

## **Pracownia fizyczna i elektroniczna dla Inżynierii Nanostruktur oraz Energetyki i Chemii Jądrowej**

### **Ćwiczenie 6**

Elementy testowania hipotez i analizy statystycznej, histogram.

#### **Cel**

Celem części (a) ćwiczenia jest zastosowanie metod rachunku błędów do wyznaczania błędów złożonych w przypadku, gdy wynik jest dowolną znaną funkcją mierzonych wielkości. Zostanie zastosowana metoda propagacji małych błędów do testowania zgodności hipotez metodą testu 3-sigma. Metoda propagacji małych błędów jest ogólną regułą szacowania błędu złożonego, której przypadek szczególny był poznany w ćwiczeniu C2 dla sumy i różnicy wielkości mierzonych. Niepewności złożone będą określane dla układu dzielnika napięcia, w tym z diodą półprzewodnikową.

Celem części (b) ćwiczenia jest zbadanie statystycznego rozkładu wartości napięcia przewodzenia  $U_p$  dla diody półprzewodnikowej w warunkach stałego prądu dla serii (ok. 50-100 sztuk) nominalnie identycznych diod. Wyniki przedstawione zostaną na histogramie, który będzie następnie porównany z rozkładem Gaussa o parametrach (wartości średniej i dyspersji) wyznaczonych z pomiarów serii diod.

#### **Przypomnienie**

##### **1. Propagacja małych błędów**

W ćwiczeniu C2 poznaliśmy zasadę obliczania niepewności dla sumy lub różnicy dwu **niezależnie mierzonych** wielkości, która była następująca. Jeśli znane są wartości mierzone i ich niepewności  $x_0 \pm \sigma_x$  oraz  $y_0 \pm \sigma_y$ , to niepewność sumy  $x_0 + y_0$  lub różnicy  $x_0 - y_0$

wynosi  $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ , jeśli niepewności wielkości mierzonych możemy traktować jako niezależne. Uogólnienie tego wzoru na dowolną funkcję wielkości mierzonych  $x$  oraz  $y$  daną wzorem  $z = f(x, y)$  ma następującą postać:

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}\right)^2 \cdot \sigma_y^2},$$

i wynik wyznaczenia wartości funkcji  $f$  wynosi:  $f(x_0, y_0) \pm \sigma_z$ . I analogicznie dla większej ilości zmiennych. Taka metoda obliczania niepewności pomiaru nosi nazwę metody propagacji małych błędów. Wzór ten jest słuszny, gdy niepewności wielkości mierzonych możemy traktować jako niezależne (nieskorelowane), co często nie zachodzi, ale trudniejszego przypadku skorelowanych niepewności (mogącego obniżać wartość wypadkowej niepewności) nie będziemy uwzględniać.

##### **2. Test zgodności $3\sigma$**

Test  $3\sigma$  jest jedną z metod sprawdzania hipotez. Dotyczy sprawdzenia zgodności wyników doświadczeń z przewidywaniami teoretycznymi lub sprawdzania wzajemnej zgodności wyników różnych pomiarów. Test  $3\sigma$ , spotykany w dwóch typach zagadnień:

- Hipoteza teoretyczna głosi, że „wielkość mierzona ma wartość  $\mu$ ”. Wynik pomiaru  $x$  tej wielkości jest określony z dyspersją (niepewnością pomiaru)  $\sigma$  -pierwiastkiem kwadratowym z wariancji  $\sigma^2$ . Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy wartość  $|x - \mu|$  i sprawdzamy, jak uzyskana wartość ma się do wartości  $3\sigma$ . Jeśli  $|x - \mu| > 3\sigma$ , to odrzucamy hipotezę teoretyczną o wartości  $\mu$  wielkości mierzonej. Jeśli zaś  $|x - \mu| \leq 3\sigma$ , to konkludujemy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna z danymi z pomiaru.
- Hipoteza teoretyczna głosi, że „dwa pomiary uzyskane różnymi metodami (w różnych warunkach) dają tę samą wartość”. Niech wynik  $x$  uzyskany jedną metodą będzie określony z dyspersją  $\sigma_x$ , zaś wynik  $y$  uzyskany drugą metodą będzie określony z dyspersją  $\sigma_y$ . Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy wartość  $|x - y|$  i sprawdzamy, jak wartość ta ma się do wartości  $3\sigma$ , gdzie  $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ . Jeśli  $|x - y| > 3\sigma$ , to odrzucamy hipotezę, że oba pomiary dają tę samą wartość. Jeśli zaś spełniony jest warunek  $|x - y| \leq 3\sigma$ , to konkludujemy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna z danymi.

Przypominamy, że w przypadku, gdy test  $3\sigma$  nie odrzuca hipotezy, nie oznacza to, że udowodniliśmy jej słuszność, a jedynie godzimy się z nią, gdyż nie jest sprzeczna z danymi z pomiaru. Jeśli pomiary opisywane się rozkładem Gaussa, to testowi można nadać interpretację probabilistyczną: dopuszczamy odrzucenie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 3 razy na 1000 decyzji. Zastąpienie testu  $3\sigma$  analogicznym testem  $2\sigma$  oznacza odrzucanie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 1 raz na 20 decyzji.

