3) 

Dla $\varepsilon=1$ (brak dielektryka) z tw. Gaussa

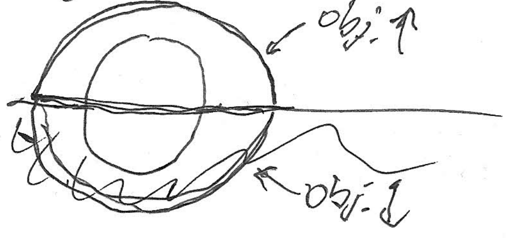
$$4\pi r^2 \cdot E_r = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to \vec{E} = \hat{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$V = -\int_\infty^r E\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \left(\text{dla } r=R \ V=V_0\right) = \frac{V_0 R}{r}$$

w płaszczyźnie $z=0$ $E_z=0$

dodajemy dielektryk izotropowy i liniowy ($\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$), kierunek pól pozostaje bez zmian; $E_{z\uparrow}(z=0)=E_{z\downarrow}(z=0)=0$

czyli brak ładunków związanych na płaszczyźnie



tw. Gaussa dla półsfer ($\iint_{z=0}\vec{E}_\uparrow d\vec{S} = \iint_{z=0}\vec{E}_\downarrow d\vec{S} = 0$)

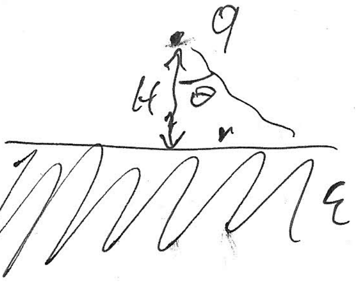
góra: $2\pi r^2 E_\uparrow = \frac{Q_\uparrow}{\varepsilon_0} \to E_\uparrow = \frac{Q_\uparrow}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \to V_\uparrow = \frac{V_0 R}{r}$

dół: $2\pi r^2 D_\downarrow = Q_\downarrow \to D_\downarrow = \frac{Q_\downarrow}{2\pi}\frac{1}{r^2} \to E_\downarrow = \frac{Q_\downarrow}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

$V_\downarrow = \frac{V_0 R}{r}$ (wtedy $Q_\downarrow = Q_\uparrow \cdot \varepsilon = Q_\uparrow + Q_{zw}$)

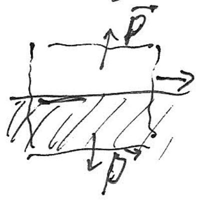
czyli V i $\vec{E}$ bez zmian)

---

4) 

$\vec{P} = (\varepsilon-1)\varepsilon_0\vec{E}$ $\quad \sigma_{zw} = \vec{P}\cdot\vec{n} = P_z\,(z=0)$

Wkład ładunku związanego do pola z Gaussa



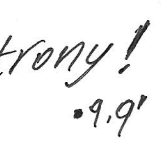
$\vec{n} \perp \vec{D}$ $\quad E_z^{(zw)} = \frac{\sigma_{zw}}{2\varepsilon_0}$

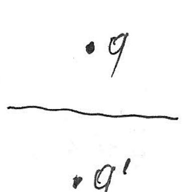
$$\sigma_{zw} = (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_z = (\varepsilon-1)\varepsilon_0\left(E_z^{(ład)} + E_z^{(zw)}\right) = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\left[+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2+H^2}\cdot(-\cos\theta) - \frac{\sigma_{zw}}{2\varepsilon_0}\right]$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon-1)\left[\frac{-qH}{4\pi\varepsilon_0(r^2+H^2)^{3/2}} - \frac{\sigma_{zw}}{2\varepsilon_0}\right] = \frac{-qH(\varepsilon-1)}{4\pi(r^2+H^2)^{3/2}} - \frac{\varepsilon-1}{2}\sigma_{zw}$$

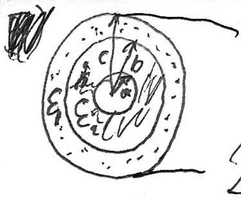
$\sigma_{zw} = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{qH}{2\pi(r^2+H^2)^3}$, dalej można całka kulombowska, ale ten rozkład odpowiada obrazowi

$q' = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$, $|H'|=|H|$ $\longrightarrow$ taki zapis bo działa w obie strony!



