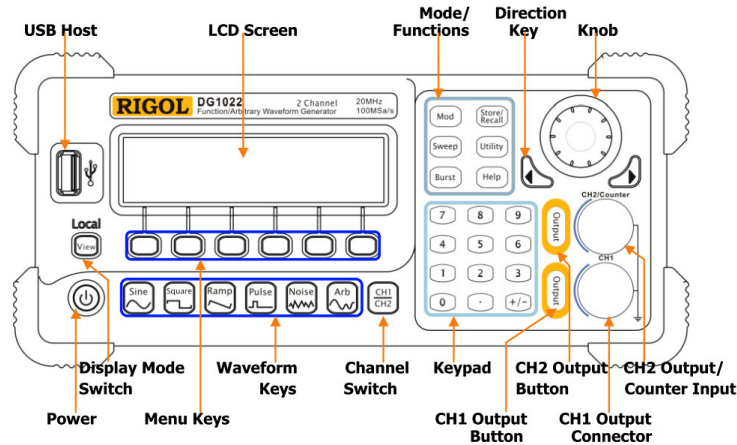
U_0 - amplituda napięcia

U_{p-p} - napięcie międzyszczytowe "peak to peak",
dla przebiegów symetrycznych $U_{p-p} = 2 * U_0$

Generator funkcyjny Rigol DG1000

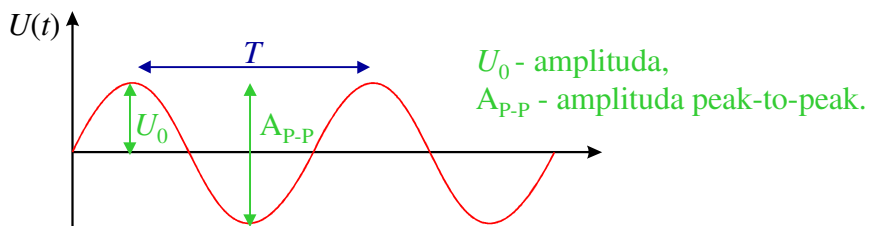
na stronie PE jest duża angielska wersja instrukcji:

http://pe.fuw.edu.pl/pliki/DG1000_UserGuide.pdf



Prąd przemienny (sinusoidalny)

$$U = U_0 \sin(2\pi f \cdot t) = U_0 \sin(\omega \cdot t)$$



Okres, T , podajemy w sekundach.

Częstotliwość, $f = 1/T$, podajemy w hercach, $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$.

Częstość (kołową): $\omega = \frac{2\pi}{T}$, podajemy w s^{-1} .

Moc prądu przemiennego

Moc prądu:

$$P = I \cdot U.$$

Prawo Ohma:

$$I = U/R.$$

Możemy otrzymać inne wyrażenia na moc prądu:

$$P = U^2/R.$$

W przypadku prądu przemiennego:

$$P = U_0^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle_T / R.$$

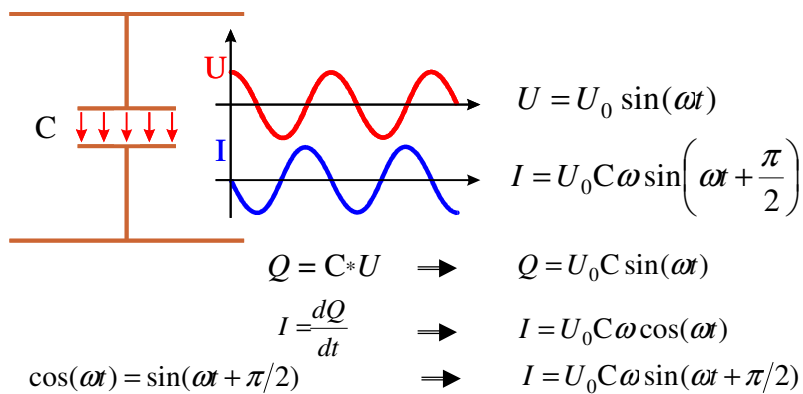
$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle_T = 1/2$$

$$P = \frac{U_0^2}{2 \cdot R}$$

Wprowadzamy napięcie skuteczne, $U_S = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, takie że $P = \frac{U_S^2}{R}$.

Mierniki podają wartość skuteczną.