### 3. Niepewności pomiarowe miernika uniwersalnego Brymen 805.

Miernik uniwersalny Brymen 805 charakteryzują następujące parametry dotyczące pomiarów **natężenia prądu stałego, napięcia stałego i oporności** (w temperaturze  $23^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$ , wilgotności względnej poniżej 75% i miejscu użycia poniżej 2000 m nad poziomem morza – wpływ ciśnienia):

| Natężenie prądu stałego (DC)<br>zakres amperomierza | Dokładność:<br>$w + nc$ | Oporność<br>wejściowa |
|-----------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 400,0 $\mu\text{A}$                                 | 2,0% + 5c               | 150 $\Omega$          |
| 4000 $\mu\text{A}$                                  | 1,2% + 3c               | 150 $\Omega$          |
| 40,00 mA                                            | 2,0% + 5c               | 3,3 $\Omega$          |
| 400,0 mA                                            | 1,2% + 3c               | 3,3 $\Omega$          |
| 4,000 A                                             | 2,0% + 5c               | 0,03 $\Omega$         |
| 10,00 A                                             | 1,2% + 3c               | 0,03 $\Omega$         |

| Napięcie stałe (DC)<br>zakres woltomierza | Dokładność:<br>$w + nc$ | Oporność<br>wejściowa |
|-------------------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 400,0 mV                                  | 0,3% + 4c               | 1 G $\Omega$          |
| 4,000 V; 40,00 V; 400,0 V                 | 0,5% + 3c               | 10 M $\Omega$         |
| 1000 V                                    | 1,0% + 4c               | 10 M $\Omega$         |

| Oporność<br>zakres omomierza                           | Dokładność:<br>$w + nc$ |
|--------------------------------------------------------|-------------------------|
| 400,0 $\Omega$                                         | 0,8% + 6c               |
| 4,000 k $\Omega$ ; 40,00 k $\Omega$ ; 400,0 k $\Omega$ | 0,6% + 4c               |
| 4,000 M $\Omega$                                       | 1,0% + 4c               |
| 40,00 M $\Omega$                                       | 2,0% + 4c               |

Tabela 1.

Dopuszczalny błąd graniczny wskazań miernika uniwersalnego Brymen 805. Zakres pomiarowy miernika rozpoznajemy po formacie liczbowym wyświetlanego wyniku.

### Przypominamy:

$\Delta$  – **dopuszczalny błąd graniczny wskazania** miernika na danym zakresie pomiarowym wyznacza się na podstawie wzoru:

$$\Delta = \frac{w}{100} x + nc,$$

gdzie poszczególne wielkości oznaczają:

- $w$  – dokładność wskazanej wartości  $x$  wyrażona jako **ułamek wartości zmierzonej** na wybranym zakresie pomiarowym (w tabeli powyżej podawana w formie **procentu odczytu**).
- $nc$  – dokładność cyfrowa określana jako liczba  $n$  najmniej znaczących jednostek  $c$  odczytu – zależy ona od **zakresu pomiarowego** wybranego w mierniku, a **nie zależy** od wartości uzyskanej w pomiarze. Dla zwiększenia dokładności pomiaru należy wybierać najmniejszy zakres pomiarowy w mierniku, na którym jest możliwe dokonanie pomiaru danej wartości.

### Zestaw doświadczalny do dyspozycji

Część (a):

- płytką pomiarową do badania diody (z lutowaniem)
- zestaw 5 oporników o wartościach kiloomowych, w tym opornik 1 k $\Omega$ ,
- zasilacz stałego napięcia,
- miernik uniwersalny Brymen 805,
- akcesoria pomocnicze: kable łączeniowe, chwytaki pomiarowe, cyna i kolba lutowniczą.

Część (b):

- dodatkowo zestaw 100 diod elektroluminescencyjnych (LED) (wspólny z innymi zespołami w sali).

### Część (a)

#### Zadanie 1.

Niepewność napięcia wyjściowego w dzielniku napięć.

W układzie dzielnika napięć, gdzie w obwodzie wejściowym znajdują się połączone szeregowo oporniki  $R$  i  $r$ , napięcie wyjściowe jest pobierane z opornika  $r$ . Znając niepewności napięcia wejściowego  $\sigma_{U_{we}}$  oraz niepewności oporności  $\sigma_R$  i  $\sigma_r$  wyprowadź wzór na niepewność napięcia wyjściowego  $\sigma_{U_{wy}}$  stosując metodę propagacji małych błędów.

Napięcie wyjściowe dzielnika jest wyznaczone wzorem:  $U_{wy} = U_{we} \cdot \frac{r}{R+r}$

**Wyprowadzenie wzoru na niepewność jest do wykonania w domu przed ćwiczeniami.**

Podczas ćwiczeń zbuduj układ dzielnika napięcia z dwu wybranych oporników, wcześniej zmierz te oporniki omomierzem jak najdokładniej oraz wyznacz niepewności pomiaru oporności. Ustaw na zasilaczu napięcie z przedziału 3-6V oraz zmierz je jak najdokładniej i wyznacz niepewność jego pomiaru. Zmierz napięcie wyjściowe  $U_{wy}^{zmierzone}$  ze zbudowanego dzielnika. Sprawdź przy użyciu testu hipotez  $3\sigma$  czy otrzymane wartości napięcia wyjściowego obliczonego  $U_{wy}^{obliczone} \pm \sigma_{obl}$  i zmierzonego  $U_{wy}^{zmierzone} \pm \sigma_{zm}$  są ze sobą zgodne.

