

Pracownia fizyczna i elektroniczna dla Inżynierii Nanostruktur oraz Energetyki i Chemii Jądrowej

Ćwiczenie 6

Elementy testowania hipotez (z błędami złożonymi) oraz statystycznej analizy wyników,

- propagacja małych błędów
- test zgodności 3-sigma
- histogram rozkładu statystycznego parametrów serii diod.

Cel

Celem części (a) ćwiczenia jest zastosowanie metod rachunku błędów do wyznaczania błędów złożonych w przypadku, gdy zależność wyniku jest dowolną znaną funkcją mierzonych wielkości. Metoda propagacji małych błędów będzie zastosowana przy testowaniu zgodności hipotez metodą testu 3-sigma. Metoda propagacji małych błędów jest rozszerzeniem metody szacowania błędu złożonego poznanej w ćwiczeniu C2 jedynie dla sumy i różnicy wielkości mierzonych.

Celem części (b) ćwiczenia jest zbadanie statystycznego rozkładu wartości napięcia przewodzenia U_p dla diody półprzewodnikowej w warunkach stałego prądu dla długiej serii nominalnie identycznych diod. Poprawne wykonanie zadania wymaga starannego i szczegółowego zbadania efektów systematycznych związanych z dokładnością przyrządów i metodą pomiarową. Wyniki przedstawione zostaną na histogramie, który będzie następnie porównany z rozkładem Gaussa o parametrach (wartości średniej i dyspersji) wyznaczonych z pomiarów serii diod.

Przypomnienie

1. Propagacja małych błędów

W ćwiczeniu C2 poznaliśmy zasadę obliczania niepewności dla sumy lub różnicy dwu **niezależnie mierzonych** wielkości, która była następująca. Jeśli znane są wartości mierzone i ich niepewności $x_0 \pm \sigma_x$ oraz $y_0 \pm \sigma_y$, to niepewność sumy $x_0 + y_0$ lub różnicy $x_0 - y_0$ wynosi $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$, jeśli niepewności wielkości mierzonych możemy traktować jako niezależne. Uogólnienie tego wzoru na dowolną funkcję wielkości mierzonych x oraz y daną wzorem $z = f(x, y)$ ma następującą postać:

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}\right)^2 \cdot \sigma_y^2},$$

i wynik wyznaczenia wartości funkcji f wynosi: $f(x_0, y_0) \pm \sigma_z$. I analogicznie dla większej ilości zmiennych. Taka metoda obliczania niepewności pomiaru nosi nazwę metody propagacji małych błędów.

2. Test zgodności 3σ

Test 3σ jest jedną z metod sprawdzania hipotez. Dotyczy sprawdzenia zgodności wyników doświadczeń z przewidywaniami teoretycznymi lub sprawdzania wzajemnej zgodności wyników różnych pomiarów. Test 3σ , spotykany w dwóch typach zagadnień:

- Hipoteza teoretyczna głosi, że „wielkość mierzona ma wartość μ ”. Wynik pomiaru x tej wielkości jest określony z dyspersją (niepewnością pomiaru) σ , gdzie σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji σ^2 . Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy wartość $|x - \mu|$ i sprawdzamy, jak uzyskana wartość ma się do wartości 3σ . Jeśli $|x - \mu| > 3\sigma$, to odrzucamy hipotezę teoretyczną o wartości μ wielkości mierzonej. Jeśli zaś $|x - \mu| \leq 3\sigma$, to konkludujemy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna z danymi z pomiaru.
- Hipoteza teoretyczna głosi, że „dwa pomiary uzyskane różnymi metodami (w różnych warunkach) dają tę samą wartość”. Niech wynik x uzyskany jedną metodą będzie określony z dyspersją σ_x , zaś wynik y uzyskany drugą metodą będzie określony z dyspersją σ_y . Test prowadzimy w ten sposób, że wyznaczamy wartość $|x - y|$ i sprawdzamy, jak wartość ta ma się do wartości 3σ , gdzie $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$. Jeśli $|x - y| > 3\sigma$, to odrzucamy hipotezę, że oba pomiary dają tę samą wartość. Jeśli zaś spełniony jest warunek $|x - y| \leq 3\sigma$, to konkludujemy, że hipoteza ta nie jest sprzeczna z danymi.

Przypominamy, że w przypadku, gdy test 3σ nie odrzuca hipotezy, nie oznacza to, że udowodniliśmy jej słuszność, a jedynie godzimy się z nią, gdyż nie jest sprzeczna z danymi z pomiaru.

Jeśli pomiary opisywane się rozkładem Gaussa, to testowi można nadać interpretację probabilistyczną: dopuszczamy odrzucenie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 3 razy na 1000 decyzji. Zastąpienie testu 3σ analogicznym testem 2σ oznacza odrzucanie prawdziwej hipotezy nie częściej niż 1 raz na 20 decyzji.