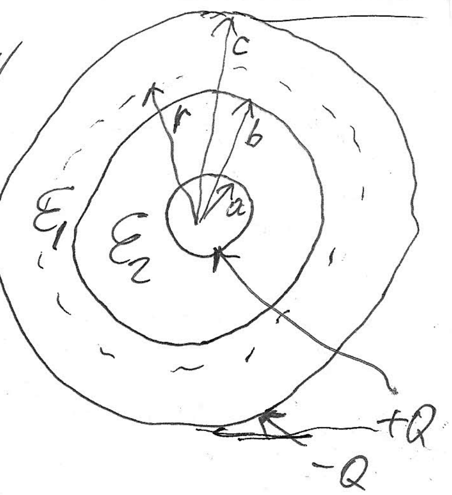
dla $z>0$ 

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+(z-H)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+(z+H)^2}}\right]$, dla $z<0$ $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+q'}{\sqrt{r^2+(z-H)^2}}$



Z tw. Gaussa $\oint\!\!\oint \vec{D}\, d\vec{s} = \iiint \rho_{free}\, dV$

$$2\pi r L D_r = Q \rightarrow D_r = \frac{Q}{2\pi r L}$$



$$E_r = \begin{cases} \frac{Q}{L}\frac{1}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r} & b<r<c \\ \frac{Q}{L}\frac{1}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r} & a<r<b \end{cases}$$

$$U = \begin{cases} \frac{Q}{L}\frac{-1}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\ln r + C_1 & b<r<c \\ \frac{Q}{L}\frac{-1}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\ln r + C_2 & a<r<b \end{cases}$$

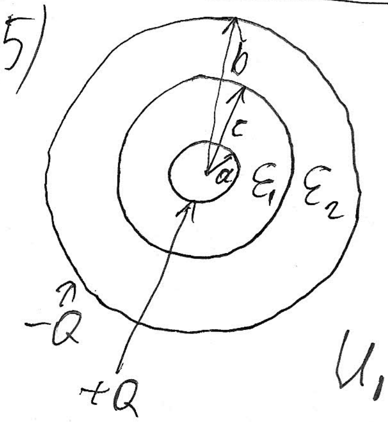
; można wyznaczyć C_1 i C_2 z warunków brzegowych ($U_1|_{r=b} = U_2|_{r=b}$, $U_1|_{r=c} = 0$), ale ważniejsza jest różnica potencjałów niż sam potencjał

$$\Delta U = U_A - U_C = (U_A - U_B)_2 + (U_B - U_C)_1 = \frac{Q}{L}\left[\frac{-1}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b} + \frac{-1}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}\ln\frac{b}{c}\right] =$$

$$= \frac{Q}{L}\,\frac{\varepsilon_1\ln\frac{b}{a} + \varepsilon_2\ln\frac{c}{b}}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\frac{C}{L} = \frac{Q}{\Delta U\cdot L} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0}{\varepsilon_1\ln\frac{b}{a} + \varepsilon_2\ln\frac{c}{b}}}$$

przypadkiem policzyłem walec. warto czytać zadania :)

5)



Z Gaussa $4\pi r^2 D_r = Q \rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$

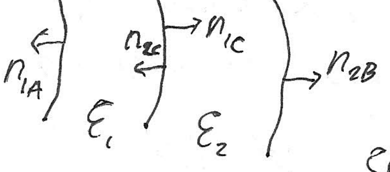
$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r^2}\ (a<r<c),\quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2}\ (c<r<b)$$

$\Delta U = (U_A - U_c)_1 + (U_c - U_b)_2$, znowu ignorujemy stałe

$$U_1 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r},\quad U_2 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r} \rightarrow \Delta U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 c} - \frac{1}{\varepsilon_1 a} + \frac{1}{\varepsilon_2 b} - \frac{1}{\varepsilon_2 c}\right) =$$

$$\Delta U = \frac{Q(\varepsilon_2 ab - \varepsilon_2 bc + \varepsilon_1 ac - \varepsilon_1 ab)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 abc} \rightarrow C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 abc}{\varepsilon_2 ab + \varepsilon_1 ac - \varepsilon_2 bc - \varepsilon_1 ab}$$

Uwaga przy ładunkach związanych — $\vec{n}$ na zewnątrz dielektryka!