Oblicz też moc wydzielaną na oporniku  $r$  i niepewność tej wartości dla użytych wartości oporności i napięcia wejściowego korzystając z propagacji małych błędów.

## Zadanie 2.

Przy łąceniu równoległym oporników oporność wypadkowa jest określona wzorem:

$$\frac{1}{R_{wyp}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Oblicz z tego wzoru, korzystając z metody propagacji małych błędów, jaka

jest niepewność oporności wypadkowej znając niepewności wartości  $R_1$  i  $R_2$ .

**Wyprowadzenie wzoru na niepewność jest do wykonania w domu przed ćwiczeniami.**

Wybierz z zestawu oporników dwa dowolne oporniki, zmierz jak najdokładniej ich wartości oraz wyznacz niepewności ich pomiaru. Następnie połącz oporniki równolegle i zmierz oporność wypadkową oraz wyznacz niepewność pomiaru. Sprawdź przy użyciu testu  $3\sigma$  czy wartości oporności wypadkowej obliczona i zmierzona są ze sobą zgodne.

## Zadanie 3.

Dzielnik napięcia z diodą LED.

W dzielniku napięć wlotuj jako opornik wejściowy  $R$  opornik  $1\text{ k}\Omega$  oraz zastąp opornik wyjściowy  $r$  diodą LED włączoną w kierunku przewodzenia. Wiedząc, że napięcie przewodzenia dla diody LED świecącej w kolorze czerwonym (wykonanej z GaAsP, typ diody L-53IT lub LID-53LID firmy Kingbright) wynosi:  $1.7\text{ V}$  przy prądzie diody  $2\text{ mA}$ , dla opornika  $R=1\text{ k}\Omega$  dobierz **przez obliczenie** takie napięcie z zasilacza, aby prąd diody wynosił  $2 \pm 0.1\text{ mA}$ . Do oceny napięcia z zasilacza spełniającego ten warunek przyjmij, że napięcie panujące na diodzie LED gdy płynie przez nią prąd  $2\text{ mA}$  jest równe powyższej wartości napięcia przewodzenia.

Najpierw wykonaj obliczenia napięcia z zasilacza, potem zbuduj układ i dopiero włącz napięcie w zasilaczu.

**Nie należy:** (1) podłączać diody bezpośrednio (tj. bez opornika) do zasilacza, (2) podłączać otrzymanej diody LED do napięcia wywołującego przepływ przez diodę prądu o natężeniu większym niż  $30\text{ mA}$ , (3) podłączać diody LED do wyższego napięcia niż  $5\text{ V}$  w kierunku zaporowym, gdyż może to spowodować zniszczenie diody.

Przepuszczenie przez diodę LED prądu o natężeniu zbyt dużym (dopuszczalne określane przez producenta diody LED typu L-53IT lub LID-53LID maksymalne natężenie prądu w kierunku przewodzenia wynosi  **$30\text{ mA}$** ) powoduje zniszczenie diody.

Zmierz amperomierzem jak najdokładniej jakie natężenie prądu płynie przez diodę oraz wyznacz niepewność zmierzonej wartości, pomiar wykonaj na zakresie amperomierza  $40.00\text{ mA}$  (na tym zakresie omomierz ma małą oporność wejściową). Zmierz także jak najdokładniej wartość napięcia panującego na diodzie i wyznacz jego niepewność. Czy obliczenia zakładające, że na diodzie panuje napięcie równe napięciu przewodzenia było poprawne?

Zakładamy słuszność dla badanej diody LED wzoru diodowego Shockley'a

$$I_D = I_0 \cdot \left( e^{\frac{e \cdot U_D}{M \cdot k \cdot T}} - 1 \right), \text{ gdzie } U_D - \text{napięcie panujące na diodzie, w wykładniku wartość } e \text{ to}$$

ładunek elementarny,  $k = R/N_A$  to stała Boltzmanna ( $R$  - stała gazowa,  $N_A$  - liczba Avogadro), wartość  $\frac{k \cdot T}{e} = 25\text{ mV}$  dla temperatury pokojowej  $21^\circ\text{C}$ ,  $I_0$  to prąd wsteczny

nasycenia diody,  $M$  to współczynnik nieidealności diody, o którym zakładamy, że  $M = 1$ .

Oblicz wartość prądu wstecznego nasycenia  $I_0$  diody LED na podstawie zmierzonych wartości prądu diody i napięcia na diodzie.

Wyznacz niepewność obliczonej wartości prądu  $I_0$ . Określ która z niepewności uwzględnionych wielkości ma największy wpływ na niepewność wyznaczonej wartości  $I_0$ .