3. Niepewności pomiarowe miernika uniwersalnego Brymen 805.

Miernik uniwersalny Brymen 805 charakteryzują następujące parametry dotyczące pomiarów **natężenia prądu stałego, napięcia stałego i oporności** (w temperaturze $23^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$, wilgotności względnej poniżej 75% i miejscu użycia poniżej 2000 m nad poziomem morza – wpływ ciśnienia):

Natężenie prądu stałego (DC) zakres amperomierza	Dokładność: $w + nc$	Oporność wejściowa
400,0 μA	2,0% + 5c	150 Ω
4000 μA	1,2% + 3c	150 Ω
40,00 mA	2,0% + 5c	3,3 Ω
400,0 mA	1,2% + 3c	3,3 Ω
4,000 A	2,0% + 5c	0,03 Ω
10,00 A	1,2% + 3c	0,03 Ω

Napięcie stałe (DC) zakres woltomierza	Dokładność: $w + nc$	Oporność wejściowa
400,0 mV	0,3% + 4c	1 G Ω
4,000 V; 40,00 V; 400,0 V	0,5% + 3c	10 M Ω
1000 V	1,0% + 4c	10 M Ω

Oporność zakres omomierza	Dokładność: $w + nc$
400,0 Ω	0,8% + 6c
4,000 k Ω ; 40,00 k Ω ; 400,0 k Ω	0,6% + 4c
4,000 M Ω	1,0% + 4c
40,00 M Ω	2,0% + 4c

Tabela 1.

Dopuszczalny błąd graniczny wskazań miernika uniwersalnego Brymen 805. Zakres pomiarowy miernika rozpoznajemy po formacie liczbowym wyświetlanego wyniku.

Przypominamy:

Δ – dopuszczalny błąd graniczny wskazania miernika na danym zakresie pomiarowym wyznacza się na podstawie wzoru:

$$\Delta = \frac{w}{100} x + nc,$$

gdzie poszczególne wielkości oznaczają:

- w – dokładność wskazanej wartości x wyrażona jako **ułamek wartości zmierzonej** na wybranym zakresie pomiarowym (w tabeli powyżej ukazana w formie **procentu odczytu**).

Przykład.

*Jeśli producent podaje dokładność $w = 0,5\%$ na wybranym zakresie pomiarowym, to dla wskazania **30,00 V** wyniesie ona $30,00 \text{ V} \cdot 0,005 = 0,15 \text{ V}$.*

- nc – dokładność cyfrowa określana jako liczba n najmniej znaczących jednostek c odczytu – zależy ona od wybranego zakresu pomiarowego i jakości przetwornika A/C, a **nie zależy** od wartości uzyskanej w pomiarze.

Przykład.

*Jeśli producent podaje, że na zakresie pomiarowym **40,00 V DC** dokładność wynosi **3c**, to znaczy, że wartość dokładna może się różnić maksymalnie dodatkowo o $\pm 0,03 \text{ V}$ od odczytanej wartości. Sumując obie wartości otrzymamy dopuszczalny błąd graniczny Δ pomiaru przy wskazaniu **30 V** równą: $\Delta = 0,15 \text{ V} + 0,03 \text{ V} = 0,18 \text{ V}$ (co stanowi 0,6%) dla zakresu **40,00 V DC**.*

*Wykonując analogiczne obliczenia dla tej samej wartości mierzonej na niewłaściwie dobranym zakresie **400,0 V DC**, przy tych samych parametrach dokładności, otrzymamy dopuszczalny błąd graniczny: $\Delta = 0,15 \text{ V} + 0,3 \text{ V} = 0,45 \text{ V}$, co stanowi 1,5% wartości.*

Zestaw doświadczalny do dyspozycji

Część (a):

- płytką pomiarową do badania diody (z lutowaniem)
- zestaw 5 oporników o wartościach kiloomowych, w tym opornik 1 k Ω ,
- zasilacz stałego napięcia,
- miernik uniwersalny Brymen 805,
- akcesoria pomocnicze: kable łączeniowe, chwytaki pomiarowe, cyna i kolba lutowniczą.

Część (b)

- dodatkowo zestaw 100 diod elektroluminescencyjnych (LED) (wspólny z innymi zespołami w sali)

Część (a)

Zadanie 1.

Niepewność napięcia wyjściowego w dzielniku napięć.

W układzie dzielnika napięć, gdzie w obwodzie wejściowym znajdują się połączone szeregowo oporniki R i r , napięcie wyjściowe jest pobierane z opornika r . Znając niepewności napięcia wejściowego $\sigma_{U_{we}}$ oraz niepewności oporności σ_R i σ_r wyprowadź wzór na niepewność napięcia wyjściowego $\sigma_{U_{wy}}$ stosując metodę propagacji małych błędów.