Prąd przemienny i kondensator



Prąd jest przesunięty w fazie (przyspieszony) o $\frac{\pi}{2}$ ($= 90^\circ$) względem napięcia.

Liczby zespolone

$$z = x + i y$$

$$x + i y = A e^{i \alpha}$$

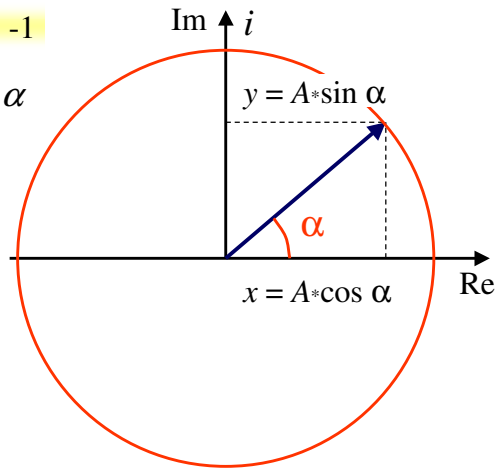
$$e^{i \alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$|z| = A = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \arctg(y/x)$$

$$\operatorname{Re}(z) = A \cos \alpha$$

$$\operatorname{Im}(z) = A \sin \alpha$$

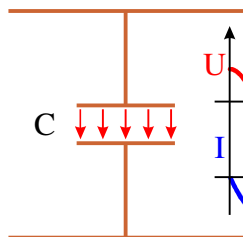


$$w = a - i b \quad |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$w = \frac{1}{a + i b} \quad |w| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Prąd przemienny i liczby zespolone

$$\sin(\omega t) = \operatorname{Im}(e^{i \omega t})$$



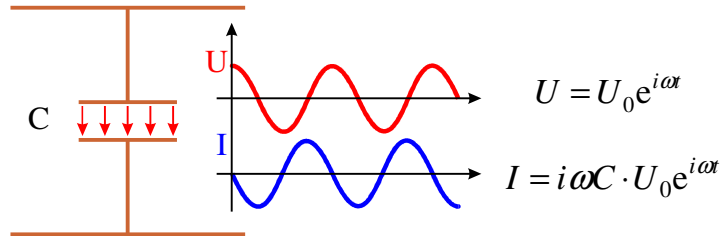
$$U = U_0 e^{i \omega t}$$

$$I = U_0 i \omega C e^{i \omega t}$$

$$Q = C * U \Rightarrow Q = U_0 C e^{i \omega t}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = U_0 C i \omega e^{i \omega t}$$

Impedancja



Prawo Ohma:

Napięcie jest proporcjonalne do natężenia : $U = Z \cdot I$

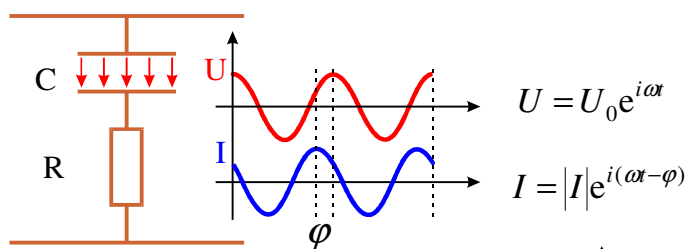
Impedancja kondensatora: $Z = \frac{1}{i\omega C}$

Zawada czyli wartość bezwzględna impedancji: $|Z| = \frac{1}{\omega C}$

Faza impedancji kondensatora: $\varphi = \frac{-\pi}{2}$

Przesunięcie fazowe w obwodzie RC

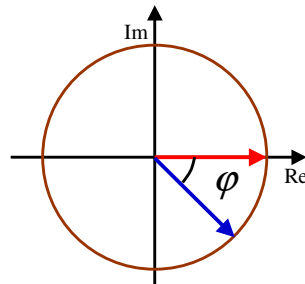
Impedancja opornika wynosi R.