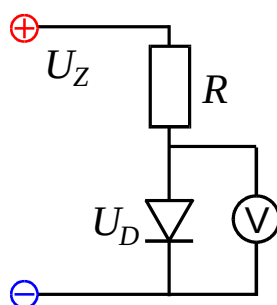
**Wzór na niepewność wartości  $I_0$  wyprowadź w domu przed ćwiczeniami.**

## Część (b)

### WSTĘP

Celem tej części ćwiczenia jest zbadanie rozkładu wartości napięcia przewodzenia  $U_p$  w warunkach stałego prądu dla serii 50-100 sztuk nominalnie identycznych diod. Poprawne wykonanie zadania wymaga starannego i szczegółowego zbadania efektów systematycznych związanych z dokładnością przyrządów i metodą pomiarową.

Pomiaru napięcia dokonuje się za pomocą układu dzielnika napięcia zbudowanego z opornika wzorcowego oraz diody. Układ zasilany jest stałym napięciem. Układ jest zbudowany wg schematu z rysunku 1 (źródłem napięcia  $U_Z$  jest zasilacz napięcia stałego).



Rys. 1. Układ do pomiaru napięcia przewodzenia diody.

Zależność napięcia  $U_D$  od natężenia,  $I$ , dla diody dana jest wzorem:

$$U_D = \frac{k_B T}{e} \ln \left( 1 + \frac{I}{I_0} \right) \quad (1)$$

Napięcie na diodzie jest rzędu 1 V. Tymczasem wartość  $k_B T/e$  w temperaturze pokojowej wynosi około 0.025 V. Jeżeli w układzie nastąpi zmiana prądu np. z 1 mA na 1.1 mA, to napięcie zmieni się o 0.0025 V, czyli bardzo nieznacznie. W tej sytuacji możemy przyjąć przybliżenie, że napięcie na diodzie jest praktycznie stałe. Ponieważ napięcie zasilania też jest stałe, możemy przyjąć, że na oporniku jest stałe napięcie  $U_Z - U_D$  i płynie przez niego stały prąd  $I = (U_Z - U_D)/R$ .

### POMIARY

#### Wykonanie pomiarów

1. Montowanie układu wymaga lutowania jego elementów – szczegółowe wskazówki dotyczące lutowania otrzymasz na początku zajęć. Badane diody umieszczaj w zaciskach na płytce montażowej. Do pomiaru napięcia na diodzie  $U_D$  użyj kabli zakończonych wtyczkami bananowymi z chwytakami, którymi należy chwycić przylutowane do płytki przewody.
2. Przy **odłączonych** kablach zasilania zmierz jak najdokładniej, za pomocą multimetru cyfrowego, wartość  $R$  oporności opornika referencyjnego o wartości około 1 kΩ. Czy wskazania miernika fluktuują w czasie? Co to oznacza? Odnótuj zakres, na którym wykonałeś/wykonałaś pomiar.
3. Za pomocą kabli zakończonych wtyczkami bananowymi zasilaj układ napięciem stałym o wartości poniżej 5 V. Zmierz tą wartość multimetrem jak najdokładniej. Nie zmieniaj wartości napięcia z zasilacza w ciągu pomiarów całej serii diod.

4. Zmieniając kolejno diody w zaciskach, mierz napięcia  $U_D$ . Czy wskazania miernika zmieniają się w czasie? Co to oznacza z punktu widzenia niepewności pomiaru?
5. **UWAGA.** Zwróć uwagę, że po wyjęciu badanej diody z układu, woltomierz mierzy wartość  $U_Z$  - napięcia zasilania.
6. Zanotuj wartości  $U_D$  korzystając z tabeli poniżej. Pisząc raport oblicz też prąd diody  $I_D$ .

Tabela 2 Arkusz pomiarowy

| nr pomiaru | napięcie $U_D$<br>[V] | niepewność $U_D$<br>[V] | Prąd $I_D=(U_Z-U_D)/R$<br>[A] | Niepewność $I_D$<br>[A] |
|------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| 1          |                       |                         |                               |                         |
| 2          |                       |                         |                               |                         |
| ...        |                       |                         |                               |                         |
| 100        |                       |                         |                               |                         |

7. Z wyników pomiarów wartości  $U_D$  będzie sporządzany histogram. Histogram to wykres słupkowy zmiennej mierzonej  $U_D$  pokazujący np. ilość pomiarów (liczebność) w przedziałach wartości  $U_D$  o szerokości  $\Delta$  zwanej szerokością przedziałów histogramowania (ang.: *bin size*, np. we własnościach histogramu w programie Scidavis). Zasady wykonywania histogramu są podane na końcu tej instrukcji. Na histogramach można przedstawiać liczebności przedziałów, częstości występowania wartości z przedziałów lub gęstości (opis poniżej). Należy sporządzić **histogram liczebności** wyników pomiarów napięcia przewodzenia diod  $U_D$  dla około 7-12 przedziałów wartości przyjmowanych przez  $U_D$ . Histogram można rysować w arkuszu kalkulacyjnym programu Excel, Open Calc lub w programie Scidavis (z menu wybrać Plot → Statistical Graphs → Histogram).