Napięcie wyjściowe dzielnika jest wyznaczone wzorem: $U_{wy} = U_{we} \cdot \frac{r}{R+r}$

Wyprowadzenie wzoru na niepewność jest do wykonania w domu przed ćwiczeniami.

Podczas ćwiczeń zbuduj układ dzielnika napięcia z dwu wybranych oporników, wcześniej zmierz te oporniki omomierzem jak najdokładniej oraz wyznacz niepewności pomiaru oporności. Ustaw na zasilaczu napięcie z przedziału 3-6V oraz zmierz je jak najdokładniej i wyznacz niepewność jego pomiaru. Zmierz napięcie wyjściowe $U_{wy}^{zmierzone}$ ze zbudowanego dzielnika. Sprawdź przy użyciu testu hipotez 3σ czy otrzymane wartości napięcia wyjściowego obliczonego $U_{wy}^{obliczone} \pm \sigma_{obl}$ i zmierzonego $U_{wy}^{zmierzone} \pm \sigma_{zm}$ są ze sobą zgodne.

Oblicz też moc wydzielaną na oporniku r i niepewność tej wartości dla użytych wartości oporności i napięcia wejściowego korzystając z propagacji małych błędów.

Zadanie 2.

Przy łączeniu równoległym oporników oporność wypadkowa jest określona wzorem:

$\frac{1}{R_{wyp}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Oblicz z tego wzoru, korzystając z metody propagacji małych błędów, jaka

jest niepewność oporności wypadkowej znając niepewności wartości R_1 i R_2 .

Wyprowadzenie wzoru na niepewność jest do wykonania w domu przed ćwiczeniami.

Wybierz z zestawu oporników dwa dowolne oporniki, zmierz jak najdokładniej ich wartości oraz wyznacz niepewności ich pomiaru. Następnie połącz oporniki równolegle i zmierz oporność wypadkową oraz wyznacz niepewność pomiaru. Sprawdź przy użyciu testu 3σ czy wartości oporności wypadkowej obliczona i zmierzona są ze sobą zgodne.

Zadanie 3.

Dzielnik napięcia z diodą LED.

W dzielniku napięć wlutuj jako opornik wejściowy R opornik 1 k Ω oraz zastąp opornik wyjściowy r diodą LED włączoną w kierunku przewodzenia. Wiedząc, że napięcie przewodzenia dla diody LED świecącej w kolorze czerwonym (wykonanej z GaAsP, typ diody L-53IT lub LID-53LID firmy Kingbright) wynosi: 1.7 V przy prądzie diody 2 mA, dla opornika $R=1$ k Ω dobierz **przez obliczenie** takie napięcie z zasilacza, aby prąd diody wynosił 2 ± 0.1 mA. Do oceny napięcia z zasilacza spełniającego ten warunek przyjmij, że napięcie panujące na diodzie LED gdy płynie przez nią prąd 2 mA jest równe powyższej wartości napięcia przewodzenia.

Najpierw wykonaj obliczenia napięcia z zasilacza, potem zbuduj układ i dopiero włącz napięcie w zasilaczu.

Nie należy: (1) podłączać diody bezpośrednio (tj. bez opornika) do zasilacza, (2) podłączać diody do wyższego napięcia niż 5V w kierunku zaporowym, gdyż może spowodować to zniszczenie diody.

Przepuszczenie przez diodę LED prądu o natężeniu zbyt dużym (dopuszczalne określone przez producenta diody LED typu L-53IT lub LID-53LID maksymalne natężenie prądu w kierunku przewodzenia wynosi 30mA) powoduje zniszczenie diody.

Zmierz amperomierzem jak najdokładniej jakie natężenie prądu płynie przez diodę oraz wyznacz niepewność zmierzonej wartości, pomiar wykonaj na zakresie amperomierza 40.00 mA (na tym zakresie omomierz ma małą oporność wejściową). Zmierz także jak najdokładniej wartość napięcia panującego na diodzie i wyznacz jego niepewność. Czy obliczenia zakładające, że na diodzie panuje napięcie równe napięciu przewodzenia było poprawne?

Zakładamy słuszność dla badanej diody LED wzoru diodowego Shockley'a

$$I_D = I_0 \cdot \left(e^{\frac{e \cdot U_D}{M \cdot kT}} - 1 \right), \text{ gdzie } U_D - \text{napięcie panujące na diodzie, w wykładniku wartość } e \text{ to}$$

ładunek elementarny, $k = R/N_A$ to stała Boltzmanna, wartość $\frac{k \cdot T}{e} = 25 \text{ mV}$ dla temperatury

pokoju 21°C , I_0 to prąd wsteczny nasycenia diody, M to współczynnik nieidealności diody, o którym zakładamy, że wynosi w przybliżeniu 1.3.