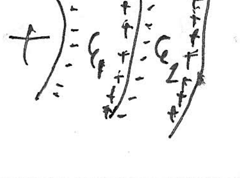
$$\vec{P}_1 = \vec{e}_r(\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_0 E_1 = \frac{Q(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\hat{e}_r \rightarrow \sigma_{1A} = -\frac{Q(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1 a^2}$$

$$\rightarrow \sigma_{1C} = \frac{Q(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi\varepsilon_1 c^2}$$

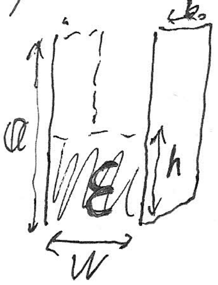
sprawdzamy pełny ładunek:

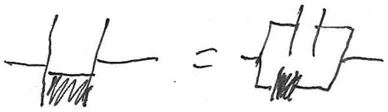
$$Q_{zw1} = \sigma_{1A}\cdot 4\pi a^2 + \sigma_{1C}\cdot 4\pi c^2 = 0$$

$$\vec{P}_2 = \frac{Q(\varepsilon_2 - 1)}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \rightarrow \sigma_{2C} = \frac{-Q(\varepsilon_2 - 1)}{4\pi\varepsilon_2 c^2},\quad \sigma_{2B} = \frac{Q(\varepsilon_2 - 1)}{4\pi\varepsilon_2 b^2}$$



6) Zadanie pomocnicze: siła wciągania dielektryka





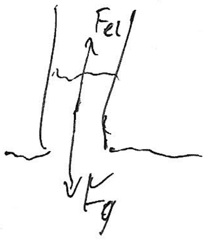
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0(a\cancel{b}-h)\cdot b}{w}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon h b}{w}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 b}{w}\left[a + (\varepsilon-1)h\right]$$

energia kondensatora przy stałym ładunku: $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C} \rightarrow F_{el} = -\partial_h W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\cdot\frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 b}{w}$

sprawdzamy: $F_{el} = \frac{1}{2}U^2\frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 b}{w} = \frac{1}{2}\partial_h C U^2$, czyli podobnie jak przy stałym potencjale (inny znak bo układ ze stałym potencjałem jest otwarty i na podtrzymanie pobiera ją z zewnątrz)

Teraz zadanie:



$$F_g = mg = \rho h b w g$$

1) stałe napięcie: $\rho h b w g = \frac{1}{2}U^2\frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 \cancel{b}}{w}$

$$h = \frac{U^2 \varepsilon_0(\varepsilon-1)}{2\rho g w^2}$$

2) stały ładunek: $\rho h b w g = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 b}{w}\frac{Q^2}{C^2} = \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 b Q^2}{2w}\frac{w^2}{[\varepsilon_0 b(a+(\varepsilon-1)h)]^2}$

$$\rho h g = \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 Q^2}{2\varepsilon_0^2 b^2[a+(\varepsilon-1)h]^2} \rightarrow \rho h g\cdot 2\varepsilon_0 b^2\cdot(a+(\varepsilon-1)h)^2 = (\varepsilon-1)Q^2$$

równanie 3-go rzędu, hmm...

Załóżmy $h \ll a \rightarrow (a+(\varepsilon-1)h)^2 \approx a^2 + 2a(\varepsilon-1)h$

$$4\varepsilon_0 b^2 \rho g a(\varepsilon-1)\cdot h^2 + 2\varepsilon_0 a^3 \rho g\cdot h - (\varepsilon-1)Q^2 = 0$$

już daje się rozwiązać, chociaż to jest żmudne

$$\Delta = 4\varepsilon_0^2 a^6 \rho^2 g^2 + 16\varepsilon_0(\varepsilon-1)^2 Q^2 b^2 \rho g a$$

$$h = \frac{\sqrt{\Delta} - 2\varepsilon_0 a^3 \rho g}{8\varepsilon_0 b^2 \rho g a(\varepsilon-1)}$$