### METODY ANALIZY DANYCH

Celem zadań rachunkowych rozważanych poniżej jest opanowanie i zrozumienie metod analizy rozkładów wyników doświadczalnych. Wyniki napięć  $U_D$  z Tabeli 2 zostaną przedstawione na histogramie. Uzyskany rozkład wartości  $U_D$  zostanie porównany na wykresie z rozkładem Gaussa wykreślonym dla parametrów:  $\mu = \bar{U}_D$  (wartość średnia zmierzonych wartości  $U_D$  dla serii diod) oraz niepewności pojedynczego pomiaru  $\sigma = s_U$ . Opis metody sporządzania histogramu znajduje się w końcowej części tej instrukcji. Wzory, z których korzystamy w obliczeniach:

- wartość średnia z serii  $N$  pomiarów  $U_i$ : 
$$\bar{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n n_k U_{[k]} = \bar{U},$$

gdzie  $k=1...n$  numeruje  $n$  przedziałów histogramowania,  $U_{[k]}$  oznacza wartość środkową napięcia w  $k$ -tym przedziale histogramowania,  $n_k$  oznacza ilość wartości w  $k$ -tym przedziale histogramowania (liczebność przedziału), przy czym ilość wszystkich pomiarów

$N = \sum_{k=1}^n n_k$  jest równa sumie liczebności wszystkich przedziałów histogramowania,

- wartość niepewności pojedynczego pomiaru  $s_U$  (która także może być liczona z liczebności i wartości średniej w przedziałach histogramowania):

$$s_U^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (U_i - \bar{U})^2 \approx \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^n n_k (U_{[k]} - \bar{U})^2 = \hat{s}_U^2$$

W ogólności, na histogramach można przedstawiać:

- liczebności  $n_k$  w przedziałach histogramowania (ilość wyników pomiaru wartości  $U_D$  mieszczących się w każdym przedziale histogramowania  $k = 1...n$ ). Aby porównać taki

histogram z gęstością prawdopodobieństwa należy gęstość prawdopodobieństwa pomnożyć przez  $N \cdot \Delta$ .

- ułamek  $\frac{n_k}{N}$  liczebności przedziału do ilości wszystkich pomiarów, zwany częstością zliczeń. Aby porównać taki histogram z gęstością prawdopodobieństwa należy gęstość pomnożyć przez  $\Delta$  - szerokość przedziału histogramowania.

- ułamek  $\frac{n_k}{N \cdot \Delta_k}$  zwany gęstością zliczeń. Taki histogram jest unormowany i może być bezpośrednio porównywany z gęstością prawdopodobieństwa np. z rozkładu Gaussa.

## PORÓWNANIE GRAFICZNE ROZKŁADU GAUSSA I DOŚWIADCZALNEGO

### Zadanie 4

Zakładając, że wyniki  $U_D$  pomiarów napięcia przewodzenia można opisać rozkładem Gaussa (gęstości prawdopodobieństwa):

$$G(U_D; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(U_D - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

z wartościami parametrów  $\mu = \overline{U_D}$  (wartość średnia, np. = 1.77632 V) oraz  $\sigma = s_U$  (dyspersja, np. = 0.01824 V, podane tu liczby pochodzą z przykładowego pomiaru napięć przewodzenia serii diod) obliczonymi dla danej serii zmierzonych diod, naszkicuj ten rozkład na histogramie liczebności. Skorzystaj z metody obliczeń dla serii diod jak podano w tabeli 3.

| Tabela 3                                                                                                                       |      |      |       |        |        |       |       |      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|-------|--------|--------|-------|-------|------|-----------|
| krawędź dolna przedziału histogramowania $U_{D,k}$ [V]                                                                         | 1.7  | 1.72 | 1.74  | 1.76   | 1.78   | 1.8   | 1.82  | 1.84 | –         |
| krawędź górna przedziału histogramowania $U_{D,k} + \Delta$ [V]                                                                | 1.72 | 1.74 | 1.76  | 1.78   | 1.8    | 1.82  | 1.84  | 1.86 | –         |
| środek przedziału $U_{D[k]}$ [V]                                                                                               | 1.71 | 1.73 | 1.75  | 1.77   | 1.79   | 1.81  | 1.83  | 1.85 | suma      |
| Liczba $n_k$ wyników w przedziale (liczebność przedziału)                                                                      | 0    | 5    | 43    | 91     | 63     | 13    | 1     | 0    | $N = 216$ |
| gęstość eksperymentalna $\frac{n_k}{N \cdot \Delta}$ [ $V^{-1}$ ]                                                              | 0    | 1.15 | 9.95  | 21.075 | 14.575 | 3     | 0.225 | 0    | –         |
| Spodziewana ilość zliczeń w przedziale $k$ obliczona z rozkładu Gaussa $N'_k = N \cdot \Delta \cdot G(U_{D[k]}; \bar{U}, s_U)$ | 0,13 | 3,76 | 33,36 |        | 71,32  | 17,18 | 1,24  | 0,03 |           |