Oblicz wartość prądu wstecznego nasycenia I_0 diody LED na podstawie zmierzonych wartości prądu diody i napięcia na diodzie.

Wyznacz niepewność obliczonej wartości prądu I_0 . W niepewności uwzględnij również niepewność współczynnika nieidealności diody, zakładamy, że $M = 1.3 \pm 0.3$. Określ która z niepewności uwzględnionych wielkości ma największy wpływ na niepewność wyznaczonej wartości I_0 .

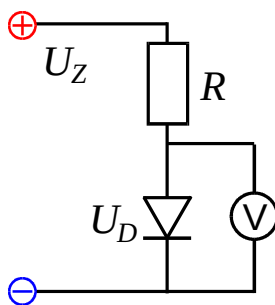
Wzór na niepewność wartości I_0 wyprowadź w domu przed ćwiczeniami.

Część (b)

WSTĘP

Celem tej części ćwiczenia jest zbadanie rozkładu wartości napięcia przewodzenia U_p w warunkach stałego prądu dla długiej serii nominalnie identycznych diod. Poprawne wykonanie zadania wymaga starannego i szczegółowego zbadania efektów systematycznych związanych z dokładnością przyrządów i metodą pomiarową.

Pomiaru napięcia dokonuje się za pomocą układu zbudowanego z opornika wzorcowego oraz diody. Układ zasilany jest stałym napięciem. Układ jest zbudowany wg schematu z rysunku 1 (źródłem napięcia U_Z jest zasilacz napięcia stałego).



Rys. 1. Układ do pomiaru napięcia przewodzenia diody.

Zależność napięcia U_D od natężenia, I , dla diody dana jest wzorem:

$$U_D = \frac{k_B T}{e} \ln \left(1 + \frac{I}{I_0} \right) \quad (1)$$

Napięcie na diodzie jest rzędu 1 V. Tymczasem wartość $k_B T/e$ w temperaturze pokojowej wynosi około 0.025 V. Jeżeli w układzie nastąpi zmiana prądu np. z 1 mA na 1.1 mA, to napięcie zmieni się o 0.0025 V, czyli bardzo nieznacznie. W tej sytuacji możemy przyjąć przybliżenie, że napięcie na diodzie jest praktycznie stałe. Ponieważ napięcie zasilania też jest stałe, możemy przyjąć, że na oporniku jest stałe napięcie $U_Z - U_D$ i płynie przez niego stały prąd $I = (U_Z - U_D)/R$.

POMIARY

Wykonanie pomiarów

1. Montowanie układu wymaga lutowania jego elementów – szczegółowe wskazówki dotyczące lutowania otrzymasz na początku zajęć. Badane diody umieszczaj w zaciskach na płytce montażowej. Do pomiaru napięcia na diodzie U_D użyj kabli zakończonych wtyczkami bananowymi z chwytakami, którymi należy chwycić przylutowane do płytki przewody.
2. Przy **odłączonych** kablach zasilania zmierz jak najdokładniej, za pomocą multimetru cyfrowego, wartość R oporności opornika referencyjnego o wartości około 1 kΩ. Czy wskazania miernika fluktuują w czasie? Co to oznacza? Odnótu zakres, na którym wykonałaś/wykonałeś pomiar.
3. Za pomocą kabli zakończonych wtyczkami bananowymi zasilaj układ napięciem stałym o wartości poniżej 5 V. Zmierz tą wartość multimetrem jak najdokładniej. Nie zmieniaj wartości napięcia z zasilacza w ciągu pomiarów całej serii diod.
4. Zmieniając kolejno diody w zaciskach, mierz napięcia U_D . Czy wskazania miernika zmieniają się w czasie? Co to oznacza z punktu widzenia niepewności pomiaru?
5. **UWAGA.** Zwróć uwagę, że po wyjęciu badanej diody z układu, woltomierz mierzy wartość U_Z - napięcia zasilania.
6. Zanotuj wartości U_D korzystając z tabeli poniżej. Pisząc raport oblicz też prąd diody I_D .