Impedancja: $Z = R + \frac{1}{i\omega C}$

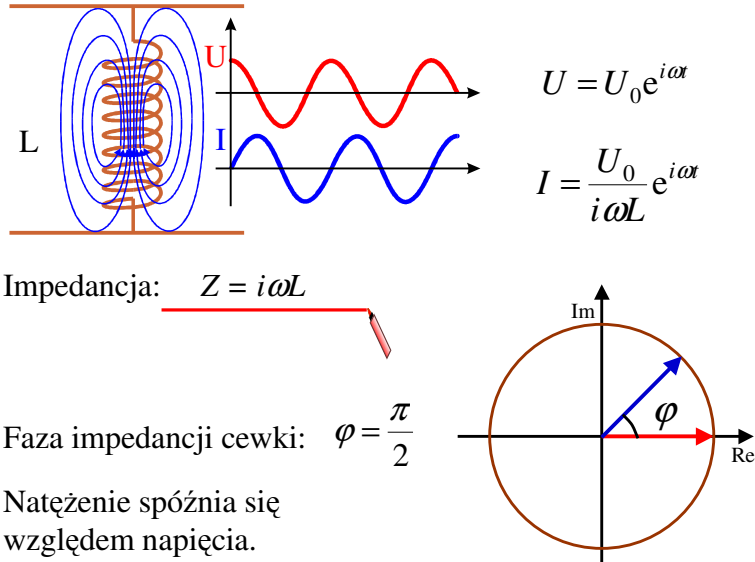
Zawada: $Z = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}$

Faza: $\tan(\varphi) = -\frac{1}{\omega CR}$

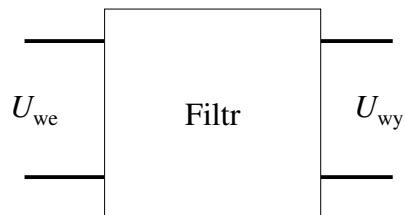


Napięcie spóźnia się względem natężenia.

Cewka - impedancja



Filtry



Charakterystyki

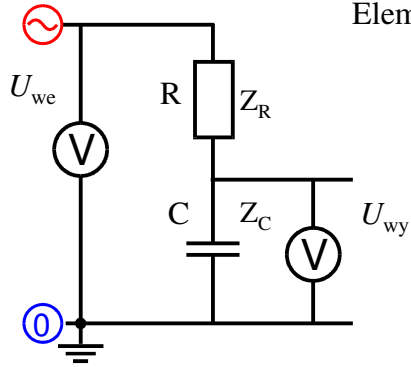
Napięciowa: **transmitancja** filtru to stosunek amplitud napięcia na wyjściu i wejściu.

$$T(\omega) = \frac{|U_{wy}|}{|U_{we}|}$$

Fazowa: przesunięcie fazy napięcia na wyjściu.

$$\varphi(\omega)$$

Obwód RC jako filtr



Elementy R i C tworzą dzielnik napięcia:

$$U_{wy} = U_{we} \frac{Z_C}{Z_S}$$

$$Z_R = R \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z_S = R + \frac{1}{i\omega C}$$

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

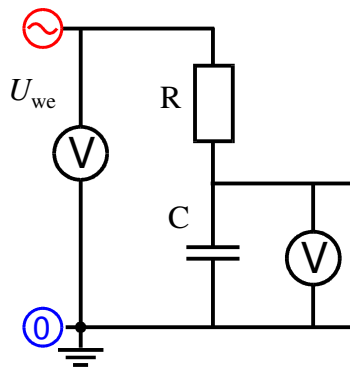
Transmitancja:

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Faza:

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega CR)$$

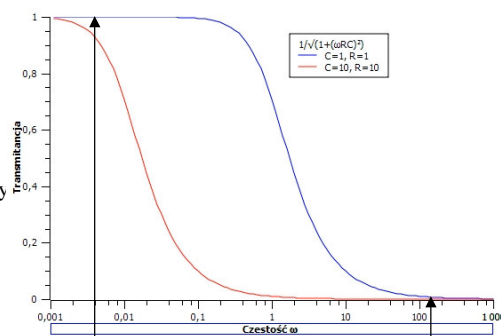
Obwód RC jako filtr dolnoprzepustowy



$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega CR)$$

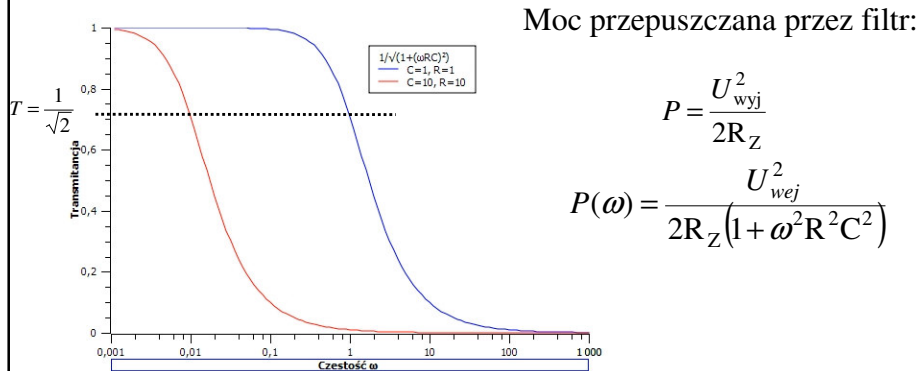
$$\tau = RC$$



Transmitancja = 1,
te częstotliwości są
przepuszczane.

Transmitancja = 0,
te częstotliwości są
zatrzymywane.

Częstość graniczna



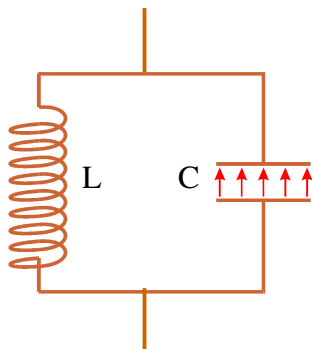
Częstość graniczna, ω_G , to taka, dla której przepuszczana jest połowa mocy.

$$U(\omega_G) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dla filtra RC, dolnoprzepustowego, $\omega RC = 1$:

$$\omega_G = 1/RC, \quad f_G = \frac{2\pi}{RC}$$

Obwód LC, impedancja



$$Z_S = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C}$$

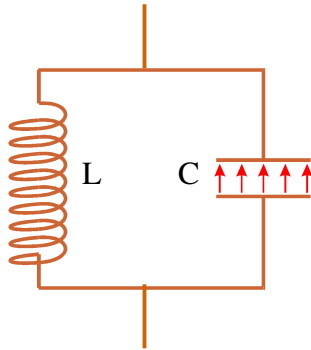
$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C}$$

$$Z_L = i\omega L$$

$$Z_S(\omega) = i\omega \frac{L}{\omega^2 LC - 1}$$

Gdy $\omega^2 = 1/LC$, to $Z_S = \infty$.

Obwód LC, oscylator



Kondensator $I = C \frac{dU}{dt}$

Cewka: $U = -\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = -\frac{1}{LC} U$$

Otrzymujemy zatem równanie oscylatora harmonicznego o częstotliwości rezonansowej:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

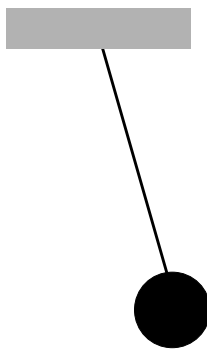
L: $H = Vs/A$

C: $F = V/C = V/As$

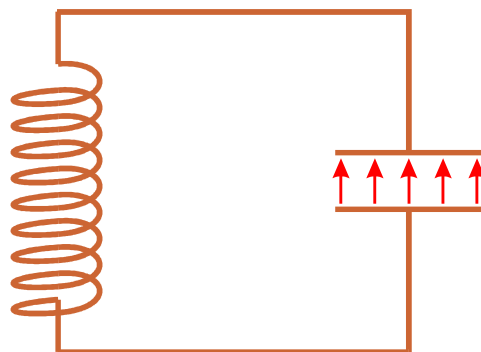
LC: $Vs/A * V/As = s^2$



Obwód drgający, LC

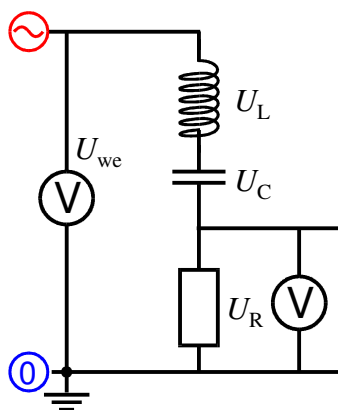


$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Obwód RLC



II prawo Kirchhoffa :