Przypominamy wzór służący do wyznaczenia oczekiwanej liczby  $N_k$  pomiarów w przedziale:

$$N_k = N \int_{U_k}^{U_k + \Delta} G(U_D; \mu, \sigma) dU_D,$$

gdzie  $\Delta$  jest szerokością przedziału histogramowania. Najprostsza, i przybliżona, metoda obliczenia całki polega na zastąpieniu jej wyrażeniem  $G(U_{D[k]}; \mu, \sigma) \cdot \Delta$  określającym pole

powierzchni prostokąta o wysokości  $G(U_{D[k]}; \mu, \sigma)$  i podstawie  $\Delta$ , gdzie  $U_{D[k]}$  wyznacza środek przedziału histogramowania, a wtedy

$$N_k \approx N'_k = N \cdot \Delta \cdot G(U_{D[k]}; \mu, \sigma).$$

Jeśli chcemy wyznaczyć całkę dokładnie, wprowadzamy nową zmienną całkowania

$$z = \frac{U_D - \mu}{\sigma},$$

zwaną **zmienną standaryzowaną** i wartość  $N_k$  wyznaczamy za pomocą

$$N_k = N \cdot P(z_k \leq z < z_{k+1}) = N \int_{z_k}^{z_{k+1}} N(z) dz = N(F(z_{k+1}) - F(z_k)),$$

$$\text{gdzie } z_k = \frac{U_k - \mu}{\sigma}, z_{k+1} = \frac{U_k + \Delta - \mu}{\sigma}, F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Wartości przydatnych całek  $F(z)$  rozkładu Gaussa znajdują się w tabeli 4 na końcu instrukcji. Funkcję, którą tu całkujemy:

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

nazywamy **standaryzowanym rozkładem Gaussa**.

## ANALIZA DANYCH Z CZĘŚCI (B) – POMIAR 100 DIOD I SPRAWOZDANIE

1. Oblicz podstawowe statystyki opisowe: średnią arytmetyczną  $\overline{U_D}$ , jej statystyczną niepewność standardową  $s_{\overline{U}}$  i statystyczną niepewność standardową pojedynczego pomiaru  $s_U$  uzyskanego zbioru wartości  $U_D$ .
2. Narysuj histogram (liczebności) uzyskanych wartości napięcia przewodzenia diod. Na histogramie zaznacz położenie wartości średniej oraz wartości odległe o jedną statystyczną niepewność pojedynczego pomiaru na prawo i lewo od wartości średniej. Na podstawie histogramu lub korzystając bezpośrednio z danych oceń procent liczby pomiarów mieszczących się w tym przedziale. Porównaj z wartością wynikającą z rozkładu Gaussa.
3. Zakładając, że zebrane wartości napięć  $U_D$  przedstawiają reprezentatywną próbkę wylosowaną z rozkładu Gaussa o parametrach określonych przez wartość średnią  $\overline{U_D}$  i statystyczną niepewność pojedynczego pomiaru  $s_U$ , nanieś na histogram krzywą wynikającą z rozkładu Gaussa (gęstość prawdopodobieństwa rozkładu Gaussa mnożoną przez  $N \cdot \Delta$  dla przypadku histogramu liczebności).
4. Wyznacz systematyczną niepewność średniej z wartości  $U_D$  mierzonych miernikiem. Porównaj ją ze statystyczną niepewnością średniej  $s_{\overline{U}}$  i ze statystyczną niepewnością  $s_U$  pojedynczego pomiaru. Jakie konkluzje wynikają z tego porównania?
5. Stosownie zaokrąglając, podaj ostateczną ocenę oczekiwanej wartości  $U_D$  całej zbiorowości wszystkich diod wyprodukowanych w partii, z której pobrano badaną próbkę, a także niepewność statystyczną i niepewność systematyczną tej oceny.

## CAŁKI ROZKŁADU GAUSSA.

Tabela poniżej podaje wartość całki standaryzowanego rozkładu Gaussa

$$F(z) = P(-\infty < x \leq z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad z > 0.$$



Z uwagi na symetrię rozkładu, wartość całki dla ujemnych wartości argumentu można wyznaczyć ze związku  $F(-z) = 1 - F(z)$ .

Poniższy rozkład został policzony wykorzystując funkcję ROZKLAD.NORMALNY (...) w programie Excel.

| Tabela 4 |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| z        | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
| 0.00     | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.10     | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.20     | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.30     | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.40     | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.50     | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.60     | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.70     | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.80     | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.90     | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.00     | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.10     | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.20     | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.30     | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.40     | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.50     | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.60     | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.70     | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.80     | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.90     | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.00     | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.10     | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.20     | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.30     | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.40     | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.50     | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.60     | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.70     | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.80     | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.90     | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.00     | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.10     | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |

## Literatura

- [1] A. Majhofer, *Analiza niepewności pomiarowych i pracownia wstępna*, skrypt FUW, (wersja 2011), plik pdf dostępny pod adresem:  
<http://anipw.igf.fuw.edu.pl/Instrukcje/AnalizaNiep.pdf>
- [2] oprac. A. Korgul, *Analiza danych pomiarowych*, wyd. 3 uzupeł., materiały pomocnicze dla studentów Wydz. Chemii UW, plik pdf dostępny pod adresem:  
[http://www.chem.uw.edu.pl/people/AMyslinski/informator\\_08/Pracownie/fiz\\_i\\_radio/analiza.pdf](http://www.chem.uw.edu.pl/people/AMyslinski/informator_08/Pracownie/fiz_i_radio/analiza.pdf)

## KONSTRUKCJA HISTOGRAMU

Przy konstruowaniu histogramu przydatne jest wyznaczenie wartości najmniejszej  $x_{\min}$  i największej,  $x_{\max}$ , w próbce. Wartości te pozwalają ocenić rozpiętość histogramu. Niech symbol  $N$  oznacza liczebność próbki. Sam histogram budujemy w następujący sposób.