Tabela 2 Arkusz pomiarowy

nr pomiaru	napięcie U_D [V]	niepewność U_D [V]	Prąd $(U_Z - U_D)/R$ [A]	Niepewność I_D [A]
1				
2				
...				
100				

7. Z wyników pomiarów wartości U_D będzie sporządzany histogram. Histogram to wykres słupkowy zmiennej mierzonej U_D pokazujący np. ilość pomiarów (liczebność) w przedziałach wartości U_D o szerokości Δ zwanej szerokością przedziałów histogramowania (ang. : bin size, np. we własnościach histogramu w programie Scidavis). Zasady wykonywania histogramu są podane na końcu tej instrukcji. Na histogramach można przedstawiać liczebności przedziałów, częstości występowania wartości z przedziałów lub gęstości (opis poniżej). Należy sporządzić **histogram liczebności** wyników pomiarów napięcia przewodzenia diod U_D dla około 7-12 przedziałów wartości przyjmowanych przez U_D . Histogram można rysować w arkuszu kalkulacyjnym programu Excel, Open Calc lub w programie Scidavis (z menu wybrać Plot → Statistical Graphs → Histogram).

METODY ANALIZY DANYCH

Celem zadań rachunkowych rozważanych poniżej jest opanowanie i zrozumienie metod analizy rozkładów wyników doświadczalnych. Wyniki napięć U_D z Tabeli 2 zostaną przedstawione na histogramie. Uzyskany rozkład wartości U_D zostanie porównany na wykresie z rozkładem Gaussa wykreślonym dla parametrów: $\mu = \bar{U}_D$ (wartość średnia zmierzonych wartości U_D) oraz niepewności pojedynczego pomiaru $\sigma = s_U$. Opis metody sporządzania histogramu znajduje się w końcowej części tej instrukcji. Wzory, z których korzystamy w obliczeniach:

- wartość średnia z serii N pomiarów U_i :
$$\bar{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n n_k U_{[k]} = \tilde{U},$$

gdzie $k = 1 \dots n$ numeruje n przedziałów histogramowania, $U_{[k]}$ oznacza wartość środkową napięcia w k -tym przedziale histogramowania, n_k oznacza ilość wartości w k -tym przedziale histogramowania (liczebność przedziału), przy czym ilość wszystkich pomiarów

$N = \sum_{k=1}^n n_k$ jest równa sumie liczebności wszystkich przedziałów histogramowania,

- wartość niepewności pojedynczego pomiaru (która także może być liczona z liczebności i wartości średniej w przedziałach histogramowania):

$$s_U^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (U_i - \bar{U})^2 \approx \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^n n_k (U_{[k]} - \tilde{U})^2 = \tilde{s}_U^2$$

Na histogramach można przedstawiać:

- liczebności n_k w przedziałach histogramowania (ilość wyników pomiaru wartości U_D mieszczących się w każdym przedziale histogramowania $k = 1 \dots n$). Aby porównać taki histogram z gęstością prawdopodobieństwa należy gęstość prawdopodobieństwa pomnożyć przez $N \cdot \Delta$.

- ułamek $\frac{n_k}{N}$ liczebności przedziału do ilości wszystkich pomiarów, zwany częstością zliczeń. Aby porównać taki histogram z gęstością prawdopodobieństwa należy gęstość pomnożyć przez Δ - szerokość przedziału histogramowania.

- ułamek $\frac{n_k}{N \cdot \Delta_k}$ zwany gęstością zliczeń. Taki histogram jest unormowany i może być bezpośrednio porównywany z gęstością prawdopodobieństwa np. z rozkładu Gaussa.

PORÓWNANIE GRAFICZNE ROZKŁADU GAUSSA I DOŚWIADCZALNEGO

Zadanie 4

Zakładając, że wyniki U_D pomiarów napięcia przewodzenia można opisać rozkładem Gaussa (gęstości prawdopodobieństwa):

$$G(U_D; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(U_D - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

z wartościami parametrów $\mu = \bar{U}_D = 1.77632 \text{ V}$ (wartość średnia) oraz $\sigma = s_U = 0.01824 \text{ V}$ (dyspersja) obliczonymi dla indywidualnych zmierzonych danych (podane tu liczby pochodzą z przykładowego pomiaru napięć przewodzenia serii diod), naszkicuj ten rozkład na histogramie liczebności. Skorzystaj z tabeli 3.

Tabela 3									
krawędź dolna przedziału histogramowania $U_{D,k}$ [V]	1.7	1.72	1.74	1.76	1.78	1.8	1.82	1.84	–
krawędź górna przedziału histogramowania $U_{D,k} + \Delta$ [V]	1.72	1.74	1.76	1.78	1.8	1.82	1.84	1.86	–
środek przedziału $U_{D[k]}$ [V]	1.71	1.73	1.75	1.77	1.79	1.81	1.83	1.85	suma
Liczba n_k wyników w przedziale (liczebność przedziału)	0	5	43	91	63	13	1	0	$N = 216$
gęstość eksperymentalna $\frac{n_k}{N \cdot \Delta}$ [V ⁻¹]	0	1.15	9.95	21.075	14.575	3	0.225	0	–
Spodziewana ilość zliczeń w przedziale k obliczona z rozkładu Gaussa $N'_k = N \cdot \Delta \cdot G(U_{D[k]}; \bar{U}, s_U)$	0,13	3,76	33,36		71,32	17,18	1,24	0,03	