$$U_{we}(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t)$$

$$U_{we}(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

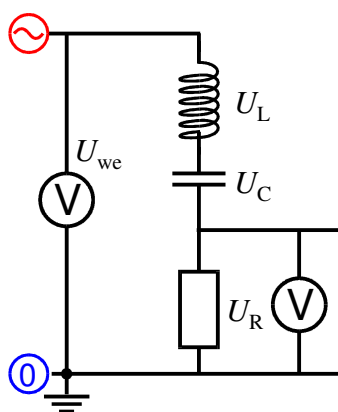
$$U_R(t) = RI(t)$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

$$U_{we}(t) = U_R(t) + \frac{L}{R} \frac{dU_R(t)}{dt} + \frac{\int U_R(t) dt}{RC}$$

$$\begin{aligned} U_{we} &= U_0 e^{i\omega t} \\ U_R &= U_{R0} e^{i\omega t} \end{aligned} \Rightarrow U_0 = U_{R0} + \frac{i\omega L U_{R0}}{R} + \frac{U_{R0}}{i\omega RC}$$

Obwód RLC



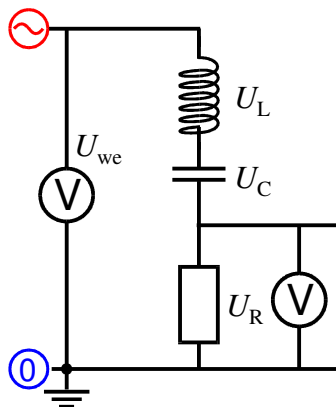
II prawo Kirchhoffa :

$$U_0 = U_{R0} + \frac{i\omega L U_{R0}}{R} + \frac{U_{R0}}{i\omega RC}$$

$$U_{R0} = \frac{U_0}{1 + \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega RC}}$$

$$\begin{aligned} U_{we} &= U_0 e^{i\omega t} \\ U_R &= U_{R0} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Obwód RLC



$$U_{We} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$U_R = U_{R0} e^{i\omega t}$$

II prawo Kirchhoffa :

$$U_0 = U_{R0} + \frac{i\omega L U_{R0}}{R} + \frac{U_{R0}}{i\omega RC}$$

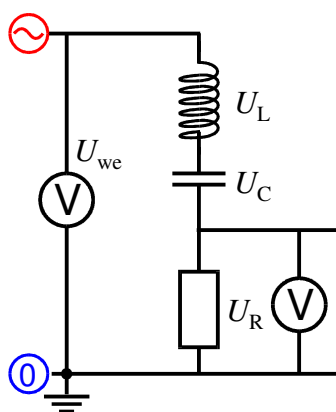
$$U_R(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}$$

$$U_L(t) = \frac{-U_0 e^{i\omega t} \cdot \omega^2 LC}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

Obwód RLC



$$U_{We} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$U_R = U_{R0} e^{i\omega t}$$

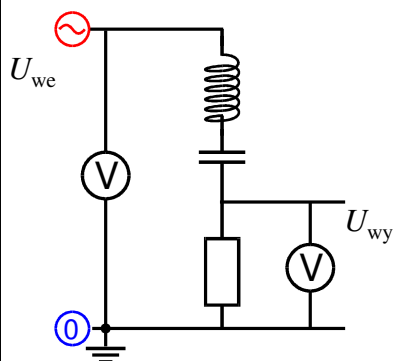
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$U_R(t) = U_0 e^{i\omega t} = U_{We}(t)$$

$$U_L(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega L}{R} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$U_C(t) = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{i\omega CR} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

Obwód RLC jako filtr



$$U_{wy}(t) = \frac{U_{we}(t) \cdot i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

$$T(\omega) = \frac{\omega CR}{\sqrt{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}$$

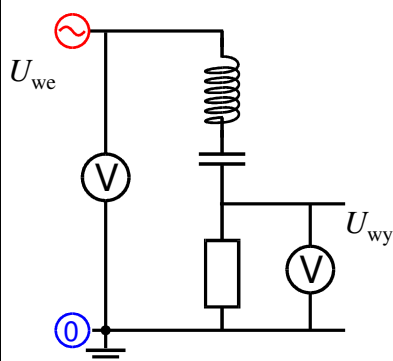
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T(0) = 0$$

$$T(\omega_0) = 1 \quad \text{filtr środkowo-przepustowy}$$

$$T(\infty) = 0$$

Filtr RLC



$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{i\omega CR}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