- Ustalamy dolną krawędź  $x_{\{1\}} < x_{\min}$  histogramu oraz szerokość  $\Delta_i$  przedziałów, czyli cały zakres wartości wielkości histogramowanej dzielimy na przedziały: od  $x_{\{1\}}$  do  $x_{\{2\}} = x_{\{1\}} + \Delta_1$ , od  $x_{\{2\}}$  do  $x_{\{3\}} = x_{\{2\}} + \Delta_2$ , od  $x_{\{3\}}$  do  $x_{\{4\}} = x_{\{3\}} + \Delta_3$  itd., aż do ostatniego,  $K$ -tego przedziału od wartości  $x_{\{K\}} = x_{\{K-1\}} + \Delta_{K-1}$  do wartości  $x_{\{K+1\}} = x_{\{K\}} + \Delta_K$ ,  $x_{\{K+1\}} \geq x_{\max}$ .
- Następnie ustalamy, do którego przedziału należy każda z kolejnych wartości z próbki, otrzymując liczby  $n_i$  danych w każdym z przedziałów, zwane **liczebnościami** bądź **krotnościami**. W trakcie ustalania, do którego przedziału histogramowania należy włączyć daną wartość, możemy natknąć się na sytuację, w której wartość ta wypada na granicy przedziałów, a więc może zostać zaklasyfikowana zarówno do tego, w którym rozważana wartość stanowi górną granicę lub też do następnego przedziału obejmującego większe wartości zmiennej histogramowanej. Najczęściej przyjmujemy konwencję, w której przedział histogramowania jest z lewej strony otwarty zaś z prawej domknięty, jak to sugeruje opis w poprzednim punkcie.
- W następnym kroku dla każdego przedziału histogramu konstruujemy częstość  $p_i := n_i/N$  oraz wielkość  $f_i$ , którą zwiemy **gęstością wielkości histogramowanej** (w tym przypadku: *gęstością okresu drgań wahadła*), a którą definiujemy jako  $f_i := p_i/\Delta_i$ , czyli stosunek częstości  $p_i$  do szerokości  $\Delta_i$  przedziału histogramowania. W rezultacie otrzymujemy kolejne wiersze tabeli poniżej.

| przedział                  | $(x_{\{1\}}, x_{\{2\}}]$ | $(x_{\{2\}}, x_{\{3\}}]$ | ... | $(x_{\{K\}}, x_{\{K+1\}}]$ | suma |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|-----|----------------------------|------|
| krotność                   | $n_1$                    | $n_2$                    | ... | $n_K$                      | $N$  |
| częstość $p_i$             | $\frac{n_1}{N}$          | $\frac{n_2}{N}$          | ... | $\frac{n_K}{N}$            | 1    |
| gęstość $f_i$ [ $s^{-1}$ ] | $\frac{n_1}{N\Delta_1}$  | $\frac{n_2}{N\Delta_2}$  | ... | $\frac{n_K}{N\Delta_K}$    | –    |

Zauważ, że wielkości  $f_i$  mają wymiar – w tym przypadku jest to odwrotność jednostki czasu, w której wyrażamy wyniki pomiaru okresu. Spełniają one także oczywisty związek

$$\sum_{i=1}^K f_i \Delta_i = 1,$$

czyli pola powierzchni słupków histogramu sumują się do jedność – co jest definicją frazy:

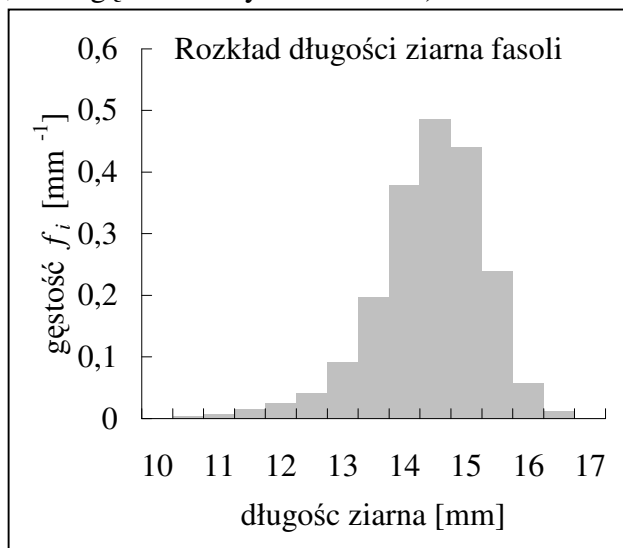
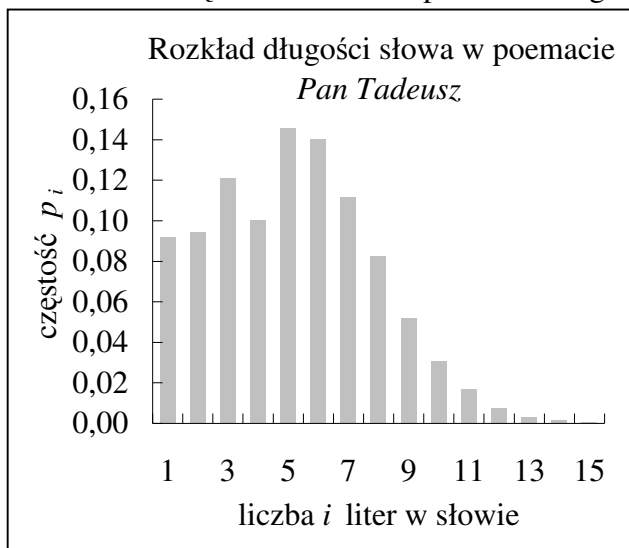
**histogram jest unormowany do jedności.** Najczęściej szerokości  $\Delta_i$  przedziałów histogramowania wybieramy takie same dla każdego z przedziałów, co uprasza nieco obliczenia. Są jednak sytuacje (przykład poznamy w jednym z następnych ćwiczeń), kiedy to zmuszeni jesteśmy wybrać je różnymi (a w skrajnym przypadku sięgającymi nieskończoności).

Histogram rysujemy, kreśląc słupki, o wysokości proporcjonalnej do wartości gęstości, na kolejnych przedziałach zaznaczonych na osi odciętych, czyli wielkości histogramowanej.

Zwróć uwagę na niektóre elementy graficzne takiego rysunku. Histogram winien mieć tytuł, osie należy opisać zarówno słownie, jak i symbolem, jak również podać, w nawiasach kwadratowych lub okrągłych, jednostkę wielkości występującej na osiach. Normy wymagają, aby znaczniki na osiach zwrócone były ku dodatnim kierunkom osi, co powoduje że w przypadku, gdy kreślone wielkości wypadają w pierwszej ćwiartce, znaczniki te „wchodzą” do rysunku, zaś prezentując wykres, który mieści się w trzeciej ćwiartce, znaczniki będą wskazywać na zewnątrz treści rysunku. W odniesieniu do wszystkich elementów graficznych prezentowanych w opracowaniach naukowych obowiązuje jeszcze jedna zasada: powinny być one „ascetyczne” w swym obliczu – wszelkie gradienty, tła, linie siatek, trzeci wymiar i tym podobne „dodatki”

powinny się pojawiać jedynie wtedy, gdy wynikają z istoty prezentowanej wielkości lub też intencją autora jest zwrócenie uwagi czytelnika na dany aspekt.

Z histogramami związana jest konwencja, której należy bezwzględnie przestrzegać. Otóż, istnieją dwa typy wielkości, które histogramujemy. Rozważmy takie wielkości jak czas, masa, długość, temperatura, ciśnienie, ... i skonfrontujmy je takimi wielkościami, jak liczba rozpadających się jąder atomowych w zadanym przedziale czasowym, długość słowa czyli liczba liter w słowie, liczba oczek na kostce do gier planszowych, liczba galaktyk w wybranym kącie bryłowym, ... . Te pierwsze mają tę własność, że *a priori* mogą przyjmować dowolną wartość, także wyrażoną liczbą niewymierną (nie możemy wykluczyć, że kulka ma masę np.  $e^\pi$  g), podczas gdy te drugie opisują się liczbą całkowitą bądź zerem. Te pierwsze nazywamy wielkościami **ciągłymi**, zaś o tych drugich mówimy, że przedstawiają sobą wielkości **dyskretne**. To rozróżnienie znajduje swe odbicie na histogramie – słupki histogramu wielkości ciągłej *zawsze* rysujemy połączone ze sobą (nawet jeśli histogram przedstawia częstości, a nawet krotności), a słupki histogramu wielkości dyskretnej rozdzielone. Ilustrują to dwa rysunki poniżej. Lewy przedstawia częstość wielkości dyskretnej – liczby liter w słowach *Pana Tadeusza* (tekst poematu: Polska Biblioteka Internetowa, <http://www.pbi.edu.pl/>) zaś prawy ukazuje gęstość wielkości ciągłej – długości 9439 ziaren fasoli (S.J. Pretorius, *Biometrika*, **22**, (1930), 110; dane za: M.G. Kendall i A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Charles Gryffin & Co. Ltd., London, 1958 – zwróć uwagę, że słowo *gęstość* oznacz tu liczbę ziaren fasoli na przedział długości, a nie gęstość masy ziarna fasoli).



O histogramach często mówimy, że przedstawiają sobą **rozkład** wielkości histogramowanej, np. *rozkład wartości zmierzonego okresu drgań*. Termin ten również stosujemy, gdy ilustrujemy częstości, a nawet wtedy, gdy na histogramie ukazujemy jedynie liczby danych (krotności  $n_i$ ) w klasach.