Przypominamy wzór służący do wyznaczenia oczekiwanej liczby N_k pomiarów w przedziale:

$$N_k = N \int_{U_k}^{U_k + \Delta} G(U_D; \mu, \sigma) dU_D,$$

gdzie Δ jest szerokością przedziału histogramowania. Najprostsza, i przybliżona, metoda obliczenia całki polega na zastąpieniu jej wyrażeniem $G(U_{D[k]}; \mu, \sigma) \cdot \Delta$ określającym pole powierzchni prostokąta o wysokości $G(U_{D[k]}; \mu, \sigma)$ i podstawie Δ , gdzie $U_{D[k]}$ wyznacza środek przedziału histogramowania, a wtedy

$$N_k \approx N'_k = N \cdot \Delta \cdot G(U_{D[k]}; \mu, \sigma).$$

Jeśli chcemy wyznaczyć całkę dokładnie, wprowadzamy nową zmienną całkowania

$$z = \frac{U_D - \mu}{\sigma},$$

zwaną **standaryzowaną** i wartość N_k wyznaczamy za pomocą

$$N_k = N \cdot P(z_k \leq z < z_{k+1}) = N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mathcal{N}(z) dz = N (F(z_{k+1}) - F(z_k)),$$

$$\text{gdzie } z_k = \frac{U_k - \mu}{\sigma}, z_{k+1} = \frac{U_k + \Delta - \mu}{\sigma}, F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Wartości przydatnych całek $F(z)$ rozkładu Gaussa znajdują się w tabeli 4 na końcu instrukcji. Funkcję, którą tu całkujemy:

$$\mathcal{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

nazywamy **standaryzowanym rozkładem Gaussa**.

ANALIZA DANYCH Z CZĘŚCI (B) – POMIAR 100 DIOD I SPRAWOZDANIE

1. Oblicz podstawowe statystyki opisowe: średnią arytmetyczną $\bar{U}_D$, jej statystyczną niepewność standardową $s_{\bar{U}}$ i statystyczną niepewność standardową pojedynczego pomiaru s_U uzyskanego zbioru wartości U_D .
2. Narysuj histogram uzyskanych wartości napięcia przewodzenia diod. Na histogramie zaznacz położenie wartości średniej oraz wartości odległe o jedną statystyczną niepewność pojedynczego pomiaru na prawo i lewo od wartości średniej. Na podstawie histogramu lub korzystając bezpośrednio z danych, oceń procent liczby pomiarów mieszczących się w tym przedziale. Porównaj z wartością wynikającą z rozkładu Gaussa.
3. Zakładając, że zebrane wartości napięć U_D przedstawiają reprezentatywną próbkę wylosowaną z rozkładu Gaussa o parametrach określonych przez wartość średnią $\bar{U}_D$ i statystyczną niepewność pojedynczego pomiaru s_U , nanieś na histogram krzywą wynikającą z rozkładu Gaussa (gęstość prawdopodobieństwa rozkładu Gaussa mnożoną przez $N \cdot \Delta$ dla przypadku histogramu liczebności).
4. Wyznacz systematyczną niepewność średniej wartości U_D . Porównaj ją ze statystyczną niepewnością średniej $s_{\bar{U}}$ i ze statystyczną niepewnością s_U pojedynczego pomiaru. Jakie konkluzje wynikają z tego porównania?
5. Stosownie zaokrąglając, podaj ostateczną ocenę oczekiwaną wartości U_D całej zbiorowości wszystkich diod wyprodukowanych w partii, z której pobrano badaną próbkę, a także niepewność statystyczną i niepewność systematyczną tej oceny.

CAŁKI ROZKŁADU GAUSSA.

Tabela poniżej podaje wartość całki standaryzowanego rozkładu Gaussa

$$F(z) = P(-\infty < x \leq z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad z > 0.$$

Z uwagi na symetrię rozkładu, wartość całki dla ujemnych wartości argumentu można wyznaczyć ze związku $F(-z) = 1 - F(z)$.

Poniższy rozkład został policzony wykorzystując funkcję ROZKLAD.NORMALNY (...) w programie Excel.

Tabela 4										
<i>z</i>	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

KONSTRUKCJA HISTOGRAMU

Przy konstruowaniu histogramu przydatne jest wyznaczenie wartości najmniejszej $x_{\min}$ i największej, $x_{\max}$, w próbce. Wartości te pozwalają ocenić rozpiętość histogramu. Niech symbol N oznacza liczebność próbki. Sam histogram budujemy w następujący sposób.

- Ustalamy dolną krawędź $x_{\{1\}} < x_{\min}$ histogramu oraz szerokość Δ_i przedziałów, czyli cały zakres wartości wielkości histogramowanej dzielimy na przedziały: od $x_{\{1\}}$ do $x_{\{2\}} = x_{\{1\}} + \Delta_1$, od $x_{\{2\}}$ do $x_{\{3\}} = x_{\{2\}} + \Delta_2$, od $x_{\{3\}}$ do $x_{\{4\}} = x_{\{3\}} + \Delta_3$ itd., aż do ostatniego, K -tego przedziału od wartości $x_{\{K\}} = x_{\{K-1\}} + \Delta_{K-1}$ do wartości $x_{\{K+1\}} = x_{\{K\}} + \Delta_K$, $x_{\{K+1\}} \geq x_{\max}$.
- Następnie ustalamy, do którego przedziału należy każda z kolejnych wartości z próbki, otrzymując liczby n_i danych w każdym z przedziałów, zwane **liczebnościami** bądź **krotnościami**. W trakcie ustalania, do którego przedziału histogramowania należy włączyć daną wartość, możemy natknąć się na sytuację, w której wartość ta wypada na granicy przedziałów, a więc może zostać zaklasyfikowana zarówno do tego, w którym rozważana wartość stanowi górną granicę lub też do następnego przedziału obejmującego większe wartości zmiennej histogramowanej. Najczęściej przyjmujemy konwencję, w której przedział histogramowania jest z lewej strony otwarty zaś z prawej domknięty, jak to sugeruje opis w poprzednim punkcie.
- W następnym kroku dla każdego przedziału histogramu konstruujemy częstość $p_i := n_i/N$ oraz wielkość f_i , którą zwiemy **gęstością wielkości histogramowanej** (w tym przypadku: *gęstością okresu drgań wahadła*), a którą definiujemy jako $f_i := p_i/\Delta_i$, czyli stosunek częstości p_i do szerokości Δ_i przedziału histogramowania. W rezultacie otrzymujemy kolejne wiersze tabeli poniżej.

przedział	$(x_{\{1\}}, x_{\{2\}}]$	$(x_{\{2\}}, x_{\{3\}}]$	...	$(x_{\{K\}}, x_{\{K+1\}}]$	suma
krotność	n_1	n_2	...	n_K	N
częstość p_i	$\frac{n_1}{N}$	$\frac{n_2}{N}$	...	$\frac{n_K}{N}$	1
gęstość f_i [s^{-1}]	$\frac{n_1}{N\Delta_1}$	$\frac{n_2}{N\Delta_2}$	...	$\frac{n_K}{N\Delta_K}$	–

Zauważ, że wielkości f_i mają wymiar – w tym przypadku jest to odwrotność jednostki czasu, w której wyrażamy wyniki pomiaru okresu. Spełniają one także oczywisty związek

$$\sum_{i=1}^K f_i \Delta_i = 1,$$

czyli pola powierzchni słupków histogramu sumują się do jedność – co jest definicją frazy:

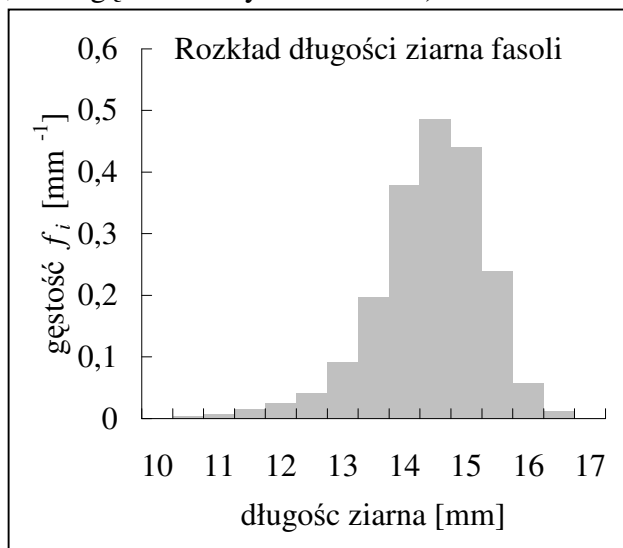
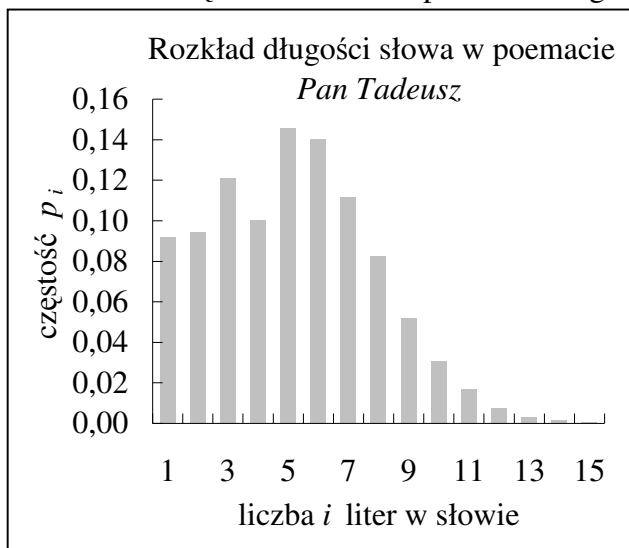
histogram jest unormowany do jedności. Najczęściej szerokości Δ_i przedziałów histogramowania wybieramy takie same dla każdego z przedziałów, co uprasza nieco obliczenia. Są jednak sytuacje (przykład poznamy w jednym z następnych ćwiczeń), kiedy to zmuszeni jesteśmy wybrać je różnymi (a w skrajnym przypadku sięgającymi nieskończoności).

Histogram rysujemy, kreśląc słupki, o wysokości proporcjonalnej do wartości gęstości, na kolejnych przedziałach zaznaczonych na osi odciętych, czyli wielkości histogramowanej.

Zwróć uwagę na niektóre elementy graficzne takiego rysunku. Histogram winien mieć tytuł, osie należy opisać zarówno słownie, jak i symbolem, jak również podać, w nawiasach kwadratowych lub okrągłych, jednostkę wielkości występującej na osiach. Normy wymagają, aby znaczniki na osiach zwrócone były ku dodatnim kierunkom osi, co powoduje że w przypadku, gdy kreślone wielkości wypadają w pierwszej ćwiartce, znaczniki te „wchodzą” do rysunku, zaś prezentując wykres, który mieści się w trzeciej ćwiartce, znaczniki będą wskazywać na zewnątrz treści rysunku. W odniesieniu do wszystkich elementów graficznych prezentowanych w opracowaniach naukowych obowiązuje jeszcze jedna zasada: powinny być one „ascetyczne” w swym obliczu – wszelkie gradienty, tła, linie siatek, trzeci wymiar i tym podobne „dodatki”

powinny się pojawiać jedynie wtedy, gdy wynikają z istoty prezentowanej wielkości lub też intencją autora jest zwrócenie uwagi czytelnika na dany aspekt.

Z histogramami związana jest konwencja, której należy bezwzględnie przestrzegać. Otóż, istnieją dwa typy wielkości, które histogramujemy. Rozważmy takie wielkości jak czas, masa, długość, temperatura, ciśnienie, ... i skonfrontujmy je takimi wielkościami, jak liczba rozpadających się jąder atomowych w zadanym przedziale czasowym, długość słowa czyli liczba liter w słowie, liczba oczek na kostce do gier planszowych, liczba galaktyk w wybranym kącie bryłowym, Te pierwsze mają tę własność, że *a priori* mogą przyjmować dowolną wartość, także wyrażoną liczbą niewymierną (nie możemy wykluczyć, że kulka ma masę np. e^π g), podczas gdy te drugie opisują się liczbą całkowitą bądź zerem. Te pierwsze nazywamy wielkościami **ciągłymi**, zaś o tych drugich mówimy, że przedstawiają sobą wielkości **dyskretne**. To rozróżnienie znajduje swe odbicie na histogramie – słupki histogramu wielkości ciągłej *zawsze* rysujemy połączone ze sobą (nawet jeśli histogram przedstawia częstości, a nawet krotności), a słupki histogramu wielkości dyskretnej rozdzielone. Ilustrują to dwa rysunki poniżej. Lewy przedstawia częstość wielkości dyskretnej – liczby liter w słowach *Pana Tadeusza* (tekst poematu: Polska Biblioteka Internetowa, <http://www.pbi.edu.pl/>) zaś prawy ukazuje gęstość wielkości ciągłej – długości 9439 ziaren fasoli (S.J. Pretorius, *Biometrika*, **22**, (1930), 110; dane za: M.G. Kendall i A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Charles Gryffin & Co. Ltd., London, 1958 – zwróć uwagę, że słowo *gęstość* oznacz tu liczbę ziaren fasoli na przedział długości, a nie gęstość masy ziarna fasoli).



O histogramach często mówimy, że przedstawiają sobą **rozkład** wielkości histogramowanej, np. *rozkład wartości zmierzonego okresu drgań*. Termin ten również stosujemy, gdy ilustrujemy częstości, a nawet wtedy, gdy na histogramie ukazujemy jedynie liczby danych (krotności n_i) w klasach.